

Федеральное государственное учреждение  
"Федеральный исследовательский центр  
"Информатика и управление" Российской академии наук"

*На правах рукописи*



БЕЗРОДНЫХ Сергей Игоревич

**Сингулярная задача Римана — Гильберта,  
гипергеометрическая функция Лауричеллы  
и приложения к астрофизике**

01.01.03 — математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ  
на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Научный консультант:  
д.ф.-м.н. В.И.ВЛАСОВ

Москва 2017

# Оглавление

<b>Введение</b> .....	6
0.1. Общая характеристика работы .....	6
0.2. Обзор содержания диссертации .....	17
0.3. Основные обозначения и некоторые определения .....	25
<b>Глава I. Сингулярная задача Римана — Гильберта</b> .....	27
§1. <b>Задача Римана — Гильберта в односвязной области</b> .....	27
1.1. Постановка задачи .....	27
1.2. Приложения к астрофизике .....	30
§2. <b>Методы конформного отображения односвязных областей</b> .....	31
2.1. Интеграл Кристоффеля — Шварца .....	32
2.2. Отображение круговых многоугольников .....	32
2.3. Приближенные методы конформного отображения .....	35
§3. <b>Задача Римана — Гильберта в верхней полуплоскости</b> и ее сведение к задаче сопряжения .....	38
3.1. Класс $H_0(\Xi)$ кусочно-гёльдеровых функций на вещественной оси .....	38
3.2. Используемые обозначения и предположения .....	39
3.3. Два случая рассматриваемой задачи: нелогарифмический и логарифмический .....	40
3.4. Сведение к задаче сопряжения .....	42
§4. <b>Модифицированный интеграл типа Коши</b> .....	45
4.1. Интеграл типа Коши. Формулы Сохоцкого .....	45
4.2. Модифицированный интеграл типа Коши с плотностью из класса $H_0(\Xi)$ .....	46
4.3. Некоторые частные случаи модифицированного интеграла типа Коши ..	47
§5. <b>Однородные задачи сопряжения и Римана — Гильберта</b> .....	48
5.1. Постановка однородной задачи сопряжения .....	48
5.2. Каноническое решение. Индекс $\varkappa$ задачи .....	49
5.3. Решение однородных задач сопряжения и Римана — Гильберта .....	54
§6. <b>Неоднородные задачи сопряжения и Римана — Гильберта</b> .....	56
6.1. Постановка неоднородной задачи сопряжения и ее сведение к задаче о скачке .....	56
6.2. Построение решения задачи о скачке .....	58
6.3. Частное решение неоднородной задачи Римана — Гильберта .....	64
6.4. Общее решение для неоднородной задачи Римана — Гильберта .....	65

<b>Глава II. Развитие теории функции Лауричеллы <math>F_D^{(N)}</math></b>	67
§1. <b>Обобщенная гипергеометрическая функция Лауричеллы <math>F_D^{(N)}</math></b>	67
1.1. Функция Лауричеллы и некоторые ее приложения	67
1.2. Обобщенный гипергеометрический ряд, система уравнений с частными производными и интегральные представления	68
1.3. Замечания о полученных в работе результатах	71
§2. <b>Гипергеометрическая функция Гаусса <math>F(a, b; c; z)</math></b>	74
2.1. Гипергеометрический ряд и уравнение	74
2.2. Интегральные представления	74
2.3. Канонические решения Куммера и аналитическое продолжение $F(a, b; c; z)$	75
2.4. Ассоциированные гипергеометрические ряды и тождество Якоби	79
§3. <b>Дифференциальные соотношения типа Якоби для функции Лауричеллы <math>F_D^{(N)}</math></b>	80
3.1. Тождества для ассоциированных функций Лауричеллы	80
3.2. Система дифференциальных соотношений типа Якоби	83
3.3. Система уравнений с частными производными для функции Лауричеллы как следствие соотношений типа Якоби	85
3.4. Доказательство соотношений типа Якоби для функции Лауричеллы	86
§4. <b>Аналитическое продолжение функции Лауричеллы <math>F_D^{(N)}</math></b>	95
4.1. Формулы аналитического продолжения в окрестность точки $\mathbf{z}^{(\infty)} = (\infty, \dots, \infty)$	95
4.2. Формулы аналитического продолжения в окрестность точки $\mathbf{z}^{(1)} = (1, \dots, 1)$	110
4.3. Формулы аналитического продолжения в окрестность точки $\mathbf{z}_p^{(1, \infty)} = (1, \dots, 1, \infty, \dots, \infty)$	114
§5. <b>Аналитическое продолжение функции Аппеля <math>F_1</math> в логарифмическом случае</b>	121
5.1. Функция Аппеля и связанная с ней система уравнений	121
5.2. Формулы аналитического продолжения в окрестность точки $(z, \zeta) = (\infty, \infty)$	124
5.3. Формулы аналитического продолжения в окрестность точки $(z, \zeta) = (1, 1)$	140
5.4. Формулы аналитического продолжения в окрестности точек $(z, \zeta) = (\infty, 1)$ и $(z, \zeta) = (1, \infty)$	153

<b>Глава III. Представление решения задачи Римана — Гильберта в виде интеграла Кристоффеля — Шварца .....</b>	161
§1. <b>Задача Римана — Гильберта с кусочно-постоянными данными в <math>\mathbb{H}^+</math> и представление ее решения в виде интеграла типа Коши .....</b>	162
1.1. Постановка задачи .....	162
1.2. Представление решения через интегралы типа Коши .....	164
§2. <b>Построение решения задачи Римана — Гильберта в виде интеграла Кристоффеля — Шварца .....</b>	166
2.1. Предварительные замечания .....	166
2.2. Используемый вариант формулы типа Якоби для функции Лауринеллы .....	167
2.3. Используемые обозначения .....	169
2.4. Приведение функции $N_k^+(\zeta)$ , $k = \overline{0, N}$ , и частного решения $N(\zeta)$ к виду интеграла Кристоффеля — Шварца .....	171
2.5. Представление решения задачи Римана — Гильберта в виде интеграла Кристоффеля — Шварца .....	182
<b>Глава IV. Приложение к задачам астрофизики .....</b>	185
§1. <b>Эффект магнитного пересоединения и используемые предположения .....</b>	185
1.1. Рассматриваемые задачи .....	185
1.2. Приближение сильного магнитного поля .....	186
1.3. Обобщения моделей Сыроватского и Петчека магнитного пересоединения в короне Солнца .....	188
1.4. Модель магнитосферы нейтронной звезды .....	193
§2. <b>Постановка задач Римана — Гильберта для моделей магнитного пересоединения в короне Солнца .....</b>	195
2.1. Общий подход к нахождению магнитного поля .....	195
2.2. Задача Римана — Гильберта, соответствующая фазе накопления энергии в области пересоединения (задача $\mathfrak{C}$ ) .....	200
2.3. Задача Римана — Гильберта, соответствующая фазе распада токового слоя в области пересоединения (задача $\mathfrak{D}$ ) .....	203
§3. <b>Вспомогательное конформное отображение области <math>G</math> — четверти области пересоединения .....</b>	209
3.1. Представление обратного отображения $z = \Phi^{-1}(\zeta)$ в виде	

интеграла Кристоффеля — Шварца .....	209
3.2. Вычисление параметров $\lambda$ , $\tau$ и $\mathcal{K}$ интеграла Кристоффеля — Шварца ..	211
3.3. Построение требуемого отображения $\zeta = \Phi(z)$ области $G$ .....	217
<b>§4. Решение задачи Римана — Гильберта, моделирующей магнитное поле при накоплении энергии в области пересоединения .....</b>	221
4.1. Постановка задачи в полуплоскости .....	221
4.2. Решение задачи Римана — Гильберта в полуплоскости .....	222
4.3. Представление решения $\mathcal{P}_{\text{con}}^+$ в виде рядов .....	224
4.4. Область годографа магнитного поля $\mathcal{W}_{\text{con}}$ .....	225
<b>§5. Решение задачи Римана — Гильберта, моделирующей магнитное поле при распаде токового слоя .....</b>	227
5.1. Постановка задачи Римана — Гильберта в полуплоскости .....	227
5.2. Решение задачи Римана — Гильберта в полуплоскости .....	229
5.3. Область годографа магнитного поля $\mathcal{W}_{\text{dis}}$ .....	231
<b>§6. Численная реализация для задач Римана — Гильберта <math>\mathfrak{C}</math> и <math>\mathfrak{D}</math> .....</b>	232
6.1. Алгоритм нахождения решений $\mathcal{F}_{\text{con}}$ и $\mathcal{F}_{\text{dis}}$ задач $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$ .....	232
6.2. Картина магнитного поля в области пересоединения при наличии непрерывного или распадающегося токового слоя .....	233
6.3. Поведение поля вблизи ударной волны .....	236
<b>§7. Решение задачи со свободной границей, возникающей при моделировании магнитосферы нейтронной звезды .....</b>	242
7.1. Постановка задачи со свободной границей .....	242
7.2. Сведение задачи со свободной границей к двум задачам Римана — Гильберта .....	243
7.3. Построение конформного отображения $z = \Phi(\zeta)$ .....	245
7.4. Представление для конформного отображения в виде интеграла типа Кристоффеля — Шварца .....	247
7.5. Численные результаты для формы магнитосферы и магнитного поля ..	248
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ А. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА ТИПА Коши .....</b>	250
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ В. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. .....</b>	255
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ С. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕКОТОРЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ ГЛАВЫ II. .....</b>	262
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ D. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. .....</b>	278
<b>Литература .....</b>	283

# Введение

**0.1. Общая характеристика работы.** Диссертация посвящена исследованию задачи Римана — Гильберта с разрывными коэффициентами и условиями роста, выводу новых представлений ее решения, получению важных для математической физики продвижений в теории обобщенной гипергеометрической функции Лаурichelлы, а также применению этих результатов к актуальным проблемам астрофизики.

**0.1.1°. Актуальность темы.** Задача о восстановлении аналитической в области  $\mathcal{B}$  функции  $\mathcal{F} = u + iv$  по заданному на границе  $\partial\mathcal{B}$  соотношению между ее вещественной и мнимой частями

$$a u - b v = c \tag{0.1}$$

(где  $a, b, c$  — вещественные функции), называемая *задачей Римана — Гильберта*, рассматривалась, начиная с основополагающих работ [220], [177], многими известными математиками. Глубокое развитие теория этой и других краевых задач для аналитических функций получила в трудах Сохоцкого [120], Вольтерра [242], Племеля [211], Гильберта [178], Нетера [202], Карлемана [157], Мусхелишвили [93], [96], Пикара [210], Гахова [43], [44] и мн. др. исследований.

Результаты классической теории задачи Римана — Гильберта (0.1) и методы ее решения изложены в монографиях [45], [95], [247] и курсах [82], [109], [176]; см. также [24], [90], [217]. Развитию и обобщению такой теории посвящены работы [26], [28], [33], [46], [51], [57], [66], [99], [100], [107], [112], [113], [149], [167], [222], [243], [244] и др.

Конструктивные и качественные методы теории задачи Римана — Гильберта находят многочисленные применения в задачах электроники и электролиза [80], [238], [241], [245], в теории нейтронных звезд [246], в теории упругости [94], [129], [133], [137], гидро- и аэродинамике [59], [91], [134], [186], [240], в обратных задачах импедансной томографии [183], [216], задачах распространения волн [60], [65], [84], [111], [126], в теории псевдоаналитических функций, теории эллиптических уравнений и систем, уравнений смешанного типа [21]-[23], [29], [30], [150], в теории случайных процессов [103], [159], [238], а также в теории аппроксимации [4], [122]. Развитие теории краевых задач для аналитических функций и различных их обобщений активно продолжается в настоящее время (см., например, [73]-[76], [92], [104], [105], [114], [115]).

В диссертации рассматривается задача Римана — Гильберта с разрывными данными (под которыми понимаются функции  $a$ ,  $b$  и  $c$ ) и условиями роста решения в некоторых точках границы области. Такой вариант этой задачи, который естественно называть *сингулярным*, не был достаточно изучен, а вместе с тем является востребованным в связи со многими актуальными приложениями, в частности в задачах современной астрофизики [227].

Гипергеометрические функции, как известно, играют важную роль при решении задач математической физики. Теория гипергеометрических функций многих комплексных переменных, возникшая в классических трудах П.Аппеля [141], Дж.Хорна [179] и Дж.Лауринеллы [194], получила глубокое развитие в работах О.Оре [204], А.Эрдейи [168], П.Ольсена [203], С.Г.Гиндинкина [50], Х.М.Шриваставы [225], Л.Слейтер [223], Х.Экстона [169], П.Делиня и Г.Д.Мостова [163], К.Аомото [138], И.М.Гельфанд и его научной школы [47]-[49], Б.Дворка [166] и многих других известных математиков. Исследования в этом направлении активно продолжаются в настоящее время, см., например, [106], [121], [139], [185].

Необходимо отметить, что обобщенные гипергеометрические функции (одной и многих переменных) находят многочисленные приложения, в том числе к квантовой физике, теория поля [53], [54], [110], [189], [198], [201], [218],

[224], [229], теории относительности [192] и астрофизике [175], к задачам теплопроводности [85], [169], [182], электромагнетизма [196], газовой динамики [130], [145], теории упругости [135], [169] и акустики [165], к теории вероятностей, математической статистике [160], [169], [191], [195], [199], броуновского движения [184] и проблемам передачи информации [102], [207],

В диссертационной работе дано развитие теории функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}(a_1, \dots, a_N; b, c; z_1, \dots, z_N)$ , представляющей собой обобщенную гипергеометрическую функцию от  $N$  комплексных переменных  $(z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$  и содержащей комплексные параметры  $(a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{C}^N$ ,  $b$  и  $c$ ; об этой функции см. работу Дж.Лауричеллы [194], а также [138], [142], [169] и др. Определением для этой функции служит  $N$ -кратный гипергеометрический ряд, сходящийся в единичном поликруге  $\mathbb{U}^N$ . Важным нерешенным вопросом в теории функции  $F_D^{(N)}$  является рассматриваемая в настоящей работе *проблема ее аналитического продолжения*. Она заключается в том, чтобы вне поликруга  $\mathbb{U}^N$  представить эту функцию в виде линейной комбинации других частных решений системы уравнений с частными производными, которой удовлетворяет и  $F_D^{(N)}$ . Эти решения построены в работе также в виде обобщенных гипергеометрических рядов (отличных от  $F_D^{(N)}$ ), которые сходятся на множествах, имеющих непустое пересечение с  $\mathbb{C}^N \setminus \mathbb{U}^N$ . Указанные представления для  $F_D^{(N)}$  называют *формулами аналитического продолжения*. Проблема аналитического продолжения функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}$  рассматривалась в работах многих авторов, где были получены частичные результаты (см., например, [168], [169], [203]), однако в полном объеме она оставалась нерешенной.

Важное теоретическое и прикладное значение имеют дифференциальные соотношения, которым подчинены гипергеометрические функции. Одним из важнейших в теории гипергеометрической функции Гаусса  $F(a, b; c; z)$  является известное тождество Якоби [187], см. также [19], [127], [212]. Его прямым обобщением на случай функции  $F_D^{(N)}$  служит найденная в настоящей работе система дифференциальных формул типа Якоби, которые ранее не были известны. Вместе с тем эти тождества играют ключевую роль при выводе

принципиально нового типа представлений решения задачи Римана — Гильберта в виде интеграла Кристоффеля — Шварца, см. об этом ниже.

Задачи Римана — Гильберта, возникающие в связи с приложениями, как правило, приходится решать в сложных областях. Для их сведения к задаче в канонической области, где решение выписывается явно, необходимо строить соответствующее конформное отображение. Его построение представляет собой самостоятельную трудную задачу. Даже в случае прямолинейного многоугольника, когда для отображения есть явное представление (в виде интеграла Кристоффеля — Шварца), возникает проблема отыскания неизвестных прообразов вершин, фигурирующих в этом интеграле [78], [176], [237]. Эта проблема значительно усложняется в типичной для приложений ситуации, когда прообразы вершин расположены крайне неравномерно и некоторые из них — очень близко друг к другу (что называют кроудингом) [176], [193], [236], [249]. Проблема параметров в ситуации кроудинга является весьма актуальной и привлекает большое внимание исследователей [25], [164], [176], [181], [193], [200], [235]-[237], [249]. Одним из ключевых аспектов в решении проблемы кроудинга, как показано в [16], является высокоточное вычисление функции Лауринеллы  $F_D^{(N)}$  во всем диапазоне изменения ее аргументов  $z_1, \dots, z_N$ . Возможность такого вычисления предоставляют найденные в настоящей работе формулы аналитического продолжения этой функции.

Отметим, что в приложениях (в механике [129], физике плазмы [42], [87], [124] и др.) нередко возникает важный случай задачи (0.1) в сложной области, когда данные задачи  $a$ ,  $b$  и  $c$  кусочно-постоянны, а в точках их разрыва предписываются условия роста решения. Заметим, что условие (0.1) при постоянных  $a$ ,  $b$  и  $c$  представляет собой уравнение прямой на плоскости  $w = u + iv$ . Такое наблюдение подсказывает, что решение задачи Римана — Гильберта с кусочно-постоянными коэффициентами может быть геометрически интерпретировано как конформное отображение исходной области на некоторый (не обязательно однолистный) многоугольник. Возможность такой интерпретации была указана Риманом [220] (даже для более общей

ситуации). Отметим, что реализацией этой интерпретации в случае задачи Римана — Гильберта с кусочно-постоянными данными в полуплоскости было бы представление решения в виде интеграла Кристоффеля — Шварца. Такое представление найдено в настоящей работе с помощью построенных формул типа Якоби для функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}$ .

Эффект магнитного пересоединения играет ключевую роль во многих астрофизических явлениях, сопровождающихся высвобождением значительного количества энергии, см. [67], [101], [116], [124], [144], в связи с чем моделирование этого эффекта представляет собой актуальную проблему. К указанным явлениям относятся, например, вспышки на Солнце и разрушение магнитосфер нейтронных звезд в результате воздействия ударных волн, вызванных взрывом сверхновых звезд. В диссертации решены две конкретные задачи Римана — Гильберта (в сложной области), возникающие при моделировании магнитного поля в окрестности пересоединяющего токового слоя в короне Солнца. Эти задачи весьма актуальны для описания процессов, предшествующих Солнечной вспышке, см. [124], [227]. В работе также дано решение задачи со свободной границей [117], возникающей при моделировании магнитосферы нейтронной звезды при воздействии на нее ударной волны от взрыва сверхновой звезды. Именно это явление согласно современным представлениям приводит к мощным всплескам жесткого космического электромагнитного излучения [62], [69], [117], [143], [162], [197], [213], [233], [248]. Подобные задачи со свободной границей в связи с астрофизическими приложениями рассматривались многими авторами, например, [3], [63], [64], [69], [98], [161], [239]. Однако решений в аналитической форме получено не было.

0.1.2º. Целью диссертационной работы является:

1) исследование разрешимости и получение представлений для решения задачи Римана — Гильберта в полуплоскости, когда коэффициенты и правая часть задачи являются кусочно-гёльдеровыми с разрывами первого рода, а в точках их разрыва предписаны условия произвольного степенного роста решения (такую задачу Римана — Гильберта называют сингулярной);

- 2) построение аналитического продолжения функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}$ , включающее нахождение полного набора решений системы уравнений с частными производными для  $F_D^{(N)}$  и вывод формул аналитического продолжения, представляющих функцию Лауричеллы вне единичного поликруга  $\mathbb{U}^N$  в виде линейных комбинаций указанных решений;
- 3) вывод дифференциальных соотношений типа Якоби для функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}$ , являющихся обобщением известного тождества Якоби для гипергеометрической функции Гаусса  $F(a, b; c; z)$ ;
- 4) вывод при помощи результатов пп. 1) и 3) нового представления в виде интеграла Кристоффеля — Шварца для решения задачи Римана — Гильберта в полуплоскости с кусочно-постоянными данными  $a, b$  и  $c$ , имеющими произвольное конечное число точек разрыва;
- 5) применение полученных в пп. 1)–4) результатов к моделированию *эффекта магнитного пересоединения* в короне Солнца, включающее решение двух конкретных задач Римана — Гильберта в сложных многоугольных областях; первая задача описывает фазу накопления энергии в области пересоединения; вторая соответствует фазе распада токового слоя; их решение позволило исследовать магнитное поле в зоне пересоединения, включающей токовый слой и ударные МГД-волны (согласно современным физическим представлениям эта модель адекватно описывает процессы в активной части короны Солнца перед вспышкой);
- 6) применение полученных в пп. 1), 3) результатов к решению задачи со свободной границей, возникающей при моделировании магнитосферы нейтронной звезды под воздействием на нее ударной волны от сверхновой звезды (согласно современным физическим представлениям, это явление приводит к мощным всплескам космического гамма-излучения).

0.1.3º. Научная новизна работы заключается в следующем:

- 1) на основе классических подходов [45], [95] исследована разрешимость сингулярной задачи Римана — Гильберта в полуплоскости с кусочно-гёльдеровыми коэффициентами и условиями произвольного степенного ро-

ста искомой функции; получены новые представления для решения задачи через интегралы типа Коши;

2) для функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}$  с произвольным числом  $N$  переменных  $z_1, \dots, z_N$  построена система формул ее аналитического продолжения за границу единичного поликруга  $\mathbb{U}^N$  и найден полный набор решений системы уравнений с частными производными, которой удовлетворяет  $F_D^{(N)}$  (ранее были известны лишь некоторые результаты для  $N = 2$  и  $N = 3$ , подробно см. об этом главу II);

3) получена система дифференциальных соотношений типа Якоби для функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}$  с произвольным числом  $N$  переменных (результаты являются новыми);

4) с помощью результатов п. 3) получено принципиально новое представление в виде интеграла Кристоффеля — Шварца для решения сингулярной задачи Римана — Гильберта в полу平面ости с кусочно-постоянными данными, имеющими произвольное конечное число точек разрыва; такое представление дает геометрическую интерпретацию решения задачи как конформного отображения полу平面ости на многоугольник (не обязательно однолистный) и доставляет удобный аппарат для его анализа и вычисления;

5) дано приложение полученных результатов к моделированию эффекта магнитного пересоединения в плазме Солнечной короны: решены две сингулярные задачи Римана — Гильберта с кусочно-постоянными данными в сложных многоугольных областях, моделирующие магнитное поле в зоне пересоединения; первая задача соответствует фазе накопления энергии, а вторая — фазе распада токового слоя; выполнена численная реализация и проведено исследование решения обеих задач; представлены картины магнитного поля и найдены физически значимые характеристики поля (результаты являются новыми);

6) построено аналитическое решение задачи со свободной границей, возникающей при моделировании воздействия ударной волны от сверхновой звезды на магнитосферу нейтронной звезды; осуществлена численная реализация

решения и представлены численные результаты для формы магнитосферы и распределения магнитного поля внутри нее в зависимости от параметров модели (полученные результаты являются новыми).

0.1.4°. Используемые методы. Для достижения целей диссертации использовались классические и современные методы математической физики, в первую очередь, методы Ф.Д.Гахова и Н.И.Мусхелишвили теории краевых задач. Кроме того, использовалась теория аналитических и специальных функций математической физики, включая теорию интегралов типа Коши, интегралов Барнса, интеграла Кристоффеля — Шварца, интегральные представления Эйлера для гипергеометрических функций и теория конформного отображения сингулярно деформируемых областей. Для решения нелинейных систем трансцендентных уравнений использовался метод Ньютона.

0.1.5°. Достоверность полученных результатов подтверждается следующими положениями. В диссертации приведены полные доказательства полученных теоретических результатов, опирающиеся на методы и подходы, указанные в предыдущем пункте. Установленные теоремы о задаче Римана — Гильберта переходят в частном случае отсутствия разрывов данных задачи и ростов решения в классические результаты Ф.Д.Гахова и Н.И.Мусхелишвили. Построенные для функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}$  формулы аналитического продолжения и дифференциальные соотношения типа Якоби переходят в случае одного переменного (т.е. при  $N = 1$ ) в аналогичные известные формулы для функции Гаусса  $F(a, b, c; z)$ . Найденная структура магнитного поля в области пересоединения переходит в предельных случаях отсутствия ударных МГД-волн, присоединенных к токовому слою, в известные результаты Б.В.Сомова и С.И.Сыроватского.

0.1.6°. Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации расширяют круг краевых задач математической физики в сложных областях, для которых может быть построено решение в аналитической форме или предложен способ их эффективного аналитико-численного решения. Кроме

того, полученные результаты предоставляют новые конструктивные возможности в теории специальных функций математической физики и позволяют для задач из широкого круга приложений получать решения в явном виде. К указанным задачам относятся, в частности, ряд современных проблем астрофизики, терии плазмы и задач со свободной границей.

0.1.7<sup>о</sup>. Вклад соискателя. Основные результаты диссертации получены автором самостоятельно.

0.1.8<sup>о</sup>. Публикации. По теме диссертации опубликовано 18 статей [6]-[18], [118], [146]-[148], [228]. Из них 15 статей (см. [6]-[15], [18], [118], [146]-[148]) в изданиях, рекомендованных ВАК.

0.1.9<sup>о</sup>. Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на научных семинарах:

1. Семинар Отдела математической физики МИАН, Москва, МИАН, 2017 г. (руководители А.К.Гущин, Ю.Н.Дрожжинов, В.В.Жаринов);
2. Семинар "Асимптотические методы в математической физике", Москва, ИПМех, 2017 г. (руководитель С.Ю.Дорохотов);
3. Семинар по комплексному анализу (Семинар Гончара), Москва, МИАН, 2015 г. (руководители Е.М.Чирка, А.И.Аптекарев, С.П.Суэтин);
4. Семинар "Методы решения задач математической физики", Москва, ФИЦ ИУ РАН, 2015 г. (руководители А.А.Абрамов, В.И.Власов, С.Я.Степанов);
5. Семинар "Космическая электродинамика", Москва, ГАИШ МГУ, 2015 г. (руководитель Б.В.Сомов);
6. Семинар "Вычислительная математика, математическая физика, управление", Москва, ИВМ РАН, 2011 г. (руководители Г.М.Кобельков, А.В.Фурсиков);
7. Семинар "Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения", Москва, РУДН, 2009 г. (руководитель А.Л.Скубачевский);

и на научных конференциях:

1. Конференция по теории чисел и приложениям в честь 80-летия А.А.Карацубы. МИАН, Москва, 22–27 мая 2017 г.

2. XII съезд Международной организации "Астрономическое общество", научная конференция "Астрономия от ближнего космоса до космологических далей". ГАИШ МГУ, Москва, 25–30 мая 2015 г.
3. Десятая ежегодная конференция "Физика плазмы в Солнечной системе". Москва, ИКИ РАН, 16–20 февраля 2015 г.
4. The 7-th International Conference on Differential and Functional – Differential equations. Moscow, Russia, RUDN University, August 22–29, 2014.
5. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Сузdal', 4–9 июля 2014 г.
6. 40th Scientific Assembly, COSPAR (Committee on Space Research), Moscow, MSU, August 2–9, 2014.
7. Девятая ежегодная конференция "Физика плазмы в Солнечной системе", Москва, ИКИ РАН, 10–14 февраля 2014 г.
8. XI Конференция молодых ученых "Фундаментальные и прикладные космические исследования", Москва, ИКИ РАН, 9–11 апреля 2014 г.
9. Конференция "Физика плазмы в солнечной системе". Москва, ИКИ РАН, 4–8 февраля 2013 г.
10. International Conference "Spectral and Evolution Problems". Sevastopol. September 17–29, 2012.
11. International Conference–School for Young Scientists "Modern Problems of Applied Mathematics and Computer Science". Dubna, JINR, Russia, August 22–27, 2012.
12. International Conference "Differential Equations and Applications" in honour of M.Vishik 90-th birthday. Moscow, Russia, Information Transmission Problems Institute of RAS, June 4–7, 2012.
13. Конференции "Астрономия в эпоху информационного взрыва: результаты и проблемы". Москва, МГУ, 28 мая – 1 июня, 2012 г.
14. Конференция "Физика плазмы в солнечной системе". Москва, ИКИ РАН, 6–10 февраля 2012 г.
15. International Moscow Workshop on Solar Physics "The Sun: from quiet to active – 2011". Moscow, Russia, Lebedev Physical Institute, August 29 – September 2, 2011.

16. JENAM-2011 European Week of Astronomy and Space Science. Saint-Petersburg, Russia, 4–8 July 2011.
17. Конференция "Физика плазмы в солнечной системе". Москва, ИКИ РАН, 14–18 февраля 2011 г.
18. International conference "Differential equations and related topics" dedicated to I.G.Petrovskii. Moscow, MSU, May 30 – June 4, 2011.
19. Международная конференция по прикладной математике и информатике, посвященная 100–летию со дня рождения академика А.А.Дородницына. Москва, ВЦ РАН, 7–11 декабря 2010 г.
20. XXI Международная конференция "Spectral and Evolution Problems", 18–29 сентября 2010 г. Севастополь.
21. Конференция "Асимптотические методы и математическая физика", посвященная профессору С.Ю.Дорохотову. Москва, ИПМех РАН, 12–14 мая 2010 г.
22. International Conference on complex analysis and related topics. Turku, Finland, August 17–29, 2009.
23. XVII Всероссийская конференция "Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов и решение задач математической физики с применением к многопроцессорным системам", посвященная памяти К.И.Бабенко. Дюрсо, 16–20 сентября 2008 г.
24. Третья международная конференция "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология Проблемы математического образования", посвященная 85–летию Л.Д.Кудрявцева. Москва, РУДН, 25–28 марта 2008 г.
25. V Международная конференция "Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения". Москва, РУДН, 17–24 августа 2008 г.
26. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Сузdal', 27 июня – 2 июля 2008 г.
27. Международная конференция "Анализ и особенности", посвященная 70–летию В.И.Арнольда, Москва, МИАН, 20–24 августа 2007 г.
28. Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", посвященная 100–летию со дня рождения И.Н.Векуа. Новосибирск, 28 мая – 2 июня 2007 г.

29. Международная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященная памяти И.Г.Петровского, Москва, МГУ, 21–26 мая 2007 г.
30. Международная конференция "Математические идеи П.Л.Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания". Обнинск, 14–18 мая 2006 г.
31. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Сузdal', 10–15 июля 2006 г.
32. Международная конференция "Тихонов и современная математика". Москва, МГУ, 19–25 июня 2006 г.
33. International Conference "Computational Methods and Function Theory", Joensuu, Finland, June 13–17, 2005.

0.1.10°. Структура работы. Диссертация разбита на главы, параграфы, пункты и подпункты. Первая цифра номера пункта совпадает с номером параграфа, а вторая обозначает номер пункта в параграфе. В каждой главе принята своя (двойная) нумерация теорем, предложений и замечаний; при этом первая цифра указывает номер главы. Принята двойная нумерация формул: первая цифра означает номер параграфа, вторая — порядковый номер формулы в параграфе. При ссылке на формулу из другой главы к номеру формулы добавляется явная ссылка на соответствующую главу. При ссылке на подпункт к его номеру добавляется номер параграфа и пункта.

**0.2. Обзор содержания диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Доказательства некоторых утверждений и дополнительные сведения помещены в приложения А–Д. Объем работы (вместе с приложениями) составляет 300 страниц, включая 20 рисунков и одну таблицу. Список литературы содержит 249 наименований.

**Глава I** посвящена сингулярной задаче Римана — Гильберта в полуплоскости. Основные результаты главы: 1) исследована разрешимость сингулярной задачи Римана — Гильберта с кусочно-гёльдеровыми данными и условиями произвольного степенного роста решения в точках разрыва

границых данных; 2) получено представление решения такой задачи через интегралы типа Коши.

§1 главы I содержит вводный материал о задаче Римана — Гильберта в односвязной области и методах ее решения. Отмечено, что в работе используется подход, основанный на ее сведении с помощью конформного отображения к аналогичной задаче Римана — Гильберта в канонической области (полуплоскости), решение которой строится через интегралы типа Коши.

В связи с этим в §2 главы I указан ряд методов конформного отображения сложных областей, в том числе приведены сведения об отображении прямолинейных многоугольников при помощи интеграла Кристоффеля — Шварца и круговых многоугольников на основе уравнения Шварца, а также о приближенных методах конформного отображения, в том числе о методе Теодорсона — Гаррика и вариационных методах.

Следующий §3 главы I посвящен постановке указанной сингулярной задачи Римана — Гильберта и ее сведению к задаче сопряжения. В §4 указаны свойства модифицированного интеграла типа Коши, который затем в §5 и §6 главы I используется для построения решения задачи Римана — Гильберта. В §5 получена формула для индекса  $\varkappa$  рассматриваемой задачи и найдено общее решение однородной задачи.

В §6 главы I в терминах модифицированного интеграла типа Коши построено частное решение неоднородной задачи и выписано общее решение неоднородной сингулярной задачи Римана — Гильберта. Основные результаты параграфа 6 сформулированы в виде теоремы 1.5.

**Глава II** посвящена развитию теории функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}$ . Основные результаты главы: 1) найдены дифференциальные соотношения типа Якоби для  $F_D^{(N)}$ ; 2) получены формулы аналитического продолжения этой функции при произвольном числе  $N$  переменных за границу единичного поликруга  $\mathbb{U}^N$ , где она первоначально определена с помощью  $N$ -кратного гипергеометрического ряда; 3) найден полный набор решений системы уравнений с частными производными, которой удовлетворяет  $F_D^{(N)}$ . Эти решения

являются аналогом и прямым обобщением *канонических решений Куммера*, известных в теории гипергеометрического уравнения Гаусса.

Вначале, в §1 этой главы, приведены необходимые сведения о функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}$ , включая обобщенный гипергеометрический ряд для нее, интегральное представления типа Эйлера, некоторые разложения и формулы дифференцирования, а также систему уравнений с частными производными, которой она удовлетворяет.

В §2 главы II приведены используемые результаты из теории функции Гаусса  $F(a, b; c; z)$ , включая интегральные представления Эйлера и Барнса, канонические решения Куммера (в том числе их вариант для *логарифмического случая*) и основанные на них формулы аналитического продолжения.

§3 главы II посвящен выводу дифференциальных соотношений типа Якоби для функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}$ . Прежде всего, в п. 3.1 получены соотношения между *ассоциированными* функциями Лауричеллы; эти соотношения, представленные в виде теоремы 2.1, играют важную роль при доказательстве основного результата параграфа — соотношений типа Якоби для функции  $F_D^{(N)}$ , которым посвящена теорема 2.2, см. п. 3.2. Отметим также, что в данном параграфе в виде теоремы 2.3 указана (отличная от классической) система уравнений для функции Лауричеллы. Эта система уравнений является непосредственным следствием найденных формул типа Якоби.

Следующий §4 главы II посвящен выводу формул аналитического продолжения для функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}$ . В п. 4.1 построено аналитическое продолжение этой функции в окрестность точки

$$\mathbf{z}^{(\infty)} = (\infty, \dots, \infty),$$

т.е. в область, где все  $N$  ее переменных  $z_1, \dots, z_N$  принимают значения, по модулю большие единицы. Для этого в п. 4.1 (см. предложение 2.1) дано новое представление функции Лауричеллы в виде интеграла типа Барнса, удобное для осуществления аналитического продолжения указанного типа. Затем в предложении 2.2 с помощью предложения 2.1 осуществлено продолжение по

одному переменному (в окрестность бесконечности). Далее на основе предложения 2.2 получено требуемое аналитическое продолжение в окрестность точки  $\mathbf{z}^{(\infty)}$ , т.е. по всем переменным  $z_1, \dots, z_N$ . Соответствующие формулы продолжения представлены в теореме 2.5.

Далее в п. 4.2 построено аналитическое продолжение функции Лауричеллы в окрестность точки

$$\mathbf{z}^{(1)} = (1, \dots, 1),$$

т.е. в область, где все  $N$  ее переменных принимают значения, близкие к единице. Для этого в предложении 2.3 дано еще одно представление функции  $F_D^{(N)}$  в виде интеграла типа Барнса, удобное для осуществления аналитического продолжения в указанную область. С помощью этого представления в предложении 2.4 найдено продолжение по одному переменному (в окрестность единицы) и с его помощью осуществлено требуемое аналитическое продолжение в окрестность точки  $\mathbf{z}^{(1)}$ . Соответствующие формулы продолжения представлены в теореме 2.6.

Наконец, в п. 4.3 даны формулы аналитического продолжения в область, где некоторые  $p$  переменных функции Лауричеллы близки к единице, а остальные ( $N - p$ ) — к бесконечности. Результаты этого пункта, сформулированные в виде теоремы 2.7, получены с помощью формул продолжения, выведенных в пп. 4.1 и 4.2. Формулы аналитического продолжения выписаны в терминах обобщенных гипергеометрических рядов нового вида  $\mathcal{F}^{(N, p)}$ ,  $\mathcal{G}_j^{(N, p)}$  и  $\mathcal{H}_j^{(N, p)}$ , свойства сходимости которых отражены в предложении 2.5.

§5 главы II посвящен важному частному случаю функции Лауричеллы при  $N = 2$ , известному как функция Аппеля  $F_1(a, a'; b, c; z, \zeta)$ . В этом параграфе построены формулы аналитического продолжения  $F_1$  в весьма важной для приложений ситуации, когда параметры  $a, a', b$  и  $c$  подчинены специальным целочисленным соотношениям. Этот случай, называемый *логарифмическим* (аналитическое продолжение содержит не только степени, но и логарифмы переменных), требует отдельного рассмотрения, так как если применить к

этому случаю обычные формулы продолжения, допустимые для *нелогарифмического случая*, то тогда в них возникнут сингулярные слагаемые, что сделает невозможным их непосредственное использование. Построенные в этом разделе формулы аналитического продолжения сформулированы в виде предложений 2.8–2.11 и предложений 2.14–2.20. Данные формулы дают представления функции  $F_1$  через обобщения двойных гипергеометрических рядов на логарифмический случай: эти обобщения указаны в пп. 5.2.4<sup>0</sup> и 5.4.1<sup>0</sup>.

**Глава III** посвящена выводу принципиально нового представления решения задачи Римана — Гильберта с кусочно-постоянными данными в виде интеграла Кристоффеля Шварца.

§1 главы III носит вспомогательный характер. Основным результатом здесь является представление решения задачи Римана — Гильберта с кусочно-постоянными коэффициентами и условиями роста через модифицированные интегралы типа Коши; данный результат сформулирован в виде теоремы 3.1.

§2 главы III посвящен преобразованию полученного в §1 решения сингулярной задачи Римана — Гильберта к виду интеграла Кристоффеля — Шварца; такой интеграл представляет собой первообразную от произведения биномов и полинома с вещественными коэффициентами. Техническим средством, позволяющим осуществить указанное преобразование, являются дифференциальные соотношения типа Якоби, найденные в главе II. В п. 2.1 изложен подход к такому преобразованию, в п. 2.2 выписан необходимый для этого вариант соотношений типа Якоби, а сам вывод представления в виде интеграла Кристоффеля — Шварца осуществлен в пп. 2.4, 2.5. Это представление дано в виде теоремы 3.3.

**Глава IV** посвящена применению результатов, полученных в главах I–III, к задачам астрофизики. Решены три конкретные задачи, возникающие при моделировании эффекта магнитного пересоединения в Солнечной и космической плазме. Первые две являются задачами Римана — Гильберта в сложной области; они моделируют магнитное поле в окрестности токовых конфигураций, состоящих из токовых слоев типа Сыроватского и присоединенных к ним

ударных волн. Первая из этих задач соответствует фазе накопления энергии в активной области короны, а вторая — фазе распада токового слоя. Третья задача с математической точки зрения является задачей со свободной границей. Она моделирует магнитосферу нейтронной звезды при воздействии на нее ударной волны, образованной взрывом Сверхновой звезды.

В §1 главы IV изложены основные положения математических моделей трех указанных физических явлений. Токовые конфигурации для первой и второй задачи, состоящие из бесконечно тонкого токового слоя и присоединенных к нему ударных МГД-волн, изображены на рис. 4.3, стр. 191, и рис. 4.4b, стр. 192, в виде симметричных систем прямолинейных разрезов на комплексной плоскости. В первой задаче токовый слой (горизонтальный разрез) сплошной, а во второй задаче он состоит из двух несвязных частей (два горизонтальных разреза). Присоединенные к ним наклонные разрезы изображают ударные волны. Внешности систем разрезов на этих рисунках представляют собой области, в которых рассматривается магнитное поле и решаются две указанные краевые задачи Римана — Гильберта. Для первой модели (и соответственно первой задачи) область обозначается через  $\mathcal{X}$ , а для второй — через  $\mathcal{Y}$ .

В §2 главы IV описано сведение первых двух из изложенных в §1 моделей магнитного пересоединения в Солнечной короне, к задачам Римана — Гильберта с кусочно-постоянными данными и некоторыми условиями роста решения в областях  $\mathcal{X}$  и  $\mathcal{Y}$ . Первую из этих задач, рассматриваемую в области  $\mathcal{X}$ , обозначаем через  $\mathfrak{C}$ , а ее решение — через  $\mathcal{F}_{\text{con}}$ . Вторую задачу, рассматриваемую в области  $\mathcal{Y}$ , обозначаем через  $\mathfrak{D}$ , а ее решение — через  $\mathcal{F}_{\text{dis}}^1$ .

В пп. 2.2 и 2.3 даны соответственно постановки задач  $\mathfrak{C}$  и  $\mathfrak{D}$  и описано их сведение к аналогичным задачам в четверти исходной области, оказывающейся одинаковой для этих двух задач и обозначаемой через  $G$  (см. рис. 4.6a на стр. 198 и рис. 4.7a на стр. 199); нетрудно увидеть, что  $G$  представляет

<sup>1</sup>Здесь в обозначениях использованы первые буквы английских слов "continuous" и "discontinuous" для того чтобы подчеркнуть, что токовый слой в первой задаче непрерывный, а во второй разрывный.

собой прямолинейный пятиугольник. Для новых задач и их решений сохраним прежние обозначения. Предлагаемый подход к решению задач  $\mathfrak{C}$  и  $\mathfrak{D}$  в области  $G$  предполагает построение конформного отображения  $\zeta = \Phi(z)$  этой области на верхнюю полуплоскость  $\mathbb{H}^+$ , см. рис. 4.6 и рис. 4.7. После его построения функции  $\mathcal{F}_{\text{con}}$  и  $\mathcal{F}_{\text{dis}}$  находятся в виде суперпозиций  $\mathcal{F}_{\text{con}}(z) = \mathcal{P}_{\text{con}}^+ \circ \Phi(z)$  и  $\mathcal{F}_{\text{dis}}(z) = \mathcal{P}_{\text{dis}}^+ \circ \Phi(z)$  отображения  $\zeta = \Phi(z)$  и решений  $\mathcal{P}_{\text{con}}^+(\zeta)$  и  $\mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\zeta)$  соответствующих задач Римана — Гильберта в  $\mathbb{H}^+$ .

Построению отображения  $\zeta = \Phi(z)$  посвящен § 3 гл. IV. В нем вначале выписано представление в виде интеграла Кристоффеля — Шварца для обратного отображения  $z = \Phi^{-1}(\zeta)$  полуплоскости  $\mathbb{H}^+$  на пятиугольник  $G$ . Неизвестными параметрами этого интеграла служат  $\lambda$  и  $\tau$  — прообразы двух вершин (см. рис. 4.6 и рис. 4.7) и предынтегральный множитель  $\mathcal{K}$ . В п. 3.1, 3.2 сформирована система нелинейных уравнений для неизвестных параметров и указан способ ее решения, основанный на использовании результатов по функции Аппеля  $F_1$ , представленных в главе II, а также на использовании асимптотик величин  $\lambda$  и  $\tau$ , сформулированных в теореме 4.1.

В п. 3.3 изложен метод построения отображения  $\Phi(z)$  путем обращения интеграла Кристоффеля — Шварца, позволяющий получить искомое отображение в виде набора экспоненциально сходящихся степенных разложений с явно выписанными коэффициентами; объединение множеств сходимости разложений, изображенных на рис. 4.10, стр. 216, покрывает всю (замкнутую) область  $G$ . Метод основан на теории [37]. После завершения построения конформного отображения  $\Phi(z)$  области  $G$  на полуплоскость  $\mathbb{H}^+$  мы переходим к решению задач Римана — Гильберта  $\mathfrak{C}$  и  $\mathfrak{D}$  в полуплоскости.

§4 главы IV посвящен решению задачи  $\mathfrak{C}$  в полуплоскости  $\mathbb{H}^+$ . В п. 4.1 дана постановка этой задачи. Ее решение в п. 4.2 построено в виде интеграла типа Коши, преобразованного затем к виду интеграла Кристоффеля — Шварца, а в п. 4.3 дан эффективный способ его вычисления в виде экспоненциально сходящихся степенных рядов. Пункт 4.4 посвящен геометрической интерпретации решения  $\mathcal{P}_{\text{con}}^+$  задачи Римана — Гильберта  $\mathfrak{C}$ . Показано, что область  $\mathcal{W}_{\text{con}}$ , являющаяся образом полуплоскости при отображении  $\mathcal{P}_{\text{con}}$  и называе-

мая областью годографа магнитного поля, представляет собой бесконечный четырехугольник. Исследован вид  $W_{\text{con}}$  в зависимости от параметров модели.

§5 главы IV посвящен решению задачи  $\mathfrak{D}$  в верхней полуплоскости. В п. 5.1 дана постановка этой задачи. Ее решение в п. 5.2 построено в виде интеграла типа Коши, а затем преобразовано к виду интеграла Кристоффеля — Шварца. В пункте 5.3 дана геометрическая интерпретация решения задачи  $\mathfrak{D}$  как конформного отображения на область годографа  $W_{\text{dis}}$ , представляющую собой бесконечный восьмиугольник.

§6 главы IV посвящен численной реализации для задач  $\mathfrak{C}$  и  $\mathfrak{D}$ . В этом параграфе представлены картины магнитного поля, а также исследован имеющий физический смысл характер его преломления на ударных волнах. Отмечена эффективность метода решения рассматриваемых задач Римана — Гильберта в многоугольных областях, позволившего получить решения задач  $\mathfrak{C}$  и  $\mathfrak{D}$  с точностью не хуже  $10^{-6}$  в равномерной норме.

§7 главы IV посвящен решению задачи со свободной границей, моделирующей форму магнитосферы нейтронной звезды и ее магнитное поле при воздействии на нее ударной волны от взрыва Сверхновой звезды. В пункте 7.1 сформулирована постановка задачи со свободной границей для аналитической функции  $\mathcal{F}$ , представляющей собой сопряженный комплексный потенциал магнитного поля и определенной в области  $\mathcal{M}$ , изображающей магнитосферу; эта область заранее неизвестна и подлежит нахождению. Искомая аналитическая функция  $\mathcal{F}$  имеет простой полюс внутри  $\mathcal{M}$ , соответствующий магнитному диполю, моделирующему собственное поле нейтронной звезды, см. рис. 4.5а, стр. 194. Искомой дугой границы области  $\mathcal{M}$  является физическая граница магнитосферы, сформированная в результате равновесия внешнего газового давления набегающего потока плазмы и магнитного давления поля нейтронной звезды. Заданная часть границы области  $\mathcal{M}$  соответствует токовому слою, изображеному в виде горизонтального разреза на рис. 4.5а.

В пункте 7.2 изложен способ решения поставленной задачи со свободной границей, основанный на решении двух задач Римана — Гильберта в заданной области — полуплоскости  $\mathbb{H}^+$ . В первой из этих двух задач искомой явля-

ется функция  $\mathcal{P}^+$ , которую естественно называть *потенциалом магнитного поля в полуплоскости*, а во второй — функция  $\Psi$ , представляющая собой логарифм производной конформного отображения  $\Phi$  полуплоскости на область  $\mathcal{M}$ . Потенциал  $\mathcal{P}^+$  входит в краевое условие задачи для  $\Psi$ . После нахождения  $\mathcal{P}^+$  и  $\Psi$  область  $\mathcal{M}$  (включая заранее неизвестную часть границы) восстанавливается как конформный образ полуплоскости при отображении  $\Phi$ , а магнитное поле в  $\mathcal{M}$  вычисляется с помощью очевидной подстановки  $\mathcal{F} = \mathcal{P}^+ \circ \Phi^{-1}$ . Потенциал  $\mathcal{P}^+$  найден в п. 7.2.

Конформное отображение построено в виде интеграла типа Кристоффеля — Шварца в пп. 7.3, 7.4. В пункте 7.4 этот интеграл вычислен в виде конечной комбинации элементарных функций. Численные результаты для решения всей задачи со свободной границей представлены в пункте 7.5.

### 0.3. Основные обозначения и некоторые определения.

0.3.1°. Числа. Буквами  $z, \zeta$  и  $w$  обозначаются комплексные переменные;  $z = x + iy, \zeta = \xi + i\eta, w = u + iv$ , где  $i$  — мнимая единица. вещественная и мнимая части числа  $a$  обозначаются, как обычно, через  $\operatorname{Re} a$  и  $\operatorname{Im} a$ ;  $\bar{a}$  — число, комплексно сопряженное с  $a$ . Буквами  $\mathbf{z}, \mathbf{w}$  и др. обозначаем  $N$ -мерные векторы комплексных чисел, например,  $\mathbf{z} := (z_1, \dots, z_N)$ ; если размерность отличается от  $N$ , то на этот факт указываем явно.

0.3.2°. Множества. Если  $\mathcal{B}$  — плоская область, то  $\partial\mathcal{B}$  — ее граница, а  $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \cup \partial\mathcal{B}$  — ее замыкание; если  $\mathcal{B}$  расположена на комплексной плоскости  $z$ , то точки ее границы  $\partial\mathcal{B}$  обозначаем через  $z'$ .

$\mathbb{R}$  — множество вещественных чисел;

$\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}^+$  и  $\mathbb{Z}^-$  — множества неотрицательных и неположительных целых чисел;

$\mathbb{C}$  — комплексная плоскость;

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  — расширенная комплексная плоскость;

$\mathbb{C}^N$  —  $N$ -мерное комплексное пространство;

$\overline{\mathbb{C}}^N = \mathbb{C}^N \cup \{\infty, \dots, \infty\}$  — расширенное  $N$ -мерное комплексное пространство;

$\mathbb{H}^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$  — верхняя полуплоскость;

$\mathbb{U} = \{z : |z| < 1\}$  — единичный круг;

$\mathbb{U}^N = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |z_j| < 1, j = \overline{1, N}\}$  — единичный поликруг.

0.3.3<sup>o</sup>. **Функции.** Запись  $f : \mathcal{B} \xrightarrow{\text{conf}} \mathcal{D}$  означает, что функция  $f$  осуществляет конформное отображение области  $\mathcal{B}$  на область  $G$ ;  $\varphi \circ f$  — суперпозиция функций  $f$  и  $\varphi$ ;  $\varphi^{-1}$  — функция, обратная к  $\varphi$ . Если функция  $f(z)$  аналитична в области  $\mathcal{B}$ , то будем писать  $f \in \mathcal{A}(\mathcal{B})$ . Выражение  $a := b$  означает, что  $a$  по определению равно  $b$ .

0.3.4<sup>o</sup>. **Асимптотические символы.** Напомним определения (см., например, [61]) асимптотических символов  $\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{O}^*$  и  $o$ . Пусть функции  $f(\zeta)$  и  $g(\zeta)$  определены на некотором множестве  $\mathcal{M}$  изменения переменной  $\zeta$ , а  $\xi$  — его предельная точка. Запись  $f(\zeta) = \mathcal{O}(g(\zeta))$ ,  $\zeta \rightarrow \xi$ , означает существование такой постоянной  $C$  и окрестности  $U$  точки  $\xi$ , что  $|f(\zeta)| < C|g(\zeta)|$  при всех  $\zeta \in \mathcal{M} \cap U$ . Запись  $f(\zeta) = \mathcal{O}^*(g(\zeta))$ ,  $\zeta \rightarrow \xi$ , означает существование отличного от нуля предела  $\lim_{\zeta \rightarrow \xi, \zeta \in \mathcal{M}} [f(\zeta) / g(\zeta)] = C \neq 0$ , а запись  $f(\zeta) = o(g(\zeta))$ ,  $\zeta \rightarrow \xi$ , — что этот предел равен нулю.

0.3.5<sup>o</sup>. **Замечание о виде краевого условия Римана — Гильберта.** Очевидно, что условие (0.1) задачи Римана — Гильберта можно переписать в виде  $\operatorname{Re} [h(z') \mathcal{F}(z')] = c(z')$ , где  $h(z') := a(z') + ib(z')$ . В дальнейшем краевое условие этой задачи будем записывать в этой форме, называя функции  $h(z')$  и  $c(z')$  коэффициентом и правой частью задачи, а их вместе — данными задачи.

## Г л а в а I

# Сингулярная задача Римана — Гильберта

## §1. Задача Римана — Гильберта в односвязной области

**1.1. Постановка задачи и метод ее решения.** Задача Римана — Гильберта заключается в построении аналитической в некоторой области функции по заданному на границе соотношению между ее вещественной и мнимой частями. Впервые эта задача в весьма общем виде была поставлена Риманом [220], а для случая, когда указанное соотношение является линейным, (а область односвязная) изучалась в работах Гильберта [177], [178] и ряда других исследователей, см. [44], [45], [93], [95], [111], [202], [209], [214], [242], [247] и др. Рассмотренная в этих работах классическая постановка данной задачи формулируется следующим образом.

В односвязной области  $\mathcal{B}$ , ограниченной контуром  $\Gamma$ , требуется найти аналитическую в  $\mathcal{B}$  и непрерывную в  $\overline{\mathcal{B}}$  функцию  $\mathcal{F}(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , удовлетворяющую на контуре  $\Gamma$  краевому условию

$$\operatorname{Re} [h(z') \mathcal{F}(z')] = c(z'), \quad z' \in \Gamma, \quad (1.1)$$

где  $h(z') \neq 0$  и  $c(z')$  — соответственно комплексная и вещественная функции, заданные на  $\Gamma$  и непрерывные по Гёльдеру.

Для решения задачи Римана — Гильберта (1.1) в случае, когда она рассматривается в верхней полуплоскости

$$\mathbb{H}^+ := \{\xi + i\eta = \zeta: \operatorname{Im} \zeta > 0\},$$

будем использовать обозначение  $\mathcal{P}^+(\zeta)$ . С помощью подхода, предложенного Гаховым [45] и Мусхелишвили [95], эта задача сводится к задаче сопряжения функций  $\mathcal{P}^+(\zeta)$  и  $\mathcal{P}^-(\zeta)$ , вторая из которых аналитична в нижней полуплоскости  $\mathbb{H}^- := \{\zeta : \operatorname{Im} \zeta < 0\}$ . Решение последней задачи выписывается явно через интегралы типа Коши [45], [95]. Если же задача Римана — Гильберта рассматривается в области  $\mathcal{B}$ , отличной от канонической, то свести ее непосредственно к задаче сопряжения не представляется возможным. Отметим, что везде в работе в качестве канонической области принимается верхняя полуплоскость. Однако в качестве таковой можно выбрать также круг  $\mathbb{U}$  или его внешность  $\mathbb{D}$ . В этом случае функцию  $\mathcal{P}^-(\zeta)$  следует определять в дополнении соответствующей канонической области до полной плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Известен способ решения задачи Римана — Гильберта (1.1) в неканонической области  $\mathcal{B}$  путем приведения ее к сингулярному интегральному уравнению на границе  $\partial\mathcal{B}$  области [45], [90], [95]. Но в случае, когда эта граница имеет сложную структуру (например, не является жордановой) и при необходимости конструктивного и алгоритмически эффективного решения задачи, такой способ наталкивается на значительные теоретические и вычислительные трудности.

Решение задачи Римана — Гильберта в неканонической области  $\mathcal{B}$  может также быть выписано в терминах оператора Шварца  $\mathfrak{S}_{\mathcal{B}}$  для этой области [45], т.е. оператора  $\mathfrak{S}_{\mathcal{B}}$ , который восстанавливает аналитическую в  $\mathcal{B}$  функцию по заданным на  $\partial\mathcal{B}$  значениям ее вещественной части. Нахождение ядра такого оператора эквивалентно построению конформного отображения области  $\mathcal{B}$  на каноническую, например, на полуплоскость  $\mathbb{H}^+$ .

Если же такое отображение  $\Phi : \mathcal{B} \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{H}^+$  известно, то более удобным оказывается другой способ решения задачи Римана — Гильберта относительно аналитической в сложной области  $\mathcal{B}$  функции  $\mathfrak{F}(z)$ . Он заключается в преобразовании исходной задачи в  $\mathcal{B}$  с помощью обратного отображения  $z = \Phi^{-1}(\zeta)$  к аналогичной задаче  $\operatorname{Re}[\chi(\xi)\mathcal{P}^+(\xi)] = \sigma(\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ , в полуплос-

кости  $\mathbb{H}^+$  относительно аналитической в ней функции  $\mathcal{P}^+(\zeta) := \mathcal{F} \circ \Phi^{-1}(\zeta)$ , где коэффициент  $\chi(\xi)$  и правая часть  $\sigma(\xi)$  связаны с исходными данными  $h$  и  $c$  задачи (1.1) в  $\mathcal{B}$  формулами

$$\chi(\xi) = h \circ \Phi^{-1}(\xi), \quad \sigma(\xi) = c \circ \Phi^{-1}(\xi).$$

Решение задачи в  $\mathbb{H}^+$  согласно сказанному выше строится явно. После этого решение исходной задачи находится в виде суперпозиции  $\mathcal{F}(z) = \mathcal{P}^+ \circ \Phi(z)$ .

Именно такой подход и предлагается использовать в настоящей работе для решения сингулярной задачи Римана — Гильберта в сложных областях; отметим, что от классической она отличается наличием разрывов у данных задачи и условием роста решения в точках разрыва. При таком подходе необходимо использовать конструктивные методы построения отображения  $\Phi : \mathcal{B} \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{H}^+$ .

Ряд методов построения отображения  $\Phi(z)$  или обратного к нему  $\Phi^{-1}(\zeta)$ , обозначаемого ниже через  $\mu(\zeta)$ , для некоторых классов односвязных областей  $\mathcal{B}$  сложного вида изложены в п. 1.3.

Метод решения сингулярной задачи Римана — Гильберта в  $\mathbb{H}^+$ , заключающейся (напомним) в отыскании аналитической в  $\mathbb{H}^+$  функции  $\mathcal{P}^+$  по граничному условию

$$\operatorname{Re}[\chi(\xi)\mathcal{P}^+(\xi)] = \sigma(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

изложен в §3 – §6 для случая кусочно-гёльдеровых данных  $\chi(\xi)$  и  $\sigma(\xi)$  с разрывами первого рода и предписанным в точках разрыва ростом решения, в том числе неинтегрируемым. В этом методе искомая функция  $\mathcal{P}^+$  представляется через модифицированные интегралы типа Коши.

Для случая кусочно-постоянных данных  $\chi$  и  $\sigma$  задачи (1.2) в главе III получено принципиально новое представление искомой функции  $\mathcal{P}^+$  в виде интеграла типа Кристоффеля — Шварца. Такое представление решает поставленную еще Риманом [220] проблему геометрической интерпретации

решения задачи Римана — Гильберта. Оно не только обладает геометрической наглядностью, но и является намного более удобным, чем представление через интегралы типа Коши, для численной реализации и, в частности, позволяет эффективно находить производные решения на границе, а также коэффициенты его разложения вблизи точек разрыва данных  $\chi$  и  $\sigma$ .

Сформулированный подход и полученное принципиально новое представление решения были использованы автором для эффективного решения нескольких вариантов сингулярной задачи Римана — Гильберта, возникающей в физике плазмы, см. главу IV.

**1.2. Приложения к астрофизике.** Обзор некоторых приложений задачи Римана — Гильберта был приведен во Введении. Отметим еще, что эта задача возникает в ряде важных проблем физики плазмы, причем во многих интересных с физической точки зрения случаях она является сингулярной. В частности, именно к сингулярной задаче Римана — Гильберта приводит предложенная Б.В.Сомовым [87], [227] модель эффекта магнитного пересоединения, играющего ключевую роль в формировании Солнечных вспышек и в ряде других ярких явлений физики плазмы [2], [67], [101], [116], [226], [227],

Модель Б.В.Сомова, являющаяся развитием модели токового слоя Сыроватского [124], включает присоединенные к концам такого нейтрального токового слоя четыре магнитогидродинамические (МГД) ударные волны. Данная модель сводится к задаче Римана — Гильберта в бесконечной десятиугольной области сложного вида, причем задача содержит условие роста искомой функции на бесконечности, т.е. является сингулярной [87], [227].

В работе [18], отраженной в главе IV диссертации, получено полное решение этой задачи и осуществлена его численная реализация. Решение  $\mathcal{F}(z)$  данной задачи найдено в виде суперпозиции  $\mathcal{F}(z) = \mathcal{P}^+ \circ \Phi(z)$  конформного отображения  $\Phi(z)$  исходной области на полуплоскость  $\mathbb{H}^+$ , представленного в виде обращенного интеграла Кристоффеля — Шварца, и явного решения

$\mathcal{P}^+(\zeta)$  соответствующей задачи Римана — Гильберта в  $\mathbb{H}^+$ , найденного также в виде интеграла Кристоффеля — Шварца. При этом для рассматриваемого случая эффективно решена проблема параметров интеграла Кристоффеля — Шварца  $\Phi^{-1}(\zeta)$  и построено обращение  $\Phi(z)$  этого интеграла в явном аналитическом виде. Физической интерпретации построенного решения посвящены статьи [15], [118].

В статьях [13], [14], [148], результаты которых нашли отражение в главе IV диссертации, предложены две модели, являющиеся развитием работ Сыроватского и Сомова [119], [124]. Предложенные модели включают распадающийся токовый слой типа Сыроватского конечной длины. Одна из моделей содержит присоединенные к концам токового слоя ударные МГД-волны, во второй ударные волны отсутствуют. Первая модель сводится к решению сингулярной задачи Римана — Гильберта в сложной многоугольной области. Для ее решения были применены результаты и подходы, предложенные в работах [11], [16]-[18] для общей сингулярной задачи Римана — Гильберта в сложных областях. Решение задачи для второй модели найдено в явном виде.

В работах [12], [147] дано приложение разрабатываемых методов [11], [16]-[18] к задаче со свободной границей, возникающей при моделировании взаимодействия ударной волны от взрыва сверхновой звезды с магнитным полем нейтронной звезды. Такая задача сведена к последовательному решению двух сингулярных задач Римана — Гильберта. Эти результаты также нашли отражение в главе IV диссертации.

## §2. Методы конформного отображения односвязных областей

Среди многочисленных методов конформного отображения можно условно выделить две группы: аналитические и приближенные. Ниже, в пп. 2.1 и 2.2, даны краткие эскизы двух аналитических методов, а в п. 2.3 — ряда приближенных методов.

**2.1. Интеграл Кристоффеля — Шварца.** Наиболее известным аналитическим методом конформного отображения односвязных областей  $\mathcal{B}$  является метод, основанный на интеграле Кристоффеля — Шварца (см. [55], [58], [72], [78], [82], [88], [109], [173], [176]), который для случая отображения  $\mu : \mathbb{H}^+ \xrightarrow{\text{conf}} \mathcal{B}$  полуплоскости на  $N$ -угольную область  $\mathcal{B}$  с (измеряемыми по области) углами  $\pi\beta_k$  при вершинах  $z_k$  имеет вид

$$z = \mu(\zeta) = \mathcal{K}_0 \int^{\zeta} \prod_{k=1}^N (t - \zeta_k)^{\beta_k - 1} dt + \mathcal{K}_1, \quad (2.1)$$

где  $\mathcal{K}_0$  и  $\mathcal{K}_1$  — постоянные, а  $\zeta_k := \mu^{-1}(z_k)$  — прообразы вершин  $N$ -угольника  $\mathcal{B}$ . Главной трудностью в этом методе является нахождение прообразов  $\zeta_k$  (см. об этом, например, [164], [176], [193], [200], [234], [236], [249]), вернее,  $(N-3)$ -х из них, ибо три прообраза могут в соответствии с теоремой Римана [55] быть произвольно заданы на вещественной оси  $\mathbb{R} = \partial\mathbb{H}^+$  (с соблюдением порядка обхода). Особенно сложной эта проблема становится в ситуации кроудинга, т.е. резко неравномерного расположения прообразов. Слово кроудинг (от английского "crowding") означает "скучивание", "давка", "толкотня"; в рассматриваемом случае отображения полуплоскости скучивание на  $\mathbb{R}$  понимается в метрике римановой сферы [58], [78], [176]. Следует отметить, что при использовании интеграла Кристоффеля — Шварца в приложениях — именно случай кроудинга чаще всего и возникает. Методы решения проблемы параметров указанного интеграла (к которым причисляются, кроме прообразов, также еще и неизвестные константы  $\mathcal{K}_0$  и  $\mathcal{K}_1$ ) указаны в [32], [72], [78], [173], [176]. Эффективные методы решения проблемы кроудинга предложены в [16], [18], [25], [97], [234], [235], [237].

**2.2. Отображение круговых многоугольников.** Известен предложенный Г.А.Шварцем [221] (см. также [19], [52], [55], [58], [68], [78]) аналитический метод конформного отображения односвязных круговых  $N$ -угольников, т.е. областей  $\mathcal{B}$ , граница которых состоит из дуг окружностей; точки их соединения (вершины кругового многоугольника) и соответствующие углы будем,

как и выше, обозначать через  $z_k$  и  $\pi\beta_k$ , а прообразы вершин — через  $\zeta_k$ . Согласно этому методу конформное отображение  $\mu : \mathbb{H}^+ \xrightarrow{\text{conf}} \mathcal{B}$  удовлетворяет уравнению

$$\{\mu, \zeta\} = R(\zeta), \quad (2.2)$$

в котором  $\{\varphi, \zeta\}$  — производная Шварца, определяемая равенством

$$\{\mu, \zeta\} := \left[ \frac{\mu''(\zeta)}{\mu'(\zeta)} \right]' - \frac{1}{2} \left[ \frac{\mu''(\zeta)}{\mu'(\zeta)} \right]^2, \quad (2.3)$$

а  $R(\zeta)$  — рациональная функция, имеющая при нормировке  $\mu(\infty) = z_N$  вид

$$R(\zeta) := \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1 - \beta_n^2}{2(\zeta - \zeta_n)^2} + \frac{1}{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_{N-1})} \left( \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n^2 - 1}{2} \Theta_{N,n} + \sum_{m=2}^{N-2} \frac{\gamma_m}{\zeta - \zeta_m} \right).$$

Здесь  $\Theta_{N,n} := (-1)^{\delta_{N,n}}$ , где  $\delta_{N,n}$  — символ Кронекера, а  $\gamma_m$  — вещественные числа, называемые акцессорными постоянными. Если задать еще два прообраза вершин (например, положив  $\zeta_1 = 0$ ,  $\zeta_2 = 1$ ), то с учетом принятого выше условия  $\zeta_N = \infty$  это полностью определит отображение  $\mu(\zeta)$ . И тогда уравнение Шварца (2.2) для однозначно определенной функции  $\mu(\zeta)$  будет содержать  $(N-3)$  неизвестных прообразов и  $(N-3)$  неизвестных акцессорных параметров  $\gamma_m$ . Таким образом, при построении отображения  $\mu : \mathbb{H}^+ \xrightarrow{\text{conf}} \mathcal{B}$  на основе решения уравнения Шварца (2.2) возникает проблема отыскания  $(2N-6)$  неизвестных параметров. Решение этой проблемы с помощью аналитических средств представляется весьма затруднительным [31], [68], [108], [128], как и решение в аналитическом виде самого уравнения (2.2).

Последняя задача может быть несколько упрощена с помощью описываемого ниже приема, изложенного в работах [52], [55], [58] и сводящего решение нелинейного уравнения (2.2) третьего порядка к решению следующего линейного уравнения класса Фукса [1], [52], [109], [171] второго порядка:

$$\Xi''(\zeta) + \frac{1}{2} R(\zeta) \Xi(\zeta) = 0. \quad (2.4)$$

Поскольку вронскиан  $\Xi'_1 \Xi_2 - \Xi_1 \Xi'_2$ , образованный двумя линейно независимыми решениями  $\Xi_1$  и  $\Xi_2$  уравнения (2.4), как известно, равен отличной

от нуля постоянной (которую без ограничения общности можно положить равной единице), то, обозначив через  $\mu(\zeta)$  их отношение

$$\mu(\zeta) = \Xi_1(\zeta)/\Xi_2(\zeta) \quad (2.5)$$

и дифференцируя его, находим  $\mu'(\zeta) = \Xi_2^{-2}(\zeta)$ . Представляя производную Шварца с помощью известного тождества [52], [55], [58], [78],

$$\{\mu, \zeta\} = -2\sqrt{\mu'(\zeta)} \frac{d^2}{d\zeta^2} \left[ \frac{1}{\sqrt{\mu'(\zeta)}} \right],$$

подставляя в его правую часть  $\mu'(\zeta) = \Xi_2^{-2}(\zeta)$  и используя вид уравнения (2.4), получаем, что функция  $\mu(\zeta)$ , определенная как отношение (2.5) двух линейно независимых решений уравнения класса Фукса (2.4), является решением уравнения Шварца (2.2), что и требовалось установить.

Необходимо заметить, что решение редуцированного уравнения (2.4), хотя и значительно более простого, чем исходное уравнение Шварца (2.2), также представляет собой трудную задачу, поскольку теория уравнений класса Фукса второго порядка, к которому относится уравнение (2.4), далека от завершения; некоторые относящиеся к этой проблеме результаты даны в работах [31], [37], [68], [108] и в приведенной в них библиографии. Развернутая теория обсуждаемого класса уравнений создана лишь для случая трех особых точек  $\zeta_n$ , когда оно имеет специальное название "уравнение Римана" [220]. Эта теория изложена, например, в монографиях [1], [19], [79], [215], где в частности показано, что уравнение Римана сводится к гипергеометрическому уравнению Гаусса, а соответствующая этому случаю область  $\mathcal{B}$  представляет собой круговой треугольник. О конформном отображении круговых треугольников см. [19], [37], [52], [58], [78]. Разработка теории уравнений класса Фукса с числом особых точек, большем трех, и тесно связанный с этим вопрос о построении в аналитическом виде конформного отображения круговых  $N$ -угольников при  $N > 3$  являются весьма трудной и, вместе с тем, остро актуальной современной проблемой; см. об этом, например, [31], [39], [68] и приведенную там библиографию.

**2.3. Приближенные методы конформного отображения.** Для построения конформного отображения односвязных областей  $\mathcal{B}$  сложного вида известно большое число приближенных методов, существенно опирающихся на численные процедуры [16], [38], [55], [56], [72], [78], [109], [136], [158], [170], [173], [174], [176], [188], [200], [205], [231], [232].

Один из них [176], [231] основан на построении отображения  $\zeta = \Phi(z)$  жордановой области  $\mathcal{B} \ni z_*$  на круг  $\mathbb{U} := \{|\zeta| = 1\}$  с использованием задачи Дирихле в  $\mathcal{B}$ :

$$\Delta U(z) = 0, \quad z \in \mathcal{B}, \quad U(z') = -\ln |z' - z_*|, \quad z' \in \partial\mathcal{B},$$

после решения которой и комплексификации  $\mathcal{F}(z) = U(z) + iV(z)$ ,  $V(z_*) = 0$ , искомое отображение находится по формуле

$$\Phi(z) = (z - z_*) \exp [\mathcal{F}(z)].$$

Ряд приближенных методов [38], [55], [56], [72], [109], [136], [176], базируется на вариационных принципах, в частности на принципах Бибербаха [151] и Жюлиа [188], [190]. Первый из них гласит: пусть  $\mathcal{B}$  — область Каратеодори [88], [156]; тогда среди всех функций  $\tilde{\Phi}(z)$ , регулярных в области  $\mathcal{B} \ni \{z_*\}$  и подчиненных нормировке

$$\tilde{\Phi}(z_*) = 0, \quad \tilde{\Phi}'(z_*) = 1, \quad (2.6)$$

наименьшую площадь отображенной области  $\tilde{\Phi}(\mathcal{B})$  дает функция  $\Phi$ , отображающая  $\mathcal{B}$  на круг  $\mathbb{U}_R := \{|\zeta| = R\}$  некоторого радиуса  $R > 0$ . А принцип Жюлиа утверждает: пусть  $\mathcal{B}$  — односвязная область, содержащая точку  $z = z_*$  и ограниченная спрямляемым контуром  $\Gamma$ ; тогда среди всех регулярных внутри  $\mathcal{B}$  функций  $\tilde{\Phi}(z)$ , непрерывных в  $\overline{\mathcal{B}}$ , абсолютно непрерывных на  $\Gamma$  и удовлетворяющих условиям (2.6), функция  $\Phi : \mathcal{B} \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{U}_R$  дает наименьшую длину границы образа  $\tilde{\Phi}(\Gamma)$ . Для минимизации соответствующих функционалов чаще всего в качестве аппроксимирующей системы функций используют систему полиномов, которую в ряде случаев предварительно ортонормируют.

Известен ряд методов, сводящих задачу о построении конформного отображения к решению интегрального уравнения [78], [174], [176], [205], [232]. В качестве иллюстрации такого подхода изложим метод, предложенный Теодорсеном и Гарриком [232].

Пусть граница области  $\mathcal{B}$  на плоскости  $z = \rho e^{i\theta}$  звездна относительно  $z = 0$ , т.е.  $\partial\mathcal{B}$  представима уравнением  $\rho = \rho(\theta)$ , и требуется построить конформное отображение  $\varphi : \mathbb{U} \xrightarrow{\text{conf}} \mathcal{B}$  круга на эту область с условиями нормировки  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(0) > 0$ . Считая зависимость  $\rho(\theta)$  заданной, выведем интегральное уравнение относительно функции  $\theta(t)$ , где  $t = \arg \zeta'$  — аргумент граничной точки  $\zeta' \in \partial\mathbb{U}$ . Заметим, что функция

$$\Lambda(\zeta) = \ln \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}$$

аналитична в  $\mathbb{U}$ , а на окружности  $\partial\mathbb{U}$  ее вещественная и мнимая части

$$\operatorname{Re} \Lambda(e^{it}) = \ln \rho[\theta(t)], \quad \operatorname{Im} \Lambda(e^{it}) = \theta(t) - t, \quad (2.7)$$

рассматриваемые как функции параметра  $t$ , связаны преобразованием Гильберта [45], [95], [109], [177]. Отсюда получаем следующее нелинейное сингулярное интегральное уравнение относительно  $\theta(t)$ :

$$\theta(t) - t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left\{ \rho[\theta(\tau)] \right\} \operatorname{ctg} \frac{t - \tau}{2} d\tau.$$

После решения этого уравнения и подстановки найденной функции  $\theta(t)$  в (2.7) функция  $\Lambda(\zeta)$  восстанавливается с помощью формулы Шварца по значениям вещественной части  $\operatorname{Re} \Lambda$  на  $\partial\mathbb{U}$ , а искомое конформное отображение затем определяется через  $\Lambda(\zeta)$  по формуле  $\varphi(\zeta) = \zeta \exp [\Lambda(\zeta)]$ .

Отметим еще группу аналитико-численных методов [16], [38], [40], ориентированных на построение конформного отображения  $\Phi : g \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{H}^+$  односвязных областей  $g$  сложной формы. Предполагается, что граница области  $g$  состоит из двух звеньев  $\gamma$  и  $\Gamma$ , где дуга  $\Gamma$  кусочно-гладкая, а для области  $g$  можно указать такое ее расширение  $G$  через дугу  $\Gamma$ , что отображение  $F : G \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{H}^+$  может быть эффективно построено. При этом область  $g$  не

обязательно должна быть конечной или жордановой, или даже однолистной, а дуга  $\gamma$  может быть достаточно произвольной, в том числе содержать бесконечно удаленные точки. Обсуждаемые методы [16], [38], [40] обладают экспоненциальной скоростью сходимости внутри  $g \cup \text{int}\gamma$ , где  $\text{int}\gamma$  — дуга  $\gamma$  без концевых точек, и допускают дифференцирование произвольное число раз в  $g$  и в точках  $\text{int}\gamma$  соответствующей гладкости. Они представляют собой сочетание метода мультиполей [35], [37], [40] соответственно с методом Симма [176], [231], принципом Жюлиа [188], [190] и теорией конформного отображения сингулярно деформируемых областей [36], [37], [40].

Остановимся на кратком описании первого из них [16]. Пусть выполняются указанные выше предположения относительно областей  $g$  и  $G$ . Обозначим через  $A_1$  и  $A_2$  точки соединения дуг  $\gamma$  и  $\Gamma$ , а через  $N$  — некоторую точку из  $\text{int}\gamma$ . В описываемом методе вначале строится отображение  $f : g \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{U}^+$ , где  $\mathbb{U}^+ := \mathbb{H}^+ \cap \{|w| < 1\}$  — полукруг, удовлетворяющее условиям  $f(A_1) = -1$ ,  $f(N) = 0$ ,  $f(A_2) = 1$ . Выбрав некоторую точку  $M \in \partial G \setminus \gamma$ , подчиним функцию  $F : G \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{H}^+$  условиям:  $F(N) = 0$ ,  $F(M) = \infty$ .

На дуге  $\Gamma$  введем функцию  $\chi(z) := -\ln |F(z)|$ , определим систему функций  $\{\Omega_k(z)\}_{k=0}^\infty$  по формуле  $\Omega_k(z) := \text{Re}[F(z)]^k$  и, обозначив через  $(\cdot, \cdot)$  скалярное произведение в  $L_2(\Gamma)$ , рассмотрим систему линейных уравнений  $\sum_{l=0}^N (\Omega_k, \Omega_l) a_l^N = (\Omega_k, \chi)$ ,  $k = \overline{0, N}$ , относительно величин  $(a_0^N, \dots, a_N^N)$ . Тогда последовательность функций  $\{f_N(z)\}_N$ , определяемых по формуле

$$f_N(z) := F(z) \exp \left[ \sum_{k=0}^N a_k^N F^k(z) \right],$$

равномерно сходится к отображению  $f(z)$  на множестве  $g \cup \text{int}\gamma$  и эту последовательность можно дифференцировать произвольное число раз в  $g$  и  $m$  раз в точках  $C^{m,\alpha}$ -гладкости дуги  $\text{int}\gamma$ . С помощью найденного  $f(z)$  требуемое отображение  $\Phi : g \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{H}^+$  строится без труда.

### §3. Задача Римана — Гильберта в верхней полуплоскости и ее сведение к задаче сопряжения

Параграф посвящен постановке сингулярной задачи Римана — Гильберта (1.2) в  $\mathbb{H}^+$  для функции  $\mathcal{P}^+$ , когда данные задачи  $\chi(\xi)$  и  $\sigma(\xi)$  — разрывные кусочно-гёльдеровы функции на  $\mathbb{R} = \partial\mathbb{H}^+$ , а в точках разрыва предписываются условия степенного, в том числе неинтегрируемого, роста решения. В п. 3.1 описан класс  $H_0(\Xi)$ , которому принадлежат функции  $\chi(\xi)$  и  $\sigma(\xi)$ , в п. 3.2 введены необходимые обозначения, в п. 3.3 дана постановка сингулярной задачи Римана — Гильберта, а в п. 3.4 описано ее сведение к задаче сопряжения.

**3.1. Класс  $H_0(\Xi)$  кусочно-гёльдеровых функций на вещественной оси.** В настоящем разделе краевые задачи рассматриваются на плоскости комплексного переменного  $\zeta = \xi + i\eta$ . Границное условие задачи Римана — Гильберта относительно аналитической функции  $\mathcal{P}^+(\zeta)$  имеет вид (1.2), где комплексная функция  $\chi(\xi)$  и вещественная функция  $\sigma(\xi)$  принадлежат классу *кусочно-гёльдеровых на  $\mathbb{R}$  функций с разрывами первого рода*, точное определение которого дано ниже.

Следуя [95], определим класс  $H_0(\Xi)$  для произвольной функции  $f(\xi)$ . Введем множество точек

$$\Xi := \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_N\} \quad (3.1)$$

вещественной оси  $\mathbb{R}$ , где  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  — конечные точки, причем  $\xi_{k+1} > \xi_k$ , а  $\xi_0 = \xi_{N+1}$  — (единственная) бесконечно удаленная точка; при этом обычные символы  $+\infty$  и  $-\infty$  означают соответственно  $\xi_0 - 0$  и  $\xi_0 + 0$ . Будем говорить, что на оси  $\mathbb{R}$  задана *кусочно-гёльдерова функция  $f(\xi)$  с разрывами первого рода в точках  $\xi_k$ ,  $k = \overline{0, N}$* , и обозначать это  $f \in H_0(\Xi)$ , если выполняются следующие условия. Во внутренних точках каждого из отрезков  $\overline{L}_k := [\xi_k, \xi_{k+1}]$ ,  $k = \overline{0, N}$ , функция  $f(\xi)$  удовлетворяет условию Гёльдера, а в точках  $\xi_k$  она не определена, но имеет в них правые и левые пределы

и удовлетворяет односторонним условиям Гёльдера. Это означает, что для функций  $f_k(\xi)$ ,  $k = \overline{0, N}$ , определенных на отрезках  $\overline{L}_k$  по формулам

$$f_k(\xi) := f(\xi), \quad \xi \in L_k, \quad f_k(\xi_k) := f(\xi_k + 0), \quad f_k(\xi_{k+1}) := f(\xi_{k+1} - 0),$$

где  $L_k := (\xi_k, \xi_{k+1})$ , выполняются соотношения

$$|f_k(\xi'') - f_k(\xi')| \leq C|\xi'' - \xi'|^\mu, \quad \xi', \xi'' \in L_k,$$

для конечных точек  $\xi_k$  — соотношения

$$\begin{aligned} |f_k(\xi) - f_k(\xi_k)| &\leq C|\xi - \xi_k|^\mu, & \xi \in L_k, \\ |f_{k-1}(\xi) - f_{k-1}(\xi_k)| &\leq C|\xi - \xi_k|^\mu, & \xi \in L_{k-1}, \end{aligned}$$

а для бесконечной точки  $\xi_0$  — следующие соотношения:

$$|f_0(\xi) - f_0(\xi_0)| \leq C|\xi|^{-\mu}, \quad \xi \in L_0, \quad |f_N(\xi) - f_N(\xi_0)| \leq C|\xi|^{-\mu}, \quad \xi \in L_N,$$

где  $\mu \in (0, 1)$ .

Будем говорить, что функция  $f \in H_0(\Xi)$  нигде на  $\mathbb{R}$  не обращается в нуль и писать  $f(\xi) \neq 0$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ , если каждая из функций  $f_k$ ,  $k = \overline{0, N}$ , отлична от нуля на соответствующем (замкнутом) отрезке  $\overline{L}_k$  ее определения.

**3.2. Используемые обозначения и предположения.** Пусть заданные на  $\mathbb{R}$  комплексная  $\chi(\xi)$  и вещественная  $\sigma(\xi)$  функции, являющиеся данными задачи Римана — Гильберта (1.2), принадлежат классу  $H_0(\Xi)$ , причем  $\chi(\xi)$  нигде не равна нулю, т.е.

$$\chi \in H_0(\Xi), \quad \chi(\xi) \neq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}; \quad \sigma \in H_0(\Xi). \quad (3.2)$$

На каждом из участков непрерывности  $L_k$  выберем произвольным образом ветви аргумента функции  $\chi(\xi)$  и обозначим через  $\delta_k$  деленные на  $\pi$  скачки функции  $\arg \chi(\xi)$  в точках разрыва:

$$\delta_k := \frac{\arg \chi(\xi_k + 0) - \arg \chi(\xi_k - 0)}{\pi}, \quad k = \overline{1, N}, \quad (3.3)$$

а для бесконечно удаленной точки полагаем

$$\delta_0 := -\frac{\arg \chi(\xi_0 + 0) - \arg \chi(\xi_0 - 0)}{\pi}. \quad (3.4)$$

Обозначим через  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  соответственно дробные и целые части величин  $\delta_k$

$$[0, 1) \ni \alpha_k := \{\delta_k\}, \quad \beta_k := [\delta_k], \quad k = \overline{0, N}, \quad (3.5)$$

и заметим, что

$$\alpha_k + \beta_k = \delta_k, \quad k = \overline{0, N}. \quad (3.6)$$

Введем также скачки функции  $\sigma(\xi)/\chi(\xi)$ :

$$\rho_k := \frac{\sigma(\xi_k + 0)}{\chi(\xi_k + 0)} - \frac{\sigma(\xi_k - 0)}{\chi(\xi_k - 0)}, \quad k = \overline{0, N}. \quad (3.7)$$

Пусть, кроме того, заданы неотрицательные целые числа  $n_0, n_1, \dots, n_N \in \mathbb{Z}^+$ .

**3.3. Два случая рассматриваемой задачи: нелогарифмический и логарифмический.** Мы рассматриваем задачу Римана — Гильберта для аналитической в верхней полуплоскости функции  $\mathcal{P}^+$  с условиями ее роста в точках  $\xi_k$ , в том числе с неинтегрируемым ростом. При этом будем отдельно изучать два случая:

I) когда соотношения  $n_k = 0, \alpha_k = 0, \rho_k \neq 0$  одновременно не выполняются ни в одной точке  $\xi_k, k = \overline{0, N}$ , разрыва граничных условий, т.е.

$$\nexists k = \overline{0, N} : \quad n_k = 0, \quad \alpha_k = 0, \quad \rho_k \neq 0; \quad (3.8)$$

II) когда указанные соотношения одновременно выполняются хотя бы для одной точки  $\xi_k$ , т.е.

$$\exists k = \overline{0, N} : \quad n_k = 0, \quad \alpha_k = 0, \quad \rho_k \neq 0. \quad (3.9)$$

Первый случай будем называть *нелогарифмическим*, а второй — *логарифмическим* в связи с видом асимптотики решения  $\mathcal{P}^+(\zeta)$  рассматриваемой задачи вблизи точек  $\xi_k$ , см. ниже пп. 3.3.1<sup>o</sup> и 3.3.2<sup>o</sup>.

В связи со сказанным постановки неоднородной задачи Римана — Гильберта для этих случаев различаются. Однако, для однородной задачи возникает только одна постановка, поскольку для нее, очевидно,  $\rho_k = 0 \forall k = \overline{0, N}$ , и, следовательно, реализуется только первый, нелогарифмический случай. Постановки неоднородной задачи Римана — Гильберта для I-го и II-го случаев даны соответственно в пп. 3.3.1° и 3.3.2°, а их решения — в §6.

3.3.1°. Постановка задачи для нелогарифмического (I-го) случая. Этот случай соответствует рассмотрению сингулярной задачи Римана — Гильберта (1.2) в предположениях п. 3.2 и предположении (3.8). Она формулируется следующим образом: найти аналитическую в верхней полуплоскости  $\mathbb{H}^+$  и непрерывную в  $\overline{\mathbb{H}^+} \setminus \Xi$  функцию  $\mathcal{P}^+(\zeta)$ , т.е.

$$\mathcal{P}^+ \in \mathcal{H}^+ := \mathcal{A}(\mathbb{H}^+) \cap C(\overline{\mathbb{H}^+} \setminus \Xi), \quad (3.10)$$

удовлетворяющую на вещественной оси краевому условию

$$\operatorname{Re}[\chi(\xi) \mathcal{P}^+(\xi)] = \sigma(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \Xi, \quad (3.11)$$

а в точках  $\xi_k$  — условиям роста:

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = \begin{cases} \mathcal{O}[(\zeta - \xi_k)^{\alpha_k - n_k}], & \text{если } n_k \neq 0; \\ \mathcal{O}(1), & \text{если } n_k = 0; \end{cases} \quad \zeta \rightarrow \xi_k \quad (k = \overline{1, N}), \quad (3.12)$$

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{\alpha_0 + n_0}), \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (3.13)$$

**Предложение 1.1.** *Фигурирующие в условиях роста (3.12), (3.13) величины  $\alpha_k$ , определяемые по формулам (3.3)–(3.5), не зависят от выбора ветвей аргумента коэффициента  $\chi(\xi)$  на участках непрерывности  $L_k$ .*

Это утверждение легко устанавливается с учетом того, что дробная часть числа не изменяется при прибавлении к этому числу произвольного целого.

**Предложение 1.2.** *Если для рассматриваемого случая I в какой-либо точке  $\xi_k$  одновременно обращаются в нуль  $\alpha_k$  и  $n_k$ , то в этой точке обязательно выполняется равенство  $\sigma_k = 0$ .*

Утверждение вытекает из условия (3.8).

3.3.2°. Постановка задачи для логарифмического (II–го) случая. Пусть для коэффициентов  $\chi(\xi)$  и  $\sigma(\xi)$  задачи (3.11) по–прежнему выполняются предположения п. 3.2. Предположим, что для одной или нескольких точек  $\xi_k$ , которые обозначим  $\xi_{k_m}$ , одновременно выполняются равенства

$$n_{k_m} = 0, \quad \alpha_{k_m} = 0, \quad \rho_{k_m} \neq 0, \quad (3.14)$$

т.е. имеет место случай II. Тогда в каждой конечной точке  $\xi_{k_m}$  требование (3.12), которое при  $\alpha_{k_m} = n_{k_m} = 0$  означало бы  $\mathcal{P}^+(\zeta) = \mathcal{O}(1)$ ,  $\zeta \rightarrow \xi_{k_m}$ , заменяется на следующее:

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = \mathcal{O}[\ln(\zeta - \xi_{k_m})], \quad \zeta \rightarrow \xi_{k_m}, \quad (3.15)$$

а если условие (3.14) выполняется в бесконечно удаленной точке  $\xi_{k_0} = \xi_0$ , то соотношение (3.13), которое при  $\alpha_{k_0} = n_{k_0} = 0$  означало бы  $\mathcal{P}^+(\zeta) = \mathcal{O}(1)$ ,  $\zeta \rightarrow \infty$ , заменяется на следующее:

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = \mathcal{O}(\ln \zeta), \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (3.16)$$

### 3.4. Сведение к задаче сопряжения.

Используя равенство

$$2 \operatorname{Re} [\chi(\xi) \mathcal{P}^+(\xi)] = \chi(\xi) \mathcal{P}^+(\xi) + \overline{\chi(\xi)} \overline{\mathcal{P}^+(\xi)},$$

переписываем краевое условие (3.11) в виде

$$\mathcal{P}^+(\xi) = -\frac{\overline{\chi(\xi)}}{\chi(\xi)} \overline{\mathcal{P}^+(\xi)} + \frac{2\sigma(\xi)}{\chi(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \Xi. \quad (3.17)$$

Вводя по формуле

$$\mathcal{P}^-(\zeta) = \overline{\mathcal{P}^+(\bar{\zeta})}, \quad \zeta \in \mathbb{H}^-, \quad (3.18)$$

аналитическую в нижней полуплоскости  $\mathbb{H}^-$  функцию  $\mathcal{P}^-(\zeta)$ , для которой согласно (3.10) выполняется включение

$$\mathcal{P}^-(\zeta) \in \mathcal{H}^- := \mathcal{A}(\mathbb{H}^-) \cap C(\overline{\mathbb{H}^-} \setminus \Xi), \quad (3.19)$$

и учитывая равенство  $\zeta = \bar{\zeta}$ ,  $\zeta \in \mathbb{R}$ , убеждаемся, что в правой части (3.17) можно сделать замену  $\overline{\mathcal{P}^+}(\xi) = \mathcal{P}^-(\xi)$ . Обозначим коэффициент  $-\overline{\chi(\xi)} / \chi(\xi)$  при  $\overline{\mathcal{P}^+}$  в правой части равенства (3.17) через  $G(\xi)$ ,

$$G(\xi) := \exp [2i\Theta(\xi)], \quad \Theta(\xi) := \arg [i\bar{\chi}(\xi)], \quad (3.20)$$

а свободный член — через  $g(\xi)$ ,

$$g(\xi) := \frac{2\sigma(\xi)}{\chi(\xi)}. \quad (3.21)$$

Тогда равенство (3.17), переписанное в виде

$$\mathcal{P}^+(\xi) = G(\xi) \mathcal{P}^-(\xi) + g(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \Xi, \quad (3.22)$$

представляет собой условие сопряжения функций  $\mathcal{P}^+ \in \mathcal{H}^+$  и  $\mathcal{P}^- \in \mathcal{H}^-$ , коэффициенты  $G$  и  $g$  которого, так же, как и функция  $\Theta$ , удовлетворяют согласно (3.2), (3.20), (3.21) соотношениям

$$G \in H_0(\Xi), \quad \Theta \in H_0(\Xi), \quad g \in H_0(\Xi); \quad (3.23)$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R} : \quad G(\xi) \neq 0. \quad (3.24)$$

При этом сами функции  $\mathcal{P}^+$  и  $\mathcal{P}^-$ , составляющие кусочно-аналитическую функцию  $\mathcal{P}$ ,

$$\mathcal{P}(\zeta) = \begin{cases} \mathcal{P}^+(\zeta), & \zeta \in \mathbb{H}^+, \\ \mathcal{P}^-(\zeta), & \zeta \in \mathbb{H}^-, \end{cases} \quad (3.25)$$

связаны равенством (3.18), которое, следуя [77], будем называть *условием комплексного уравновешивания*. Кроме того, функция  $\mathcal{P}$  удовлетворяет следующим условиям роста:

- для случая I согласно (3.12), (3.13) имеем

$$\mathcal{P}(\zeta) = \begin{cases} \mathcal{O}[(\zeta - \xi_k)^{\alpha_k - n_k}], & n_k \neq 0; \\ \mathcal{O}(1), & n_k = 0; \end{cases} \quad \zeta \rightarrow \xi_k \quad (k = \overline{1, N}), \quad (3.26)$$

$$\mathcal{P}(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{\alpha_0 + n_0}), \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (3.27)$$

- для случая II согласно (3.15), (3.16) имеем: в конечных точках  $\xi_{k_m}$ , где одновременно выполняются соотношения (3.14), вместо условия (3.26) ставится следующее:

$$\mathcal{P}(\zeta) = \mathcal{O}[\ln(\zeta - \xi_{k_m})], \quad \zeta \rightarrow \xi_{k_m}; \quad (3.28)$$

если же (3.14) имеет место для  $\xi_{k_0} = \infty$ , то вместо условия (3.27) ставится

$$\mathcal{P}(\zeta) = \mathcal{O}(\ln \zeta), \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (3.29)$$

Из сказанного выше вытекает, что если  $\mathcal{P}^+$  удовлетворяет условию (3.11) задачи Римана — Гильберта с данными  $\chi$  и  $\sigma$ , отвечающими (3.2), то функция  $\mathcal{P}$ , определяемая по формулам (3.18), (3.25), удовлетворяет условию сопряжения (3.22) с данными  $G$  и  $g$ , подчиняющимися (3.23), (3.24), и отвечает включению

$$\mathcal{P} \in \mathcal{H} \iff \begin{cases} \mathcal{P}^+ \in \mathcal{H}^+, \\ \mathcal{P}^- \in \mathcal{H}^-, \end{cases} \quad (3.30)$$

где  $\mathcal{H}^+$  и  $\mathcal{H}^-$  определены в (3.10) и (3.19).

Подставляя (3.18) в (3.22), убеждаемся, что верно и обратное утверждение. Учитывая еще указанное выше поведение функций  $\mathcal{P}^+$  и  $\mathcal{P}^-$  в точках  $\{\xi_k\}$ , приходим к следующему предложению.

**Предложение 1.3.** *Любое решение  $\mathcal{P}$  задачи сопряжения (3.18), (3.22)–(3.24), (3.26)–(3.30) представляет в  $\mathbb{H}^+$  решение задачи Римана — Гильберта (3.2), (3.11)–(3.13) и, обратно, любое решение  $\mathcal{P}^+$  этой задачи Римана — Гильберта, дополненное в  $\mathbb{H}^-$  по формулам (3.18), (3.25), является решением указанной задачи сопряжения.*

Решение  $\mathcal{P} \in \mathcal{H}$  задачи сопряжения (3.22)–(3.24), (3.26)–(3.30) будем искать в виде суммы

$$\mathcal{P}(\zeta) = \Psi(\zeta) + \mathcal{N}(\zeta) \quad (3.31)$$

общего решения  $\Psi(\zeta)$  однородной (т.е. соответствующей  $g(\xi) \equiv 0$ ) и некоторого решения  $\mathcal{N}(\zeta)$  неоднородной задачи сопряжения.

Для построения функций  $\Psi$  и  $\mathcal{N}$  нам понадобятся свойства специальной модификации интеграла типа Коши, рассмотренного в следующем параграфе.

## §4. Модифицированный интеграл типа Коши

Материал п. 4.1 настоящего подраздела, взят из монографий [45], [95]. Пункты 4.2, 4.3 посвящены модифицированному интегралу типа Коши, используемому в следующих параграфах для построения решения сингулярной задачи Римана — Гильберта.

**4.1. Интеграл типа Коши. Формулы Сохоцкого.** Пусть  $\mathcal{L}$  — лежащая в  $\mathbb{C}$  простая гладкая дуга (замкнутая или незамкнутая), на которой задано направление обхода, а  $\lambda(t)$  — определенная на  $\mathcal{L}$  комплекснозначная непрерывная по Гёльдеру функция, где  $t$  — комплексная координата. Тогда интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\lambda(t) dt}{t - z} \quad (4.1)$$

называют интегралом типа Коши, функцию  $\lambda(t)$  — его плотностью, а  $1/(t - z)$  — ядром Коши.

Интеграл типа Коши  $F(z)$  является аналитической в  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{L}$  функцией переменного  $z$ . В указанных предположениях для дуги  $\mathcal{L}$  и плотности  $\lambda(t)$  функция  $F(z)$  непрерывно продолжима слева и справа на дугу  $\mathcal{L}$  за исключением ее концов (обозначаемых  $a$  и  $b$ ), если таковые имеются. Левые  $F^+(t)$  и правые  $F^-(t)$  предельные значения интеграла типа Коши на  $\mathcal{L}$  терпят скачок, равный плотности  $\lambda(t)$ , т.е. справедливо следующее равенство

$$F^+(t) - F^-(t) = \lambda(t), \quad t \in \text{int } \mathcal{L}, \quad (4.2)$$

и связаны с сингулярным интегралом

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\lambda(t') dt'}{t' - t}$$

равенствами

$$F^\pm(t) = \pm \frac{\lambda(t)}{2} + \Phi(t), \quad t \in \text{int } \mathcal{L}, \quad (4.3)$$

где  $\text{int } \mathcal{L}$  — дуга  $\mathcal{L}$  без концевых точек. Соотношения (4.2) и (4.3) называют формулами Сохоцкого.

**4.2. Модифицированный интеграл типа Коши с плотностью из класса  $H_0(\Xi)$ .** Пусть  $\lambda(\xi)$  представляет собой произвольную (комплексно-значную) кусочно-гёльдерову функцию на  $\mathbb{R}$  с разрывами первого рода в точках  $\xi_k$ , т.е. удовлетворяет включению

$$\lambda \in H_0(\Xi). \quad (4.4)$$

Пусть, далее, точка  $\delta \in \mathbb{R}$  фиксирована и не совпадает с точками  $\xi_k$ ,

$$\mathbb{R} \ni \delta \notin \Xi. \quad (4.5)$$

Тогда интеграл

$$\Lambda(\zeta) = \frac{\zeta - \delta}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda(t) dt}{(t - \delta)(t - \zeta)} = \begin{cases} \Lambda^+(\zeta), & \zeta \in \mathbb{H}^+, \\ \Lambda^-(\zeta), & \zeta \in \mathbb{H}^-, \end{cases} \quad (4.6)$$

будем называть *модифицированным интегралом типа Коши*. Близкие к нему интегралы вводились в монографии [45]. При необходимости подчеркнуть, что интеграл  $\Lambda$  соответствует плотности  $\lambda(\zeta)$ , будем его обозначать  $\Lambda(\lambda; \zeta)$ .

Свойства интеграла (4.6) при условии (4.4) устанавливает

**Теорема 1.1.** *Справедливы следующие утверждения.*

- 1) *Интеграл (4.6) существует в смысле главного значения.*
- 2) *Функции  $\Lambda^+(\zeta)$  и  $\Lambda^-(\zeta)$  принадлежат классам  $\mathcal{H}^+$  и  $\mathcal{H}^-$ , а для их граничных значений справедлива формула Сохоцкого*

$$\Lambda^+(\xi) - \Lambda^-(\xi) = \lambda(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \Xi. \quad (4.7)$$

- 3) *Для того чтобы функции  $\Lambda^+(\zeta)$  и  $\Lambda^-(\zeta)$  удовлетворяли условию комплексного уравновешивания*

$$\Lambda^-(\zeta) = \overline{\Lambda^+(\bar{\zeta})}, \quad \zeta \in \mathbb{H}^- \quad (4.8)$$

*необходимо и достаточно, чтобы плотность  $\lambda(\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ , принимала только мнимые значения.*

4) Функция  $\Lambda(\zeta)$  имеет в точках  $\Xi$  следующие асимптотики:

$$\Lambda(\zeta) = \frac{\lambda(\xi_k - 0) - \lambda(\xi_k + 0)}{2\pi i} \ln |\zeta - \xi_k| + \mathcal{O}(1), \quad \zeta \rightarrow \xi_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad (4.9)$$

$$\Lambda(\zeta) = \frac{\lambda(-\infty) - \lambda(+\infty)}{2\pi i} \ln |\zeta| + \mathcal{O}(1), \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (4.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1.1 дано в приложении А, стр. 250.

**4.3. Некоторые частные случаи модифицированного интеграла типа Коши.** Рассмотрим следующий интеграл:

$$\mathcal{M}(\zeta) = \frac{\zeta - \delta}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\Theta(t) dt}{(t - \delta)(t - \zeta)} = \begin{cases} \mathcal{M}^+(\zeta), & \zeta \in \mathbb{H}^+, \\ \mathcal{M}^-(\zeta), & \zeta \in \mathbb{H}^-, \end{cases} \quad (4.11)$$

где функция  $\Theta(\xi)$ , связана с коэффициентом  $\chi(\xi)$  задачи Римана — Гильберта (3.11) формулой (3.20). Напомним, что согласно (3.23) функция  $\Theta(\xi)$  принадлежит классу  $H_0(\Xi)$ .

Заметив, что  $\mathcal{M}(\zeta) = \Lambda(2i\Theta; \zeta)$  и принимая во внимание вытекающие из (3.3)–(3.7) формулы

$$\begin{aligned} \frac{\Theta(\xi_k - 0) - \Theta(\xi_k + 0)}{\pi} &= \alpha_k + \beta_k, \quad k = \overline{1, N}; \\ \frac{\Theta(-\infty) - \Theta(+\infty)}{\pi} &= \alpha_0 + \beta_0, \end{aligned}$$

получаем из теоремы 1.1

**Предложение 1.4.** *Справедливы следующие утверждения.*

- 1) Интеграл (4.11) существует в смысле главного значения.
- 2) Функции  $\mathcal{M}^+(\zeta)$  и  $\mathcal{M}^-(\zeta)$  принадлежат соответственно классам  $\mathcal{H}^+$  и  $\mathcal{H}^-$ , а для их граничных значений справедлива формула Сохоцкого

$$\mathcal{M}^+(\xi) - \mathcal{M}^-(\xi) = 2i\Theta(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \Xi. \quad (4.12)$$

- 3) Функции  $\mathcal{M}^+(\zeta)$  и  $\mathcal{M}^-(\zeta)$  удовлетворяют условию комплексного уравновешивания

$$\mathcal{M}^-(\zeta) = \overline{\mathcal{M}^+(\bar{\zeta})}, \quad \zeta \in \mathbb{H}^-. \quad (4.13)$$

4) Функция  $\mathcal{M}(\zeta)$  имеет в точках  $\Xi$  следующие асимптотики:

$$\mathcal{M}(\zeta) = (\alpha_k + \beta_k) \ln |\zeta - \xi_k| + \mathcal{O}(1), \quad \zeta \rightarrow \xi_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad (4.14)$$

$$\mathcal{M}(\zeta) = (\alpha_0 + \beta_0) \ln |\zeta| + \mathcal{O}(1), \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (4.15)$$

Используя рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве теоремы 1.1, можно установить следующее

**Предложение 1.5.** *Если плотность  $\nu \in H_0$  в интеграле*

$$N(\zeta) = \frac{\zeta - \delta}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\nu(t) dt}{(t - \delta)(t - \zeta)}, \quad \delta \in \mathbb{R} \setminus \Xi, \quad (4.16)$$

*удовлетворяет в окрестности бесконечности оценке  $\nu(t) = \mathcal{O}(|t|^{-\mu})$ ,  $\mu \in (0, 1)$ , то и интеграл удовлетворяет аналогичной оценке,*

$$N(\zeta) - N(\infty) = \mathcal{O}(|\zeta|^{-\mu}), \quad N(\infty) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\nu(t) dt}{t - \delta}. \quad (4.17)$$

## §5. Однородные задачи сопряжения и Римана — Гильберта

В пункте 5.1 настоящего параграфа дана постановка задачи сопряжения, к которой сводится однородная задача Римана — Гильберта, в пункте 5.2 для этих задач найдено каноническое решение и определен индекс, а в пункте 5.3 получены формулы для искомых функций.

**5.1. Постановка однородной задачи сопряжения.** Пусть функция  $\Psi \in \mathcal{H}$  является решением однородной задачи сопряжения (3.22)–(3.24), (3.26)–(3.30), т.е.  $\Psi^+$  и  $\Psi^-$  удовлетворяют соотношениям

$$\Psi^+(\xi) = G(\xi) \Psi^-(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \Xi; \quad (5.1)$$

$$\Psi^-(\zeta) = \overline{\Psi^+(\bar{\zeta})}, \quad \zeta \in \mathbb{H}^-; \quad (5.2)$$

$$\Psi(\zeta) = \mathcal{O}[(\zeta - \xi_k)^{\alpha_k - n_k}], \quad \zeta \rightarrow \xi_k, \quad k = \overline{1, N}; \quad (5.3)$$

$$\Psi(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{\alpha_0 + n_0}), \quad \zeta \rightarrow \infty; \quad (5.4)$$

напомним, что запись  $\Psi \in \mathcal{H}$  понимается в смысле (3.30), а  $\Psi^\pm(\zeta)$  связаны с  $\Psi(\zeta)$  соотношением, аналогичным (3.25).

**5.2. Каноническое решение. Индекс  $\kappa$  задачи.** Назовем *каноническим решением задачи сопряжения* (5.1)–(5.4) функцию  $X \in \mathcal{H}$ , которая удовлетворяет условиям сопряжения

$$X^+(\xi) = G(\xi) X^-(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \Xi, \quad (5.5)$$

и комплексного уравновешивания

$$X^-(\zeta) = \overline{X^+(\bar{\zeta})}, \quad \zeta \in \mathbb{H}^-, \quad (5.6)$$

в конечных точках  $\xi_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ) подчиняется условиям роста

$$X(\zeta) = \mathcal{O}^\star[(\zeta - \xi_k)^{\alpha_k - n_k}], \quad \zeta \rightarrow \xi_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad (5.7)$$

а на бесконечности ведет себя некоторым степенным образом, и кроме того, *не обращается в нуль* в  $\mathbb{C} \setminus \Xi$ :

$$X(\zeta) \neq 0, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \Xi. \quad (5.8)$$

Именно условие (5.8) и отличает каноническую функцию  $X(\zeta)$  от решения задачи сопряжения  $\Psi(\zeta)$ .

Как будет показано ниже, см. (5.16), на бесконечности каноническая функция  $X(\zeta)$ , имеет следующую асимптотику:

$$X(\zeta) = \mathcal{O}^\star(\zeta^{\alpha_0 + \tilde{n}_0}), \quad \zeta \rightarrow \infty,$$

где  $\tilde{n}_0$  — некоторое целое число, вообще говоря, отличное от  $n_0$ , фигурирующего в (5.4); число  $\tilde{n}_0$  будет найдено ниже. Отметим, что в [95], [45] каноническое решение было введено для случаев, когда числа  $n_k$  при  $k = \overline{1, N}$  могли принимать значения 0 или 1, а число  $n_0$  — значения 0 или  $-1$ .

Вначале рассматривается вопрос о единственности канонического решения, а затем предъявляется вид одного из них и формулируется теорема его существования.

**Предложение 1.6.** *Каноническое решение  $X(\zeta)$ , т.е. функция, удовлетворяющая условиям (5.5)–(5.8), единственно с точностью до вещественной мультипликативной постоянной.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Действительно, если существует другое такое решение  $X_1(\zeta)$ , то их отношение

$$\eta(\zeta) = X(\zeta)/X_1(\zeta)$$

представляет собой аналитическую в  $\mathbb{C}$  функцию, быть может, имеющую на бесконечности степенной рост и, таким образом, являющуюся полиномом. Поскольку функция  $\eta(\zeta)$  нигде не обращается в нуль, то она равна постоянной величине  $C$ , которая в силу равенства  $\eta^-(\zeta) = \overline{\eta^+(\zeta)}$ , следующего из (5.6), вещественна. Предложение доказано.

Обратимся непосредственно к построению канонического решения  $X(\zeta)$ . Логарифмируя краевое условие (5.5), приходим к задаче об отыскании регулярных и однозначных соответственно в  $\mathbb{H}^+$  и  $\mathbb{H}^-$  функций  $\ln X^+(\zeta)$  и  $\ln X^-(\zeta)$ , составляющих функцию  $\ln X(\zeta)$ , по заданному ее с скачку на вещественной оси, который согласно (3.20) равен  $\ln G(\xi) = 2i\Theta(\xi)$ , т.е.

$$\ln X^+(\xi) - \ln X^-(\xi) = 2i\Theta(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \Xi. \quad (5.9)$$

Решение этой задачи будем искать на основе модифицированного интеграла типа Коши (4.11); отметим, что использовать для этого обычный интеграл типа Коши с плотностью  $2i\Theta(\xi)$  не представляется возможным, так как  $\Theta(\xi)$ , вообще говоря, не убывает на бесконечности.

Введем функцию

$$\tilde{X}(\zeta) := e^{\mathcal{M}(\zeta)}, \quad (5.10)$$

где  $\mathcal{M}(\zeta)$  дается формулой (4.11). Тогда согласно формуле Сохоцкого (4.12) из предложения 1.4 функция  $\tilde{X}(\zeta)$ , будучи подставлена в условие (5.9), удовлетворяет этому условию, а значит она удовлетворяет и условию сопряжения

$$\tilde{X}^+(\xi) = G(\xi) \tilde{X}^-(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \Xi. \quad (5.11)$$

Кроме того, из равенств (4.13), (5.10) и соотношения  $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , вытекает, что для  $\tilde{X}^\pm(\zeta)$  выполняется условие комплексного уравновешивания

$$\tilde{X}^-(\zeta) = \overline{\tilde{X}^+(\bar{\zeta})}, \quad \zeta \in \mathbb{H}^-. \quad (5.12)$$

Однако, несмотря на то, что функция  $\tilde{X}(\zeta)$  отвечает условиям (5.11), (5.12), она, вообще говоря, не совпадает с  $X(\zeta)$ , поскольку, согласно (4.14), (4.15) и (5.10) имеет асимптотики

$$\tilde{X}(\zeta) = \mathcal{O}^\star[(\zeta - \xi_k)^{\alpha_k + \beta_k}], \quad \zeta \rightarrow \xi_k, \quad \tilde{X}(\zeta) = \mathcal{O}^\star(\zeta^{\alpha_0 + \beta_0}), \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad (5.13)$$

тогда как функция  $X(\zeta)$  должна отвечать асимптотикам (5.7).

Из сравнения (5.7) и (5.13) вытекает, что функция  $X(\zeta)$ , определяемая по формулам

$$X(\zeta) = r(\zeta) \tilde{X}(\zeta), \quad r(\zeta) := \prod_{k=1}^N (\zeta - \xi_k)^{-\beta_k - n_k}, \quad (5.14)$$

удовлетворяет требуемым условием роста (5.7), а из соотношений (5.10) и (5.14) — что она не обращается в нуль при  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \Xi$ . Поскольку рациональная функция  $r(\zeta)$  аналитична и однозначна в  $\mathbb{C} \setminus \Xi$  и удовлетворяет равенству  $r(\zeta) = \overline{r(\bar{\zeta})}$ ,  $\zeta \in \mathbb{C}$ , а  $\tilde{X}(\zeta)$  — аналогичному равенству (5.12) и граничному условию (5.11), то  $X(\zeta)$  отвечает граничному условию (5.5) и условию комплексного уравновешивания (5.6). Кроме того, поскольку  $\mathcal{M} \in \mathcal{H}$  согласно предложению 1.4, то, учитывая формулы (5.10) и (5.14), получаем  $X \in \mathcal{H}$ .

Суммируя сказанное, приходим к следующему утверждению.

**Предложение 1.7.** *Функция*

$$X(\zeta) = \prod_{k=1}^N (\zeta - \xi_k)^{-\beta_k - n_k} e^{\mathcal{M}(\zeta)}, \quad (5.15)$$

где  $\mathcal{M}(\zeta)$  дается формулой (4.11), является каноническим решением задачи сопряжения (5.1)–(5.4), т.е. удовлетворяет соотношениям (5.5)–(5.8).

Учитывая асимптотику (4.15) для  $\mathcal{M}(\zeta)$ , находим из (5.15) асимптотику функции  $X(\zeta)$  на бесконечности:

$$X(\zeta) = \mathcal{O}^\star(\zeta^{\alpha_0 + n_0 - \kappa}), \quad \zeta \rightarrow \infty; \quad (5.16)$$

фигурирующее здесь целое число  $\varkappa$ , определяемое по формуле

$$\varkappa := n_0 - \beta_0 + \sum_{k=1}^N (\beta_k + n_k), \quad (5.17)$$

будем называть *индексом задачи*.

Поскольку функция  $X^+(\zeta)$ , представляющая собой сужение на  $\mathbb{H}^+$  канонического решения  $X(\zeta)$  задачи сопряжения (5.1)–(5.3), удовлетворяет однородному условию (3.11) задачи Римана — Гильберта, нигде в  $\overline{\mathbb{H}^+} \setminus \Xi$  не обращается нуль, а в конечных точках  $\xi_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ , подчиняется условиям роста (3.12), то будем называть ее *каноническим решением задачи Римана — Гильберта* (3.10)–(3.13).

**Предложение 1.8.** *Индекс  $\varkappa$ , определяемый по формуле (5.17), не зависит от выбора ветвей аргумента  $\arg \chi(\xi)$  на участках непрерывности коэффициента  $\chi(\xi)$  задачи Римана — Гильберта (3.10)–(3.13).*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Напомним, что через  $\delta_k$ ,  $k = \overline{0, N}$ , обозначаются деленные на  $\pi$  скачки аргумента  $\chi(\xi)$  в точках  $\xi_k$  его разрыва при некотором фиксированном выборе ветвей  $\arg \chi$  на участках  $L_k$  непрерывности коэффициента  $\chi$ .

Пусть на некотором конечном участке  $L_m$  выбрана иная ветвь  $\arg \chi(\xi)$ ; очевидно, что она отличается от исходной на  $2\pi p_m$ ,  $p_m \in \mathbb{Z}$ . Тогда, обозначив новые, деленные на  $\pi$ , скачки в точках  $\xi_m$  и  $\xi_{m+1}$  соответственно через  $\tilde{\delta}_m$  и  $\tilde{\delta}_{m+1}$  (а их целые части — через  $\tilde{\beta}_m$  и  $\tilde{\beta}_{m+1}$ ), убеждаемся с учетом формулы (3.3), что они связаны со старыми скачками соотношениями  $\tilde{\delta}_m = \delta_m + 2p_m$ ,  $\tilde{\delta}_{m+1} = \delta_{m+1} - 2p_m$ , а следовательно,  $\tilde{\beta}_m = \beta_m + 2p_m$ ,  $\tilde{\beta}_{m+1} = \beta_{m+1} - 2p_m$ . При этом  $\delta_k$  (и  $\beta_k$ ) в остальных  $\xi_k$  не изменились. Вычисляя индекс по формуле (5.17) через новые  $\beta_k$ , убеждаемся, что он не изменился. Отсюда и из формулы (5.17) вытекает, что от выбора ветвей  $\arg \chi(\xi)$  на конечных интервалах  $L_k$  величина индекса не зависит.

Выполним аналогичную проверку для бесконечных интервалов  $L_0$  и  $L_N$ . Выберем, например, на  $L_0$  ветвь  $\arg \chi(\xi)$ , отличающуюся от исходной на  $2\pi n_0$ .

Тогда согласно формулам (3.3), (3.4) старые скачки  $\delta_0$  и  $\delta_1$  в точках  $\xi_0$  и  $\xi_1$  связаны с новыми скачками  $\tilde{\delta}_0$  и  $\tilde{\delta}_1$  в тех же точках соотношениями  $\tilde{\delta}_0 = \delta_0 - 2p_0$ ,  $\tilde{\delta}_1 = \delta_1 - 2p_0$ , и аналогичные соотношения справедливы для соответствующих целых частей  $\tilde{\beta}_0 = \beta_0 - 2p_0$ ,  $\tilde{\beta}_1 = \beta_1 - 2p_0$ . Отсюда и из формулы (5.17) вытекает, что от выбора ветви  $\arg \chi(\xi)$  на интервале  $L_0$  величина индекса не зависит.

Выберем на  $L_N$  ветвь  $\arg \chi(\xi)$ , отличающуюся от исходной на  $2\pi r_N$ . Тогда согласно формулам (3.3), (3.4) старые скачки  $\delta_N$  и  $\delta_0$  в точках  $\xi_N$  и  $\xi_0$  связаны с новыми скачками  $\tilde{\delta}_N$  и  $\tilde{\delta}_0$  в тех же точках соотношениями  $\tilde{\delta}_N = \delta_N + 2p_N$ ,  $\tilde{\delta}_0 = \delta_0 + 2p_N$ , и аналогичные соотношения справедливы для соответствующих целых частей  $\tilde{\beta}_N = \beta_N + 2p_N$ ,  $\tilde{\beta}_0 = \beta_0 + 2p_N$ . Отсюда и из формулы (5.17) вытекает, что от выбора ветви  $\arg \chi(\xi)$  на интервале  $L_N$  величина индекса также не зависит. Итак, она не зависит от выбора ветвей аргумента  $\arg \chi(\xi)$  на любых участках непрерывности коэффициента  $\chi(\xi)$ . Предложение доказано.

Из предложений 1.6, 1.7 вытекает следующая

**Теорема 1.2.** *Каноническое решения задачи сопряжения (5.1)–(5.4), т.е. функция  $X(\zeta)$ , удовлетворяющая соотношениям (5.5)–(5.8), существует, единственno с точностью до мультипликативной постоянной, имеет вид*

$$X(\zeta) = C \prod_{k=1}^N (\zeta - \xi_k)^{-\beta_k - n_k} e^{\mathcal{M}(\zeta)}, \quad (5.18)$$

где  $C$  – отличная от нуля произвольная вещественная постоянная, и обладает асимптотикой (5.16) на бесконечности, где  $\varkappa$  – индекс (5.17) задачи сопряжения (5.1)–(5.4). Функция  $X^+(\zeta)$ , представляющая собой сужение  $X(\zeta)$  на  $\mathbb{H}^+$ , является каноническим решением задачи Римана – Гильберта (3.10)–(3.13).

Из приведенных рассмотрений также следует

**Предложение 1.9.** *Если в условиях роста (3.12), (3.13) постановки задачи Римана – Гильберта (3.10)–(3.13) хотя бы одной точки  $\xi_{k'}$  заменить  $\mathfrak{O}$  на  $\mathfrak{O}^*$ , а показатель  $\alpha_{k'} - n_{k'}$  заменить на показатель  $\nu_{k'}$ , дробная часть которого отлична от  $\alpha_{k'}$ , то такая задача окажется неразрешимой.*

**5.3. Решение однородных задач сопряжения и Римана — Гильберта.** Обратимся к нахождению общего решения  $\Psi(\zeta)$  однородной задачи сопряжения (5.1)–(5.4). Введем аналитические соответственно в  $\mathbb{H}^+$  и  $\mathbb{H}^-$  функции

$$\varphi^+(\zeta) = \frac{\Psi^+(\zeta)}{X^+(\zeta)}, \quad \varphi^-(\zeta) = \frac{\Psi^-(\zeta)}{X^-(\zeta)}. \quad (5.19)$$

Учитывая асимптотическое поведение (5.3), (5.7) функций  $\Psi(\zeta)$  и  $X(\zeta)$ , находим, что  $\varphi^+$  и  $\varphi^-$  непрерывны соответственно в  $\overline{\mathbb{H}^+} \setminus \{\infty\}$  и  $\overline{\mathbb{H}^-} \setminus \{\infty\}$ . Отсюда, учитывая краевые условия (5.1) и (5.5), получаем равенство

$$\varphi^+(\xi) = \varphi^-(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

из которого следует, что  $\varphi^+(\zeta)$  и  $\varphi^-(\zeta)$  образуют единую аналитическую во всей конечной плоскости функцию  $\varphi(\zeta)$ , причем из асимптотик (5.4) и (5.16) вытекает, что

$$\varphi(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^\kappa), \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad (5.20)$$

где  $\kappa$  — индекс задачи, определяемый по формуле (5.17). Рассмотрим отдельно два случая: (i)  $\kappa \geq 0$ ; (ii)  $\kappa < 0$ .

(i) Если индекс  $\kappa$  неотрицателен, то функция  $\varphi(\zeta) = \varphi^\pm(\zeta)$ ,  $\zeta \in \mathbb{H}^\pm$ , в силу теоремы Лиувилля и асимптотики (5.20) есть многочлен  $P_\kappa(\zeta)$  степени  $\kappa$ , а в силу условия комплексного уравновешивания  $\varphi^-(\zeta) = \overline{\varphi^+(\zeta)}$ ,  $\zeta \in \mathbb{H}^-$ , следующего из (5.2), (5.6), (5.19), получаем, что коэффициенты многочлена  $P_\kappa(\zeta)$  вещественны. Возвращаясь к решению  $\Psi(\zeta)$  задачи (5.1)–(5.4), устанавливаем следующее

**Предложение 1.10.** *Если индекс  $\kappa$  из (5.17), неотрицателен, то решение  $\Psi \in \mathcal{H}$  задачи сопряжения (5.1)–(5.4) представимо в виде*

$$\Psi(\zeta) = X(\zeta) P_\kappa(\zeta),$$

где  $X(\zeta)$  — каноническое решение задачи, определяемое по формуле (5.15), а  $P_\kappa(\zeta)$  — произвольный многочлен степени  $\kappa$  с вещественными коэффициентами.

**(ii)** Если индекс  $\varkappa$  отрицателен, то функция  $\varphi(\zeta)$ , аналитическая во всей конечной плоскости, в силу асимптотики (5.20) равна нулю в точке  $\zeta = \infty$  и, следовательно, по теореме Лиувилля тождественно равна нулю. Отсюда вытекает

**Предложение 1.11.** *Если  $\varkappa < 0$ , то однородная задача сопряжения (5.1)–(5.4) не имеет решений  $\Psi$  из класса  $\mathcal{H}$ , кроме тривиального  $\Psi(\zeta) \equiv 0$ .*

Объединяя предложения 1.3, 1.10 и 1.11, приходим к следующей теореме.

**Теорема 1.3. (i)** *Если индекс  $\varkappa$ , определяемый по формуле (5.17), неотрицателен, то решение  $\Psi^+ \in \mathcal{H}^+$  однородной задачи Римана – Гильберта*

$$\operatorname{Re} [\chi(\xi) \Psi^+(\xi)] = 0, \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \Xi, \quad (5.21)$$

*с условиями роста*

$$\begin{aligned} \Psi^+(\zeta) &= \mathcal{O}[(\zeta - \xi_k)^{\alpha_k - n_k}], \quad \zeta \rightarrow \xi_k, \quad k = \overline{1, N}, \\ \Psi^+(\zeta) &= \mathcal{O}(\zeta^{\alpha_0 + n_0}), \quad \zeta \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (5.22)$$

где  $n_k$  – произвольные неотрицательные целые числа, имеет следующий вид:

$$\Psi^+(\zeta) = \prod_{k=1}^N (\zeta - \xi_k)^{-\beta_k - n_k} e^{\mathcal{M}^+(\zeta)} P_\varkappa(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{H}^+; \quad (5.23)$$

здесь функция  $\mathcal{M}^+(\zeta)$  дается равенством (4.11),  $P_\varkappa(\zeta)$  – произвольный многочлен степени  $\varkappa$  с вещественными коэффициентами, а числа  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  определяются из (3.5).

**(ii)** *При  $\varkappa < 0$  однородная задача Римана – Гильберта (5.21), (5.22) в классе  $\mathcal{H}^+$  не имеет решений, кроме тривиального  $\Psi^+(\zeta) \equiv 0$ .*

Из теоремы 1.3 вытекает, что при  $\varkappa \geq 0$  задача (5.21), (5.22) имеет  $(\varkappa + 1)$  линейно независимых решений  $\Psi_m^+(\zeta)$ ,

$$\Psi_m^+(\zeta) = \zeta^m \prod_{k=1}^N (\zeta - \xi_k)^{-\beta_k - n_k} e^{\mathcal{M}^+(\zeta)}, \quad m = \overline{0, \varkappa},$$

и общее решение (5.23) является их линейной комбинацией.

Если в задаче сопряжения (5.1)–(5.4) отказаться от условия комплексного уравновешивания (5.2), то утверждения предложений 1.10 и 1.11 переносятся на такой случай с той лишь разницей, что коэффициенты полинома  $P_{\varkappa}(\zeta)$  будут произвольными комплексными числами.

## §6. Неоднородные задачи сопряжения и Римана — Гильберта

Пункт 6.1 настоящего параграфа посвящен сведению построения частного решения неоднородной задачи сопряжения к задаче о скачке, которая затем решена в пункте 6.2. В пункте 6.3 выписано частное решение задач сопряжения и Римана — Гильберта. В пункте 6.4 представлен основной результат главы I, сформулированный в виде теоремы 1.5 о разрешимости сингулярной задачи Римана — Гильберта и представлении ее решения через модифицированные интегралы типа Коши.

**6.1. Постановка неоднородной задачи сопряжения и ее сведение к задаче о скачке.** Пусть выполняется условие (3.8), т.е. имеет место случай I. Построим некоторые функции  $\mathcal{N}^+ \in \mathcal{H}^+$  и  $\mathcal{N}^- \in \mathcal{H}^-$ , составляющие частное решение задачи (3.22)–(3.24), (3.26), (3.27), т.е. удовлетворяющие условию сопряжения

$$\mathcal{N}^+(\xi) = G(\xi) \mathcal{N}^-(\xi) + g(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \Xi, \quad (6.1)$$

условию комплексного уравновешивания

$$\mathcal{N}^-(\zeta) = \overline{\mathcal{N}^+(\bar{\zeta})}, \quad \zeta \in \mathbb{H}^-, \quad (6.2)$$

и условиям роста

$$\mathcal{N}(\zeta) = \begin{cases} \mathcal{O}(1), & n_k = 0; \\ \mathcal{O}[(\zeta - \xi_k)^{\alpha_k - n_k}], & n_k > 0; \end{cases} \quad \zeta \rightarrow \xi_k \quad (k = \overline{1, N}), \quad (6.3)$$

$$\mathcal{N}(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{\alpha_0 + n_0}), \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (6.4)$$

Будем искать  $\mathcal{N}^\pm(\zeta)$  в виде

$$\mathcal{N}^+(\zeta) = X^+(\zeta) \mathcal{F}^+(\zeta), \quad \mathcal{N}^-(\zeta) = X^-(\zeta) \mathcal{F}^-(\zeta), \quad (6.5)$$

где  $X(\zeta)$  — каноническое решение однородной задачи сопряжения (5.1)–(5.4), определяемое по формуле (5.15). Из соотношений (5.6), (6.2), (6.5) находим, что  $\mathcal{F}^+$  и  $\mathcal{F}^-$  должны удовлетворять условию комплексного уравновешивания

$$\mathcal{F}^-(\zeta) = \overline{\mathcal{F}^+(\bar{\zeta})}, \quad \zeta \in \mathbb{H}^-, \quad (6.6)$$

а принимая во внимание соотношения  $\mathcal{N} \in \mathcal{H}$ ,  $X \in \mathcal{H}$  и свойство (5.8) канонической функции, получаем  $\mathcal{F} \in \mathcal{H}$ .

Учитывая асимптотики (5.7), (5.16) для  $X(\zeta)$ , а также предписанное условиями (6.3), (6.4) поведение функции  $\mathcal{N}(\zeta)$  при стремлении  $\zeta \rightarrow \xi_k$ , находим, что  $\mathcal{F}^+$  и  $\mathcal{F}^-$  ограничены или имеют интегрируемую особенность в точках  $\xi_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ , а на бесконечности имеют порядок  $\mathcal{O}(\zeta^\kappa)$ , т.е.

$$\mathcal{F}(\zeta) = \begin{cases} \mathcal{O}[(\zeta - \xi_k)^{-\alpha_k}], & n_k = 0; \\ \mathcal{O}(1), & n_k > 0; \end{cases} \quad \zeta \rightarrow \xi_k \quad (k = \overline{1, N});$$

$$\mathcal{F}(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^\kappa), \quad \zeta \rightarrow \infty.$$
(6.7)

Подставляя (6.5) в условие сопряжения (6.1) и учитывая, что согласно (5.5) коэффициент  $G(\xi)$  в условии (6.1) может быть записан в виде

$$G(\xi) = \frac{X^+(\xi)}{X^-(\xi)},$$

получаем следующее условие скачка на вещественной оси для  $\mathcal{F}^+$  и  $\mathcal{F}^-$ :

$$\mathcal{F}^+(\xi) - \mathcal{F}^-(\xi) = \frac{g(\xi)}{X^+(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \Xi. \quad (6.8)$$

Таким образом, мы пришли к задаче о скачке (6.6)–(6.8) для функции  $\mathcal{F} \in \mathcal{H}$ . При построении ее решения отдельно рассмотрим два случая:

$$\text{(i)} \quad \kappa \geq 0, \quad \text{(ii)} \quad \kappa < 0, \quad (6.9)$$

где, напомним,  $\kappa$  — индекс задачи, определяемый по формуле (5.17).

## 6.2. Построение решения задачи о скачке.

6.2.1°. Решение задачи о скачке при неотрицательном индексе  $\varkappa$ . Рассмотрим первый из случаев (6.9), соответствующий неотрицательному индексу  $\varkappa$ . Введем функцию  $\mathcal{S}(\zeta)$  по формуле

$$\mathcal{S}(\zeta) := (\zeta - \lambda)^{2\{\varkappa/2\}} (\zeta^2 + 1)^{[\varkappa/2]}, \quad (6.10)$$

где  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \Xi$ . Нетрудно убедиться, что такая функция при  $\varkappa \geq 0$  является полиномом степени  $\varkappa$  с ненулевым старшим коэффициентом, что влечет

$$\mathcal{S}(\zeta) = \mathcal{O}^*(\zeta^\varkappa), \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad (6.11)$$

(если же  $\varkappa < 0$ , то она обращается в нуль на бесконечности, а точках  $\zeta = \pm i$  имеет полюсы). Приведем, кроме того, оценку, вытекающую из (5.16), (6.11),

$$\mathcal{S}(\zeta) X(\zeta) = \mathcal{O}^*(\zeta^{\alpha_0+n_0}), \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (6.12)$$

В силу (6.7) и (6.11) функции  $\mathcal{T}^+(\zeta)$  и  $\mathcal{T}^-(\zeta)$ , определяемые равенствами

$$\mathcal{T}^+(\zeta) := \frac{\mathcal{F}^+(\zeta)}{\mathcal{S}(\zeta)}, \quad \mathcal{T}^-(\zeta) := \frac{\mathcal{F}^-(\zeta)}{\mathcal{S}(\zeta)}, \quad (6.13)$$

на бесконечности ограничены, а в конечных точках  $\xi_k$  ограничены или имеют интегрируемую особенность. Из соотношений (6.8), (6.13) находим, что функция  $\mathcal{T}(\zeta) = \mathcal{T}^\pm(\zeta)$ ,  $\zeta \in \mathbb{H}^\pm$ , удовлетворяет на вещественной оси условию скачка:

$$\mathcal{T}^+(\xi) - \mathcal{T}^-(\xi) = \mathcal{D}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus (\Xi \cup \{\lambda\}), \quad (6.14)$$

где  $\mathcal{D}(\xi)$  дается формулой

$$\mathcal{D}(\xi) := \frac{g(\xi)}{\mathcal{S}(\xi) X^+(\xi)}. \quad (6.15)$$

Частное решение задачи о скачке (6.14), сохраняя за ним прежнее обозначение  $\mathcal{T}$ , будем искать в виде интеграла типа Коши

$$\mathcal{T}^\pm(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{D}(t) dt}{t - \zeta}, \quad \zeta \in \mathbb{H}^\pm; \quad (6.16)$$

такую возможность устанавливает следующая

**Теорема 1.4.** Для случая I, т.е. в предположении (3.8), и неотрицательном индексе  $\varkappa$  справедливы следующие утверждения:

1) интеграл (6.16) существует в смысле главного значения; его предельные значения удовлетворяют условию скачка (6.14); функция  $\mathcal{F}(\zeta) = \mathcal{S}(\zeta) \mathcal{T}(\zeta)$ , где  $\mathcal{S}$  определяется из (6.10), принадлежит классу  $\mathcal{H}$ , а ее предельные значения  $\mathcal{F}^\pm(\xi) = \mathcal{S}(\xi) \mathcal{T}^\pm(\xi)$  удовлетворяют условию скачка (6.8);

2) функция  $\mathcal{T}(\zeta)$  удовлетворяет условию комплексного уравновешивания

$$\mathcal{T}^-(\zeta) = \overline{\mathcal{T}^+(\bar{\zeta})}, \quad \zeta \in \mathbb{H}^-; \quad (6.17)$$

3) функция  $\mathcal{T}(\zeta)$  имеет в конечных точках  $\xi_k$  следующую асимптотику:

$$\mathcal{T}(\zeta) = \begin{cases} \mathcal{O}[(\zeta - \xi_k)^{-\alpha_k}], & n_k = 0; \\ \mathcal{O}(1), & n_k > 0; \end{cases} \quad \zeta \rightarrow \xi_k; \quad (6.18)$$

4) функция  $\mathcal{T}(\zeta)$  имеет в бесконечной точке  $\xi_0$  следующую асимптотику:

$$\mathcal{T}(\zeta) = \begin{cases} \mathcal{O}(\zeta^{-\alpha_0}), & n_0 = 0; \\ \mathcal{O}(\zeta^{-1} \ln \zeta), & n_0 = 1, \alpha_0 = 0; \\ \mathcal{O}(\zeta^{-1}), & n_0 = 1, \alpha_0 \neq 0 \quad n_0 > 1; \end{cases} \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (6.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1.4 дано в приложении В на стр. 255.

Из теоремы 1.4 непосредственно вытекает, что при неотрицательном индексе  $\varkappa$  функция  $\mathcal{F} = \mathcal{S} \mathcal{T}$ ,

$$\mathcal{F}(\zeta) = \frac{\mathcal{S}(\zeta)}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{D}(t) dt}{t - \zeta} \in \mathcal{H}, \quad (6.20)$$

является решением задачи о скачке (6.8), удовлетворяющим в соответствии с (6.10), (6.17) условию комплексного уравновешивания (6.6), а согласно (6.10), (6.18), (6.19) — условиям роста (6.7); точнее говоря, функция  $\mathcal{F}(\zeta)$  имеет в бесконечности несколько меньший порядок роста, чем  $\zeta^\varkappa$ , что, однако, не противоречит условию (6.7).

Тогда функция  $\mathcal{N}(\zeta)$ , определяемая в соответствии с (6.5) равенством  $\mathcal{N} = X\mathcal{F}$ , т.е. с учетом (6.20) — формулой

$$\mathcal{N}(\zeta) = \frac{\mathcal{S}(\zeta) X(\zeta)}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{g(t) dt}{\mathcal{S}(t) X^+(t) (t - \zeta)} \in \mathcal{H}, \quad \varkappa \geq 0, \quad (6.21)$$

является решением задачи сопряжения (6.1), удовлетворяющим согласно (5.6), (6.6) условию комплексного уравновешивания (6.2). Из соотношений (5.7), (5.16), (6.10), (6.18), (6.19) вытекает, что  $\mathcal{N}(\zeta)$  в точках  $\xi_k$  ( $k = \overline{0, N}$ ) имеет рост (6.3), (6.4). Точнее, в точке  $\zeta = \infty$  функция  $\mathcal{N}(\zeta)$  имеет следующую асимптотику:

$$\mathcal{N}(\zeta) = \begin{cases} \mathcal{O}(1), & n_o = 0; \\ \mathcal{O}(\ln \zeta), & n_o = 1, \alpha_o = 0; \\ \mathcal{O}(\zeta^{\alpha_o + n_o - 1}), & n_o = 1, \alpha_o \neq 0 \text{ или } n_o > 1; \end{cases} \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad (6.22)$$

т.е. растет медленнее, чем  $\zeta^{\alpha_o + n_o}$ ; однако, поведение (6.22) не противоречит условию  $\mathcal{O}(\zeta^{\alpha_o + n_o})$ , указанному в (6.4). Таким образом, при  $\varkappa \geq 0$  частное решение  $\mathcal{N}(\zeta)$  задачи сопряжения (3.22)–(3.24), (3.26)–(3.30) построено.

6.2.2<sup>0</sup>. Решение задачи о скачке при отрицательном индексе  $\varkappa$ . Пусть индекс  $\varkappa$  отрицателен. Тогда решение  $\mathcal{F}$  задачи о скачке (6.6)–(6.8) будем, как и в случае положительного  $\varkappa$ , искать в виде  $\mathcal{F}(\zeta) = \mathcal{S}(\zeta) \mathcal{T}(\zeta)$ , но функцию  $\mathcal{S}(\zeta)$  будем определять иначе, а именно, по формуле

$$\mathcal{S}(\zeta) = (\zeta - \lambda)^\varkappa, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \Xi. \quad (6.23)$$

Очевидно, что функции  $\mathcal{T}^+ \in \mathcal{H}^+$  и  $\mathcal{T}^- \in \mathcal{H}^-$  должны удовлетворять условию скачка (6.14), где  $\mathcal{D}(\xi)$  определяется из (6.15) с  $\mathcal{S}$  из (6.23), а также условию (6.18) комплексного уравновешивания.

С помощью (6.7), (6.13) и (6.23) нетрудно убедиться, что функция  $\mathcal{T}(\zeta)$  на бесконечности ограничена, а в конечных точках  $\xi_k$  ограничена или имеет интегрируемую особенность:

$$\mathcal{T}(\zeta) = \mathcal{O}(1), \quad \zeta \rightarrow \infty; \quad \mathcal{T}(\zeta) = \mathcal{O}[(\zeta - \xi_k)^{-\alpha_k}], \quad \zeta \rightarrow \xi_k. \quad (6.24)$$

**Предложение 1.12.** *Решение задачи о скачке (6.14), (6.24) с правой частью  $\mathcal{D}$ , определяемой из (6.15), (6.23), единствено с точностью до вещественного постоянного слагаемого.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Действительно, если функции  $\mathcal{T}(\zeta)$  и  $\mathcal{T}_1(\zeta)$  являются решениями этой задачи, то их разность  $\tilde{\mathcal{T}}(\zeta) := \mathcal{T}(\zeta) - \mathcal{T}_1(\zeta)$  удовлетворяет на вещественной оси однородному условию скачка:

$$\tilde{\mathcal{T}}^+(\xi) - \tilde{\mathcal{T}}^-(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \Xi,$$

из которого вытекает, что функция  $\tilde{\mathcal{T}}(\zeta)$  аналитична и однозначна в окрестности каждой из точек  $\xi_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ . Таким образом, эта функция разлагается в точках  $\xi_k$  в ряд Лорана, главная часть которого, в силу условия

$$\tilde{\mathcal{T}}(\zeta) = \mathcal{O} [(\zeta - \xi_k)^{-\alpha_k}], \quad \zeta \rightarrow \xi_k,$$

равна нулю. Отсюда находим, что функция  $\tilde{\mathcal{T}}(\zeta)$  аналитична в конечной плоскости (включая точки  $\xi_k$ ), а на бесконечности ограничена, поскольку ограниченными являются  $\mathcal{T}(\zeta)$  и  $\mathcal{T}_1(\zeta)$  согласно первой формуле (6.24); тогда по теореме Лиувилля функция  $\tilde{\mathcal{T}}(\zeta)$  равна постоянной величине, которая в силу условия (6.18) вещественна, что и требовалось доказать.

Частное решение  $\mathcal{T}$  задачи (6.14), (6.18), (6.24) можно представить в виде интеграла типа Коши (6.16) с плотностью  $\mathcal{D}(\xi)$ , определяемой по формуле (6.15), где функция  $\mathcal{S}(\zeta)$  дается выражением (6.23). Такую возможность устанавливает следующее

**Предложение 1.13.** *Для случая I, т.е. в предположении (3.8), и отрицательном индексе  $\kappa$  справедливы утверждения 2)–4) теоремы 1.4 для функции  $\mathcal{T}$ , а первое утверждение заменяется на следующее: интеграл (6.16) существует в смысле главного значения и принадлежит классу  $\mathcal{H}$ , а его предельные значения удовлетворяют условию скачка (6.14); предельные значения  $\mathcal{F}^\pm(\xi) = \mathcal{S}(\xi) \mathcal{T}^\pm(\xi)$  удовлетворяют условию скачка (6.8).*

Заметим, что из этого предложения не вытекает существование решения задачи (6.6)–(6.8), поскольку  $\mathcal{F}(\zeta) = \mathcal{S}(\zeta) \mathcal{T}(\zeta)$ , вообще говоря, не принадлежит  $\mathcal{H}$  из-за того, что точка  $\zeta = \lambda$  является особой для функции  $\mathcal{S}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.13. Функция  $1/\mathcal{S}(\zeta)$ , определяемая при помощи формулы (6.23), на вещественной оси обладает бесконечной гладкостью. Опираясь на это свойство и проводя рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве утверждения 1) теоремы 1.4, устанавливаем требуемые утверждения. Предложение доказано.

Из предложений 1.12, 1.13 следует, что общее решение задачи (6.14), (6.18), (6.24) при отрицательном индексе  $\varkappa$  имеет вид

$$\mathcal{T}^\pm(\zeta) = C + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{D}(t) dt}{t - \zeta}, \quad \zeta \in \mathbb{H}^\pm, \quad (6.25)$$

где  $C$  – вещественная постоянная. Из формулы (6.13) с учетом (6.23) находим выражение для  $\mathcal{F}(\zeta)$

$$\mathcal{F}(\zeta) = (\zeta - \lambda)^\varkappa \mathcal{T}(\zeta), \quad (\varkappa < 0), \quad (6.26)$$

откуда следует, что эта функция, вообще говоря, неограниченно возрастает при стремлении  $\zeta$  к точке  $\lambda$ , что противоречит требованию  $\mathcal{F} \in \mathcal{H}$ . Очевидно, что для справедливости включения  $\mathcal{F} \in \mathcal{H}$  необходимо и достаточно выполнения условия

$$\mathcal{T}(\zeta) = \mathcal{O}\left[(\zeta - \lambda)^{|\varkappa|}\right], \quad \zeta \rightarrow \lambda. \quad (6.27)$$

Для того чтобы выразить это условие через данные задачи (6.1)–(6.4), запишем ядро Коши в виде

$$\frac{1}{t - \zeta} = \sum_{k=0}^{|\varkappa|-1} \frac{(\zeta - \lambda)^k}{(t - \lambda)^{k+1}} + \frac{(\zeta - \lambda)^{|\varkappa|}}{(t - \lambda)^{|\varkappa|} (t - \zeta)}$$

и подставим правую часть этой формулы в интеграл (6.25), плотность которого с учетом (6.15), (6.23) имеет вид

$$\mathcal{D}(t) = (t - \lambda)^{|\varkappa|} \frac{g(t)}{X^+(t)}.$$

Почленное интегрирование полученной суммы дает

$$\mathcal{T}(\zeta) = C + \sum_{k=0}^{|\varkappa|-1} c_k (\zeta - \lambda)^k + \frac{(\zeta - \lambda)^{|\varkappa|}}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{g(t) dt}{X^+(t)(t - \zeta)}, \quad (6.28)$$

где коэффициенты  $c_k$  определяются равенствами

$$c_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{(t - \lambda)^{|\varkappa| - k - 1} g(t) dt}{X^+(t)}, \quad k = 0, 1, \dots, |\varkappa| - 1. \quad (6.29)$$

Тогда согласно (6.27)–(6.29) находим, что для ограниченности функции  $\mathcal{F}(\zeta)$  в точке  $\zeta = \lambda$  необходимо и достаточно выполнение условий

$$c_0 + C = 0; \quad c_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, |\varkappa| - 1.$$

Поскольку  $C$  — произвольная постоянная, то полагая  $C = -c_0$ , получаем из (6.29) выражение для  $C$

$$C = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{(t - \lambda)^{|\varkappa| - 1} g(t) dt}{X^+(t)}, \quad (6.30)$$

и, таким образом, для разрешимости задачи (6.6)–(6.8), а следовательно, и задачи (6.1)–(6.4), в случае отрицательного индекса необходимо и достаточно удовлетворение ( $|\varkappa| - 1$ ) условий  $c_k = 0$ , где  $k = 1, 2, \dots, |\varkappa| - 1$ , что эквивалентно одновременному выполнению следующих равенств:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{t^k \sigma(t) dt}{\chi(t) X^+(t)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, |\varkappa| - 2, \quad (6.31)$$

где  $\chi$  и  $\sigma$  — данные задачи Римана — Гильберта (3.11).

**Предложение 1.14.** *При  $\varkappa = -1$  единственным решением задачи сопряжения (6.1)–(6.4) является функция  $\mathcal{N}$ , определяемая по формуле*

$$\mathcal{N}(\zeta) = \frac{X(\zeta)}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{g(t) dt}{X^+(t)(t - \zeta)}, \quad \varkappa < 0. \quad (6.32)$$

*При  $\varkappa < -1$  решение задачи сопряжения также имеет вид (6.32), если выполнены условия разрешимости (6.31). Если же условия (6.31) не выполнены, то указанная задача неразрешима.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Требуемые утверждения вытекают из рассуждений, приведенных перед формулировкой настоящего предложения, а также формул (6.5), (6.25), (6.26), (6.30) и предложений 1.12, 1.13. Предложение доказано.

### 6.3. Частное решение неоднородной задачи Римана — Гильберта.

6.3.1<sup>o</sup>. Построение частного решения для случая I. Используя предложение 1.3 и учитывая формулу (6.21) и предложение 1.14, приходим к следующему утверждению о частном решении задачи Римана — Гильберта.

**Предложение 1.15.** (i) *Если индекс  $\kappa$ , вычисляемый по формуле (5.17), неотрицателен, то функция  $\mathcal{N}^+ \in \mathcal{H}^+$ , определяемая равенством (6.21), является частным решением задачи Римана — Гильберта (3.11)–(3.13); здесь  $X^+(\zeta)$  — каноническое решение, определяемое по формуле (5.15), а функции  $\mathcal{S}(\zeta)$  дается равенством (6.10).*

(ii) *Если  $\kappa = -1$ , то единственным решением задачи Римана — Гильберта (3.11)–(3.13) из класса  $\mathcal{H}^+$  является функция  $\mathcal{N}^+(\zeta)$ , определяемая по формуле (6.32).*

*Если же  $\kappa < -1$  и выполняются условия (6.31), то единственным решением задачи Римана — Гильберта (3.11)–(3.13) из класса  $\mathcal{H}^+$  является функция  $\mathcal{N}^+(\zeta)$ , определяемая по формуле (6.32). Если  $\kappa < -1$  и условия (6.31) не выполнены, то задача (3.11)–(3.13) в классе  $\mathcal{H}^+$  не имеет решений.*

6.3.2<sup>o</sup>. Построение частного решения для случая II. Повторяя рассуждения из п. 6, использованные при получении частного решения в случае I, устанавливаем следующий аналог предложения 1.15 для случая II.

**Предложение 1.16.** *Пусть в одной или нескольких точках  $\xi_k$ , фигурирующих в постановке задачи Римана — Гильберта (3.11)–(3.13) и обозначаемых  $\xi_{k_m}$ , одновременно выполняются соотношения (3.14), т.е. имеет место случай II. Тогда после замены в этих точках условий (3.12), (3.13) соответственно на (3.15), (3.16) для частного решения  $\mathcal{N}^+ \in \mathcal{H}^+$  этой задачи справедливы следующие утверждения:*

(i) *Пусть индекс  $\kappa$  неотрицателен. Если соотношения (3.14) одновременно не выполняются для бесконечно удаленной точки  $\xi_{k_0} = \xi_0$ , то справедливо утверждение (i) из предложения 1.15. Если же соотношения (3.14) одновременно выполняются в  $\xi_{k_0} = \xi_0$ , то функцию  $\mathcal{S}(\zeta)$  в формуле (6.21)*

для частного решения  $\mathcal{N} \in \mathcal{H}^+$  следует определять равенством

$$\mathcal{S}(\zeta) := (\zeta - \lambda)^{2\{\varkappa/2\}} (\zeta^2 + 1)^{[\varkappa/2]} (\zeta - \tilde{\lambda}); \quad \lambda, \tilde{\lambda} \in \mathbb{R} \setminus \{\xi_k\}, \quad \lambda \neq \tilde{\lambda}. \quad (6.33)$$

(ii) Пусть индекс  $\varkappa$  отрицателен. Тогда справедливо утверждение (ii) из предложения 1.15.

**6.4. Общее решение для неоднородной задачи Римана — Гильберта.** Полное решение задачи (3.12)–(3.11) получается добавлением некоторого частного решения  $\mathcal{N}^+(\zeta)$  к решению  $\Psi^+(\zeta)$  однородной задачи (5.1)–(5.4):  $\mathcal{P}^+ = \Psi^+ + \mathcal{N}^+$ . Тогда из теоремы 1.3 и предложений 1.15, 1.16 вытекает следующая

**Теорема 1.5.** I) Пусть выполняются условия (3.2), (3.8). Тогда справедливы утверждения:

(i) Если индекс  $\varkappa$ , определяемый по формуле (5.17), неотрицателен, то решение  $\mathcal{P}^+ \in \mathcal{H}^+$  задачи Римана — Гильберта (3.2), (3.11)–(3.13) имеет вид

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = X^+(\zeta) \left[ P_\varkappa(\zeta) + \frac{\mathcal{S}(\zeta)}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sigma(t) dt}{\mathcal{S}(t) \chi(t) X^+(t) (t - \zeta)} \right], \quad (6.34)$$

где  $P_\varkappa(\zeta)$  — произвольный полином степени  $\varkappa$  с вещественными коэффициентами,  $X^+(\zeta)$  — каноническое решение задачи, определяемое равенством

$$X^+(\zeta) = \prod_{k=1}^N (\zeta - \xi_k)^{-\beta_k - n_k} e^{\mathcal{M}^+(\zeta)}, \quad (6.35)$$

а  $\mathcal{M}^+(\zeta)$  и  $\mathcal{S}(\zeta)$  даются формулами (4.11) и (6.10).

(ii) Если  $\varkappa = -1$ , то единственным решением  $\mathcal{P}^+ \in \mathcal{H}^+$  рассматриваемой задачи является функция

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = \frac{X^+(\zeta)}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sigma(t) dt}{\chi(t) X^+(t) (t - \zeta)}. \quad (6.36)$$

Если  $\varkappa < -1$  и выполняются условия (6.31), то единственное решение задачи из  $\mathcal{H}^+$  дается формулой (6.36). Если же  $\varkappa < -1$  и условия (6.31) не выполнены, то эта задача в классе  $\mathcal{H}^+$  не имеет решений.

II) Пусть выполняются условия (3.2), (3.9). Тогда в конечных точках  $\xi_{k_m}$ , где одновременно выполняются соотношения (3.14), условие (3.12) в постановке задачи следует заменить на (3.15), а представления (6.34) при  $\varkappa \geq 0$  и (6.36) при  $\varkappa < 0$  для решения  $\mathcal{P}^+ \in \mathcal{H}^+$  сохраняются. Если же (3.14) имеет место для  $\xi_{k_0} = \infty$ , то условие (3.13) следует заменить на (3.16), представление (6.36) при  $\varkappa < 0$  сохраняется, а функцию  $\mathcal{S}(\zeta)$  в представлении (6.34) при  $\varkappa \geq 0$  для решения следует определять равенством (6.33).

## Г л а в а II

# Развитие теории функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$

## §1. Обобщенная гипергеометрическая функция $F_D^{(N)}$

**1.1. Функция Лауричеллы и некоторые ее приложения.** Рассматриваемая в настоящей главе функция

$$F_D^{(N)}(a_1, \dots, a_N; b, c; z_1, \dots, z_N) \quad (1.1)$$

была введена Дж.Лауричеллой [194] в качестве одного из обобщений гипергеометрической функции Гаусса  $F(a, b; c; z)$  на случай  $N$  комплексных переменных  $z_1, \dots, z_N$  и соответствующих им комплексных параметров  $a_1, \dots, a_N$ . В его работе [194] был также установлен вид системы уравнений с частными производными, которой удовлетворяет функция  $F_D^{(N)}$ . Исследованию этой системы и самой функции  $F_D^{(N)}$  посвящены работы многих авторов, см., например, фундаментальные статьи и монографии [89], [139], [142], [163], [168], [169], [185], [203], [209].

Интерес к функции  $F_D^{(N)}$ , как и к другим обобщенным гипергеометрическим функциям, вызван не только ее большим теоретическим значением в математической физике, но и многочисленными актуальными приложениями, где она возникает. Среди таких приложений отметим задачи астрофизики [175], квантовой теории поля [189], [198], теории относительности [192], некоторые проблемы передачи информации [207], теории вероятности и математической статистики [160], [191], [195].

Найденные в диссертационной работе соотношения типа Якоби для функции  $F_D^{(N)}$  играют ключевую роль при выводе принципиально нового представления для решения задачи Римана — Гильберта с кусочно-постоянными данными в виде интеграла типа Кристоффеля — Шварца. Получению этого представления посвящена Глава III. Построенные формулы аналитического продолжения функции  $F_D^{(N)}$  находят приложение, в частности, при решении известной трудной *проблемы кроудинга* [237] для параметров интеграла Кристоффеля — Шварца. В главе IV представлен пример решения задачи о нахождении параметров этого интеграла для отображение многоугольной области, возникающей в связи с астрофизическими задачами.

В следующем п. 1.2 приведены необходимые сведения из теории функции Лауринеллы (1.1), а в п. 1.3 сформулированы полученные в настоящей главе результаты для этой функции.

**1.2. Обобщенный гипергеометрический ряд, система уравнений с частными производными и интегральные представления.** Изучаемую функцию Лауринеллы (1.1), зависящую от  $N$  комплексных переменных  $z_1, z_2, \dots, z_N$  и комплексных параметров  $a_1, a_2, \dots, a_N, b$  и  $c$ , будем для краткости обозначать через  $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ , где  $\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_N)$  и  $\mathbf{z} := (z_1, \dots, z_N)$  — векторы из  $\mathbb{C}^N$ . Эта функция определяется в виде следующего  $N$ -кратного степенного ряда, см. [169], [185], [194]:

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{|\mathbf{k}|} (a_1)_{k_1} \dots (a_N)_{k_N}}{(c)_{|\mathbf{k}|} k_1! \dots k_N!} z_1^{k_1} \dots z_N^{k_N}, \quad (1.2)$$

где суммирование ведется по векторному индексу  $\mathbf{k} := (k_1, \dots, k_N)$  с неотрицательными целыми компонентами  $k_j \geq 0, j = 1, \dots, N$ , для которого модуль  $|\mathbf{k}|$ , как обычно, означает сумму всех элементов, т.е.

$$|\mathbf{k}| := \sum_{j=1}^N k_j.$$

Выражение  $(a)_k$ , традиционно называемое символом Похгаммера (см., например, [19]), определяется через гамма-функцию  $\Gamma(s)$  с помощью

равенства

$$(a)_k := \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} \quad (1.3)$$

и представляет собой для целых неотрицательных  $k$  произведение вида

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

Параметр  $c$  в формуле (1.2) не принимает целых неположительных значений, т.е.  $c \notin \mathbb{Z}^-$ .

Обобщенный гипергеометрический ряд (1.2), которым определяется  $F_D^{(N)}$ , сходится в единичном поликруге

$$\mathbb{U}^N := \{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |z_j| < 1, j = \overline{1, N} \}.$$

Как известно [194], см. также [142], [169], [185], функция  $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$  удовлетворяет следующей системе из  $N$  линейных уравнений в частных производных второго порядка по переменным  $z_j$ :

$$\begin{aligned} & z_j(1-z_j) \frac{\partial^2 u}{\partial z_j^2} + (1-z_j) \sum_{k=1}^N' z_k \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial z_k} + \\ & + [c - (1+a_j+b)z_j] \frac{\partial u}{\partial z_j} - a_j \sum_{k=1}^N' z_k \frac{\partial u}{\partial z_k} - a_j b u = 0, \quad j = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где "штрих" над суммой означает, что суммирование ведется по  $k \neq j$ ; параметры  $\mathbf{a}$ ,  $b$  и  $c$  входят в выражения для коэффициентов уравнений. Особым множеством  $\mathcal{M}$  системы (1.5) является объединение гиперплоскостей

$$\mathcal{M}_j^{(\tau)} := \{ \mathbf{z} \in \overline{\mathbb{C}}^N : z_j = \tau \}, \quad \tau \in \mathcal{S} := \{0, 1, \infty\},$$

и гиперплоскостей  $\mathcal{M}_{j,l} := \{ \mathbf{z} \in \overline{\mathbb{C}}^N : z_j = z_l \}$ ; здесь  $j, l = \overline{1, N}$ ,  $j \neq l$ . В частности, множеству  $\mathcal{M}$  принадлежат такие точки  $\mathbf{z} \in \overline{\mathbb{C}}^N$ , у которых для всех компонент  $z_j$  выполняется включение  $z_j \in \mathcal{S}$ . Будем обозначать через  $\mathbf{z}_p^{(1,\infty)}$  точки особого множества, у которых первые  $p$  компонент равны единице, а остальные  $(N-p)$  — бесконечности:

$$\mathbf{z}_p^{(1,\infty)} := (\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{\infty, \dots, \infty}_{(N-p)})$$

Точки множества  $\mathcal{M}$ , все  $N$  компонент которых равны 1, будем обозначать

$$\mathbf{z}^{(1)} := (\underbrace{1, \dots, 1}_N),$$

а точки, все  $N$  компонент которых равны  $\infty$ , обозначаем

$$\mathbf{z}^{(\infty)} := (\underbrace{\infty, \dots, \infty}_N).$$

В окрестности любой точки  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$  определены  $(N+1)$  линейно независимых решения этой системы (1.5), и таким образом, ее общее решение зависит от  $(N+1)$ -й произвольной комплексной постоянной, см. [169].

Под функцией  $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$  при  $\mathbf{z} \in \mathbb{U}^N$  понимается ряд (1.2), а при  $\mathbf{z} \notin \mathbb{U}^N$  — его аналитическое продолжение. Такое продолжение в область

$$\mathbb{L}^N := \{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |\arg(1 - z_j)| < \pi, j = \overline{1, N} \}$$

может быть осуществлено с помощью следующего интегрального представления для  $F_D^{(N)}$ , приведенного, например, в [169] и обобщающего известную формулу Эйлера [19], [127] для функции Гаусса  $F$ :

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b) \Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1} (1-t)^{c-b-1}}{\prod_{j=1}^N (1 - t z_j)^{a_j}} dt. \quad (1.6)$$

Здесь предполагается  $\operatorname{Re} b > 0, \operatorname{Re}(c-b) > 0$ ; правая часть (1.6), как нетрудно увидеть, является однозначной в  $\mathbb{L}^N$  функцией.

Отметим, что в случае одной переменной, т.е. при  $N = 1$ , ряд (1.2), определяющий функцию Лауричеллы  $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ , совпадает с классическим гипергеометрическим рядом [19], [127] для функции Гаусса, а система уравнений (1.5) при этом переходит в классическое гипергеометрическое уравнение. Элементы теории функции Гаусса, необходимые для целей настоящей работы, приведены ниже в § 2. В случае двух переменных, т.е. при  $N = 2$ , обобщенный гипергеометрический ряд (1.2) совпадает с известной функцией  $F_1(a, a'; b, c; z, \zeta)$ , введенной П.Аппéлем, см. [19], [141], [142].

При дальнейших рассмотрениях будет использовано следующее (известное) представление  $F_D^{(N)}$ , справедливое при  $|z_j| < 1$ :

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b; c; \mathbf{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_j)_k (b)_k}{(c)_k k!} z_j^k F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_j; b+k, c+k; \mathbf{z}'_j), \quad (1.7)$$

где фигурируют векторы  $\mathbf{a}'_j$  и  $\mathbf{z}'_j$ , получаемые из векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{z}$  исключением  $j$ -й компоненты:

$$\mathbf{a}'_j := (a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_N), \quad \mathbf{z}'_j := (z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_N). \quad (1.8)$$

Формулу (1.7) можно вывести, например, из формулы (1.6), разлагая в знаменателе подынтегрального выражения  $j$ -й сомножитель по степеням  $(tz_j)^k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , почленно интегрируя полученное разложение и применяя представление (1.6) для функции Лауричеллы с  $(N-1)$  переменными.

Приведем формулу дифференцирования [169]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_j} F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b; c; \mathbf{z}) &= \\ &= \frac{a_j b}{c} F_D^{(N)}(a_1, \dots, a_j + 1, \dots, a_N; b + 1, c + 1; z_1, \dots, z_N) \end{aligned} \quad (1.9)$$

и укажем еще, что значение  $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ , очевидно, не изменяется при произвольной перестановке любого числа переменных  $z_j$  и одновременной перестановке соответствующих им параметров  $a_j$ . Точнее говоря, имеет место соотношение

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = F_D^{(N)}(\sigma(\mathbf{a}); b, c; \sigma(\mathbf{z})), \quad (1.10)$$

где  $\sigma(\mathbf{a})$  и  $\sigma(\mathbf{z})$  суть векторы, полученные из векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{z}$  в результате действия некоторого элемента  $\sigma \in S_N$  группы  $S_N$  перестановок множества из  $N$  элементов.

### 1.3. Замечания о полученных в работе результатах.

1.3.1<sup>o</sup>. Формулы типа Якоби. В §3 настоящей главы установлена система дифференциальных соотношений для функции  $F_D^{(N)}$ , являющихся прямым обобщением классического тождества Якоби [19], [127], [187], [212] для

функции Гаусса  $F(a, b; c; z)$ . Частный случай этих соотношений применен в главе III к выводу представления решения задачи Римана — Гильберта с кусочно-постоянными данными в виде интеграла Кристоффеля — Шварца. Необходимо отметить, что вывод новых дифференциальных соотношений для обобщенных гипергеометрических функций, в том числе для функции Лауричеллы, является актуальной задачей, важной как с теоретической, так и с прикладной точек зрения; ей посвящены работы многих авторов, см., например, [139], [154], [155].

1.3.2<sup>0</sup>. **Формулы аналитического продолжения.** Важной нерешенной задачей в теории функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}$  является построение аналитического продолжения ряда (1.2) во внешность поликруга  $\mathbb{U}^N$  в виде линейных комбинаций частных решений  $u_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$  системы (1.5), т.е. поиск представлений вида:

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{j=0}^N \lambda_j u_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \notin \mathbb{U}^N. \quad (1.11)$$

Здесь предполагается, что функции  $u_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$  в свою очередь выражаются через некоторые обобщенные гипергеометрические ряды, сходящиеся на множествах, имеющих непустое пересечение с  $\mathbb{C}^N \setminus \mathbb{U}^N$ ; вид этих рядов, вообще говоря, отличен от (1.2). Коэффициенты  $\lambda_j$  зависят от параметров  $a_1, \dots, a_N, b, c$  и не обращаются в нуль одновременно. Представления вида (1.11) естественно называть *формулами аналитического продолжения* функции Лауричеллы. Эти формулы являются аналогами соответствующих представлений [19], [127] для функции Гаусса.

Формулы аналитического продолжения функции  $F_D^{(N)}$  дают удобный аппарат для качественного анализа и эффективного вычисления интеграла (2.1) в  $\mathbb{L}^N \setminus \mathbb{U}^N$ . Отметим, что хотя такой интеграл сам осуществляет аналитическое продолжение ряда (1.2) в область  $\mathbb{L}^N$ , но он при этом не дает адекватного представления функции  $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$  вблизи ее особых многообразий, которые, разумеется, являются особыми и для системы уравнений (1.5). Поэтому

вычисление функции Лауричеллы в  $\mathbb{L}^N \setminus \mathbb{U}^N$  с помощью представления (2.1) наталкивается на серьезные трудности, особенно если аргумент  $\mathbf{z}$  близок к точкам  $\mathbf{z}_p^{(1,\infty)}$ , и, в частности, к  $\mathbf{z}^{(1)}$  или  $\mathbf{z}^{(\infty)}$ . Отметим, что, как показано в [16], высокоточное вычисление интегралов вида (2.1), в том числе вблизи  $\mathbf{z}^{(1)}$  и  $\mathbf{z}^{(\infty)}$ , является одним из ключевых аспектов в решении известной *проблемы кроудинга* [237] для параметров интеграла Кристоффеля — Шварца. Если  $\mathbf{z} \in \mathbb{U}^N$ , то для эффективного вычисления (2.1) может быть применен ряд (1.2), который в  $\mathbb{U}^N$  сходится экспоненциально. Для вычисления функции  $F_D^{(N)}$  вне  $\mathbb{U}^N$  необходимо использовать найденные в настоящей работе формулы ее аналитического продолжения.

Результаты теории аналитического продолжения функции Гаусса изложены, например, книгах в [19] и [127]. Развитие этих результатов на случай функции Аппеля  $F_1$  дано в работе [203], где была построена система формул такого продолжения  $F_1 = F_D^{(2)}(a, a'; b, c; z, \zeta)$  в *нелогарифмическом случае*, т.е. когда параметры  $a, a', b$  и  $c$  не связаны специальными целочисленными соотношениями (подробно об этом см. §5). Некоторые формулы продолжения  $F_1$ , не установленные в [203], даны в [38]. Построение полной системы формул аналитического продолжения  $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$  при произвольном  $N \geq 3$  наталкивается на существенные трудности. Вопрос о таком продолжении для  $F_D^{(3)}$  изучался в книге [169] с помощью подхода из [203], основанного на переразложении рядов, однако не получил исчерпывающего решения. Для случая  $N \geq 4$ , по-видимому, известны лишь некоторые частные результаты.

В §4 настоящей главы для функции  $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$  при всех  $N \geq 2$  найден полный набор формул аналитического продолжения вида (1.11) в окрестность точек  $\mathbf{z}_p^{(1,\infty)} \in \overline{\mathbb{C}}^N$ , где  $p = 0, 1, \dots, N$ . В §5 получен полный набор формул аналитического продолжения функции Аппеля в логарифмическом случае.

## §2. Некоторые сведения о функции Гаусса $F(a, b; c; z)$

В настоящем параграфе приведены используемые в дальнейшем сведения из теории гипергеометрической функции Гаусса  $F(a, b; c; z)$ . Основная часть материала заимствована из [1], [19], [52], [176], [212].

**2.1. Гипергеометрический ряд и уравнение.** Гипергеометрическая функция Гаусса  $F(a, b; c; z)$ , зависящая от комплексного переменного  $z$  и набора комплексных параметров  $a$ ,  $b$  и  $c$ , представима в единичном круге  $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  следующим рядом:

$$F(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k, \quad (2.1)$$

где предполагается, что  $c \neq 0, -1, -2, \dots$ , а выражение  $(a)_k$  обозначает символ Похгаммера, определяемый формулой (1.4). Если  $z \notin \mathbb{U}$ , то под функцией  $F(a, b; c; z)$  понимается аналитическое продолжение ряда (2.1) в соответствующую область комплексной плоскости. Некоторые используемые в работе формулы такого продолжения приведены в п. 2.3.

Отметим, что функция  $F(a, b; c; z)$  является голоморфным в точке  $z = 0$  решением  $u(z)$  уравнения Гаусса

$$z(1-z)u''(z) + [c - (a+b+1)z]u'(z) - abu(z) = 0, \quad (2.2)$$

которое представляет собой уравнение класса Фукса с тремя (регулярными) особыми точками  $z = 0, 1$  и  $\infty$ . К этому уравнению, очевидно, редуцируется система (1.5), если в ней положить, что искомая функция  $u(z)$  не зависит от переменных  $z_2, \dots, z_N$  и приравнять соответствующие параметры  $a_2, \dots, a_N$  к нулю.

**2.2. Интегральные представления.** Если параметры функции Гаусса удовлетворяют соотношениям  $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ , то справедлива интегральная формула Эйлера

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1} (1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a} dt. \quad (2.3)$$

Правая часть этой формулы является однозначной аналитической функцией переменного  $z$  в области  $\mathbb{L} := \{z \in \mathbb{C} : |\arg(1 - z)| < \pi\}$  и дает, таким образом, аналитическое продолжение в эту область гипергеометрического ряда (2.1).

Функция Гаусса может быть записана в виде интегрального представления Барнса:

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{2\pi i \Gamma(a) \Gamma(b)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\Gamma(a+s) \Gamma(b+s) \Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)} (-z)^s ds. \quad (2.4)$$

Здесь здесь переменное  $z$  изменяется в области  $\{|\arg(-z)| < \pi\}$ , а путь интегрирования выбран таким, что полюсы функции  $\Gamma(-s)$ , расположенные в точках  $s = k$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ , и полюсы функции  $\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)$ , расположенные в точках  $s = -a - k$  и  $s = -b - k$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ , лежат соответственно справа и слева от него.

Известная лемма Барнса устанавливает следующее тождество:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\alpha + \gamma)\Gamma(\alpha + \delta)\Gamma(\beta + \gamma)\Gamma(\beta + \delta)}{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma + \delta)} &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Gamma(\alpha + s) \Gamma(\beta + s) \Gamma(\gamma - s) \Gamma(\delta - s) ds, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где путь интегрирования искривлен (если необходимо) так, что полюсы выражения  $\Gamma(\gamma - s) \Gamma(\delta - s)$ , т.е. точки  $s = \gamma + k$ ,  $s = \delta + k$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ , и полюсы выражения  $\Gamma(\alpha + s) \Gamma(\beta + s)$ , т.е. точки  $s = -\alpha - k$ ,  $s = -\beta - k$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ , лежат соответственно справа и слева от него.

**2.3. Канонические решения Куммера и аналитическое продолжение  $F(a, b; c; z)$ .** Из числа канонических решений Куммера укажем следующую пару функций, образующих полную систему в окрестности особой точки  $z = 1$ :

$$u_1^{(1)}(a, b; c; z) = F(a, b; a + b - c + 1; 1 - z), \quad (2.6)$$

$$u_2^{(1)}(a, b; c; z) = (1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b; c - a - b + 1; 1 - z), \quad (2.7)$$

а также еще одну пару функций, образующих полную систему в окрестности точки  $z = \infty$ :

$$u_1^{(\infty)}(a, b; c; z) = (-z)^{-a} F(a, 1 - c + a; 1 - b + a; z^{-1}), \quad (2.8)$$

$$u_2^{(\infty)}(a, b; c; z) = (-z)^{-b} F(b, 1 - c + b; 1 - a + b; z^{-1}). \quad (2.9)$$

В формулах (2.6)–(2.9) под символом  $F$  понимается гипергеометрический ряд (2.1), а верхний индекс в обозначениях функций  $u_j^{(1)}$  и  $u_j^{(\infty)}$ ,  $j = 1, 2$ , указывает на точку, вблизи которой они определены.

Важно отметить, что если параметры  $a$ ,  $b$  и  $c$  гипергеометрического уравнения (2.2) таковы, что число  $(c - a - b)$  является целым, то с помощью равенств (2.6) и (2.7) нельзя определить два линейно независимые решения  $u_1^{(1)}$  и  $u_2^{(1)}$  уравнения (2.2). Действительно, если  $(c - a - b) = 0$ , то как нетрудно убедиться, в этом случае правые части (2.6) и (2.7) будут совпадать. Если же  $(c - a - b) = m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , то третий параметр одной из функции  $F$  в этих формулах является целым неположительным числом  $(-m)$ , и все члены гипергеометрического ряда (2.1) для такой функции обращаются в бесконечность, начиная с номера  $m$ . Аналогичное замечание, очевидно, справедливо для формул (2.8) и (2.9), которые при целых  $(b - a)$  не определяют двух линейно независимых решений  $u_1^{(\infty)}$  и  $u_2^{(\infty)}$ .

Указанные выше особые случаи параметров  $a$ ,  $b$  и  $c$ , когда выполняется одно из соотношений

$$(c - a - b) \in \mathbb{Z}, \quad (b - a) \in \mathbb{Z},$$

принято называть *логарифмическими*, поскольку при этих условиях решение гипергеометрического уравнения (2.2) содержит не только степени величин  $z$  и  $(1 - z)$ , но и их логарифмы. Для того чтобы определить аналоги канонических решений (2.6)–(2.9) в логарифмическом случае, удобно ввести

в рассмотрение следующий ряд:

$$\begin{aligned} F_{ln}^{\pm}(a, b; 1 - m; z) &:= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (1 - m)_k} z^k + \\ &+ \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (k-m)!} [h_k^{\pm}(a, b, m) - \ln(\pm z)] z^k; \end{aligned} \quad (2.10)$$

здесь числа  $h_{k,m}^{\pm}(a, b)$  определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} h_k^+(a, b, m) &:= \tilde{h}_k - \psi(b+k), \quad h_k^-(a, b, m) := \tilde{h}_k - \psi(1-b-k), \\ \tilde{h}_k &:= \psi(1-m+k) + \psi(1+k) - \psi(a+k), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где  $\psi(s) = \Gamma'(s)/\Gamma(s)$  — логарифмическая производная гамма-функции, а первая сумма в (2.10) считается равной нулю при  $m = 0$  и единице при  $m = 1$ . Применение рядов  $F_{ln}^{\pm}$ , определяемых соотношениями (2.10), (2.11), позволяет существенно упростить традиционную запись канонических решений и формул аналитического продолжения, которые можно найти, например, в [19].

Пусть  $c = a + b + m$ , где  $m$  — произвольное неотрицательное целое число, т.е.  $m \in \mathbb{Z}^+$ . Тогда роль канонических решений (2.6), (2.7) для уравнения (2.2) в окрестности точки  $z = 1$  играют следующие функции:

$$u_1^{(1)}(a, b; a + b + m; z) = F_{ln}^+(a, b; 1 - m; 1 - z), \quad (2.12)$$

$$u_2^{(1)}(a, b; a + b + m; z) = (1 - z)^m F(a + m, b + m; 1 + m; 1 - z). \quad (2.13)$$

Если же  $c = a + b - m$ , где  $m \in \mathbb{Z}^+$ , то роль этих решений играют функции

$$u_1^{(1)}(a, b; a + b - m; z) = F(a, b; 1 + m; 1 - z), \quad (2.14)$$

$$u_2^{(1)}(a, b; a + b - m; z) = (1 - z)^{-m} F_{ln}^+(a - m, b - m; 1 - m; 1 - z). \quad (2.15)$$

Пусть  $b = a + m$  при некотором неотрицательном целом  $m$ . Тогда роль канонических решений (2.8), (2.9) для уравнения (2.2) в окрестности точки  $z = \infty$  играют функции:

$$u_1^{(\infty)}(a, a + m; c; z) = (-z)^{-a} F_{ln}^-(a, 1 - c + a; 1 - m; z^{-1}), \quad (2.16)$$

$$u_2^{(\infty)}(a, a+m; c; z) = (-z)^{-a-m} F(a+m, 1-c+a+m; 1+m; z^{-1}). \quad (2.17)$$

Если же  $a = b+m$ , где  $m \in \mathbb{Z}^+$ , то система канонических решений уравнения (2.2) вблизи  $z = \infty$  заменяется следующей:

$$u_1^{(\infty)}(b+m, b; c; z) = (-z)^{-b-m} F(b+m, 1-c+b+m; 1+m; z^{-1}), \quad (2.18)$$

$$u_2^{(\infty)}(b+m, b; c; z) = (-z)^{-b} F_{ln}^-(b, 1-c+b; 1-m; z^{-1}). \quad (2.19)$$

Определяемые с помощью равенств (2.6)–(2.9), (2.12)–(2.19) функции  $u_j^{(1)}$  и  $u_j^{(\infty)}$ ,  $j = 1, 2$ , являются основой для построения аналитического продолжения ряда (2.1) во внешность единичного круга. А именно, формула такого продолжения функции  $F(a, b; c; z)$  в область

$$\mathbb{K} := \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1, |\arg(1-z)| < \pi\} \quad (2.20)$$

для случая, когда число  $(c-a-b)$  не является целым, имеет вид

$$F(a, b; c; z) = A_1 u_1^{(1)}(a, b; c; z) + A_2 u_2^{(1)}(a, b; c; z), \quad (2.21)$$

где функции  $u_0^{(1)}$  и  $u_1^{(1)}$  определяются равенствами (2.6), (2.7), а коэффициенты  $A_0$  и  $A_1$  — следующими равенствами:

$$A_1 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)}, \quad A_2 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)}. \quad (2.22)$$

Если же  $c = a+b+m$  при  $m = 0, 1, 2, \dots$ , то формула продолжения в область (2.20) принимает вид

$$\begin{aligned} F(a, b; a+b+m; z) &= A_1 u_1^{(1)}(a, b; a+b+m; z), \\ A_1 &= \frac{\Gamma(a+b+m) (m-1)!}{\Gamma(a+m) \Gamma(b+m)}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где  $u_1^{(1)}$  дается равенством (2.12), а если  $c = a+b-m$  при  $m = 1, 2, \dots$ , то

$$\begin{aligned} F(a, b; a+b-m; z) &= A_2 u_2^{(1)}(a, b; a+b-m; z), \\ A_2 &= \frac{\Gamma(a+b-m) (m-1)!}{\Gamma(a) \Gamma(b)}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где  $u_2^{(1)}$  дается равенством (2.15).

Формула аналитического продолжения ряда (2.1) в область

$$\mathbb{V} := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1, |\arg(-z)| < \pi\} \quad (2.25)$$

для случая, когда число  $(b - a)$  не является целым, имеет вид

$$F(a, b; c; z) = B_1 u_1^{(\infty)}(a, b; c; z) + B_2 u_2^{(\infty)}(a, b; c; z), \quad (2.26)$$

где функции  $u_1^{(\infty)}$  и  $u_2^{(\infty)}$  определяются из (2.8), (2.9), а коэффициенты  $B_1$  и  $B_2$  даются равенствами

$$B_1 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(b - a)}{\Gamma(b) \Gamma(c - a)}, \quad B_2 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(a - b)}{\Gamma(a) \Gamma(c - b)}. \quad (2.27)$$

Если же  $b = a + m$ , при  $m = 0, 1, 2, \dots$ , то формула продолжения в область (2.25) принимает вид

$$\begin{aligned} F(a, a + m; c; z) &= B_1 u_1^{(\infty)}(a, a + m; c; z), \\ B_1 &= \frac{\Gamma(c) (m - 1)!}{\Gamma(a + m) \Gamma(c - a)}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где функция  $u_1^{(\infty)}$  дается равенством (2.16). Если  $a = b + m$ , при  $m = 1, 2, \dots$ , то формула аналитического продолжения в область (2.25) принимает вид

$$\begin{aligned} F(b + m, b; c; z) &= B_2 u_2^{(\infty)}(b + m, a; c; z), \\ B_2 &= \frac{\Gamma(c) (m - 1)!}{\Gamma(b + m) \Gamma(c - b)}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

где функция  $u_2^{(\infty)}$  определяется из (2.19).

**Замечание 2.1.** Отметим, что построенные в §4 и §5 формулы аналитического продолжения функций Лауричеллы  $F_D^{(N)}$  и Аппеля  $F_1$  являются прямым обобщением соотношений (2.21)–(2.29) на случай этих функций и переходят в них при  $N = 1$ .

#### 2.4. Ассоциированные гипергеометрические ряды и тождество

**Якоби.** Функции Гаусса, параметры которых отличаются на целые числа, т.е. функции вида  $F(a + k, b + m; c + n; z)$ , где  $k, m, n \in \mathbb{Z}$ , называют ассоциированными. В работе [219] Б.Риман установил, что если параметр  $c \notin \mathbb{Z}$ , то

любые три ассоциированные гипергеометрические функции связаны линейным однородным соотношением с полиномиальными коэффициентами, т.е. справедливо равенство:

$$\sum_{j=0}^2 Q_j(z) F(a + k_j, b + m_j; c + n_j; z) = 0, \quad (2.30)$$

где  $Q_j(z)$  — полиномы по переменному  $z$  с коэффициентами, зависящими от параметров  $a, b, c$  и (целых) чисел  $k_j, m_j, n_j$ . В частности, справедливо следующее тождество, которое нам потребуется в дальнейшем:

$$c F(a, b; c; z) - b z F(a, b + 1; c + 1; z) = c F(a - 1, b; c; z). \quad (2.31)$$

Известное тождество, найденное Якоби [187], которому удовлетворяет функция Гаусса, имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[ z^{c-1} (1-z)^{a+b-c} F(a, b; c; z) \right] &= \\ &= (c-1) z^{c-2} (1-z)^{a+b-c-1} F(a-1, b-1; c-1; z). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Отметим, что это тождество эквивалентно гипергеометрическому уравнению (2.2), см. [19].

### §3. Дифференциальные соотношения типа Якоби для функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$

#### 3.1. Тождества для ассоциированных функций Лауричеллы.

Функции  $F_D^{(N)}$ , параметры которых отличаются на целые числа, естественно называть ассоциированными по аналогии с функциями  $F(a+k, b+m; c+n; z)$ . Найденные в §4, §5 настоящей главы формулы аналитического продолжения  $F_D^{(N)}$  и набор решений системы уравнений (1.5) для этой функции позволяют выписать явные выражения для коэффициентов в соотношениях, аналогичных (2.30), которым удовлетворяют ассоциированные функции Лауричеллы. Не останавливаясь на подробном рассмотрении этого вопроса, приведем некоторые тождества для ассоциированных функций  $F_D^{(N)}$ , обобщающие формулу

(2.31). Эти тождества потребуются в п. 3.4 настоящего параграфа при доказательстве соотношений типа Якоби для функции Лауричеллы.

Введем обозначение  $\mathbf{a}_j$  для вектора, получаемого из вектора  $\mathbf{a}$  уменьшением на единицу  $j$ -й компоненты, т.е.

$$\mathbf{a}_j := (a_1, \dots, a_{j-1}, a_j - 1, a_{j+1}, \dots, a_N). \quad (3.1)$$

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.1.** *Для ассоциированных функций Лауричеллы имеют место соотношения*

$$c F_D^{(N)} (\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) - b z_j F_D^{(N)} (\mathbf{a}; b+1, c+1; \mathbf{z}) = c F_D^{(N)} (\mathbf{a}_j; b, c; \mathbf{z}), \quad (3.2)$$

для любого целого  $j = \overline{1, N}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Вначале убедимся в справедливости равенства (3.2) при  $j = 1$ , т.е. установим следующее соотношение

$$c F_D^{(N)} (\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) - b z_1 F_D^{(N)} (\mathbf{a}; b+1, c+1; \mathbf{z}) = c F_D^{(N)} (\mathbf{a}_1; b, c; \mathbf{z}). \quad (3.3)$$

Доказательство формулы (3.3) проведем методом индукции по числу  $N$  переменных функции Лауричеллы. Нетрудно увидеть, что при  $N = 1$  эта формула превращается в известное тождество (2.31) для ассоциированных гипергеометрических функций Гаусса.

Покажем, что равенство (3.3) верно, если предположить, что оно выполняется для функций Лауричеллы с числом переменных  $(N-1)$ , т.е. если имеет место соотношение

$$\begin{aligned} c F_D^{(N-1)} (\tilde{\mathbf{a}}; b, c; \tilde{\mathbf{z}}) - b z_1 F_D^{(N-1)} (\tilde{\mathbf{a}}; b+1, c+1; \tilde{\mathbf{z}}) &= \\ &= c F_D^{(N-1)} (\tilde{\mathbf{a}}_1; b, c; \tilde{\mathbf{z}}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где векторы  $\tilde{\mathbf{a}}$  и  $\tilde{\mathbf{z}}$  получаются соответственно из  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{z}$  исключением  $N$ -й компоненты:

$$\tilde{\mathbf{a}} := (a_1, \dots, a_{N-1}), \quad \tilde{\mathbf{z}} := (z_1, \dots, z_{N-1}). \quad (3.5)$$

Введем обозначение для выражения в левой части (3.3):

$$f(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := c F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) - b z_1 F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b+1, c+1; \mathbf{z}) \quad (3.6)$$

и разложим фигурирующие здесь функции  $F_D^{(N)}$  в ряды вида (1.7)

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b; c; \mathbf{z}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(a_N)_p (b)_p}{p! (c)_p} z_N^p F_D^{(N-1)}(\tilde{\mathbf{a}}; b+p; c+p; \tilde{\mathbf{z}}), \quad (3.7)$$

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b+1; c+1; \mathbf{z}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(a_N)_p (b+1)_p}{p! (c+1)_p} z_N^p F_D^{(N-1)}(\tilde{\mathbf{a}}; b+p+1; c+p+1; \tilde{\mathbf{z}}). \quad (3.8)$$

Подставляя эти разложения в (3.6), получаем

$$f(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(a_N)_p (b)_p}{p! (c+1)_p} z_N^p f_p(\tilde{\mathbf{a}}; b, c; \tilde{\mathbf{z}}), \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned} f_p(\tilde{\mathbf{a}}; b, c; \tilde{\mathbf{z}}) := & \frac{(c+1)_p}{(c)_p} c F_D^{(N-1)}(\tilde{\mathbf{a}}; b+p; c+p; \tilde{\mathbf{z}}) - \\ & - \frac{(b+1)_p}{(b)_p} b z_1 F_D^{(N-1)}(\tilde{\mathbf{a}}; b+p+1; c+p+1; \tilde{\mathbf{z}}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Учитывая следующие соотношения, вытекающие из определения символа Похгаммера (1.5):

$$\frac{(b+1)_p}{(b)_p} b = b+p, \quad \frac{(c+1)_p}{(c)_p} c = c+p, \quad (3.11)$$

перепишем (3.10) в виде

$$\begin{aligned} f_p(\tilde{\mathbf{a}}; b, c; \tilde{\mathbf{z}}) = & (c+p) F_D^{(N-1)}(\tilde{\mathbf{a}}; b+p; c+p; \tilde{\mathbf{z}}) - \\ & - (b+p) z_1 F_D^{(N-1)}(\tilde{\mathbf{a}}; b+p+1; c+p+1; \tilde{\mathbf{z}}), \end{aligned}$$

а принимая во внимание (3.4), получаем выражение для  $f_p$

$$f_p(\tilde{\mathbf{a}}; b, c; \tilde{\mathbf{z}}) = (c+p) F_D^{(N-1)}(\tilde{\mathbf{a}}_1; b+p; c+p; \tilde{\mathbf{z}}),$$

с учетом которого равенство (3.9) приобретает следующий вид:

$$f(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(a_N)_p (b)_p}{p! (c+1)_p} z_N^p (c+p) F_D^{(N-1)}(\tilde{\mathbf{a}}_1; b+p; c+p; \tilde{\mathbf{z}}).$$

Упрощая коэффициенты этого ряда с помощью равенства

$$\frac{(c+1)_p}{(c+p)} = \frac{(c)_p}{c},$$

вытекающего из второго соотношения (3.11), и применяя формулу (1.7) для функции Лауричеллы, находим

$$f(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = c F_D^{(N)}(\mathbf{a}_1; b, c; \mathbf{z}). \quad (3.12)$$

Таким образом, левая часть формулы (3.3), обозначенная в формуле (3.6) через  $f$ , преобразована к виду (3.12), совпадающему с правой частью (3.3), что и означает справедливость этой формулы. Ограничение  $|z_N| < 1$ , при котором проведено доказательство, легко устраняется с помощью принципа аналитического продолжения.

Применяя свойство симметрии (1.10) функции Лауричеллы к формуле (3.3), убеждаемся в справедливости равенства (3.2) при любом  $j = \overline{1, N}$ . Теорема 2.1 доказана.

**3.2. Система дифференциальных соотношений типа Якоби.** Введем обозначения, используемые при формулировке и доказательстве обобщения классического тождества Якоби (2.32) на случай функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ .

Напомним, что вектор  $\mathbf{a}_j$  дается формулой (3.1), и обозначим через  $\mathbf{a}_{j,s}$  вектор, получаемый из  $\mathbf{a}_j$  увеличением на единицу  $s$ -й компоненты, т.е.

$$\mathbf{a}_{j,s} := (a_1, \dots, a_j - 1, \dots, a_s + 1, \dots, a_N). \quad (3.13)$$

Под модулем вектора будем понимать сумму его элементов, так что, например, для вектора  $\mathbf{a}'_j$  из (1.8) имеем

$$|\mathbf{a}'_j| := \sum_{s=1, s \neq j}^N a_s. \quad (3.14)$$

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.2.** *Функция Лауричеллы  $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$  удовлетворяет дифференциальным соотношениям типа Якоби*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z_j} \left\{ \left[ \prod_{p=1}^N' (z_j - z_p)^{a_p} \right] z_j^{c-|\mathbf{a}'_j|-1} (1 - z_j)^{a_j+b-c} F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) \right\} = \\ & = \left[ \prod_{p=1}^N' (z_j - z_p)^{a_p-1} \right] z_j^{c-|\mathbf{a}'_j|-2} (1 - z_j)^{a_j+b-c-1} \mathcal{R}_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad j = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где  $\mathcal{R}_j$  определяется по формуле

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = & \left[ \prod_{p=1}^N' (z_j - z_p) \right] \left[ (c-1) F_D^{(N)}(\mathbf{a}_j; b-1, c-1; \mathbf{z}) + \right. \\ & \left. + \sum_{s=1}^N' a_s \frac{z_s(1-z_s)}{z_j - z_s} F_D^{(N)}(\mathbf{a}_{j,s}; b, c; \mathbf{z}) \right]; \end{aligned} \quad (3.16)$$

штрих над суммой или произведением означает, что  $s \neq j$  или  $p \neq j$ .

Доказательство теоремы 2.2 дано ниже в п. 3.4 настоящего параграфа. При этом используется установленное теоремой 2.1 соотношение для *ассоциированных* функций Лауричеллы.

**Замечание 2.2.** Нетрудно убедиться в том, что если число  $N$  переменных функции Лауричеллы равно единице, т.е. она совпадает с функцией Гаусса, то устанавливаемые теоремой 2.2 соотношения (3.15), (3.16) для  $F_D^{(N)}$  переходят в тождество Якоби (2.32) для  $F(a, b; c; z)$ . Действительно, при  $N = 1$  система формул (3.15), (3.16) сводится к одному равенству, а векторный параметр  $\mathbf{a}$  и векторный аргумент  $\mathbf{z}$  функции Лауричеллы содержат по одному элементу и переходят соответственно в скалярный параметр  $a$  и скалярный аргумент  $z$  функции Гаусса. Произведения по индексу  $p$ , фигурирующие в (3.15), (3.16), не содержат ни одного сомножителя, а сумма по индексу  $s$  в (3.16) — ни одного слагаемого. Согласно известному правилу такие произведения следует

положить равными единице, а сумму — равной нулю. Кроме того, принимая во внимание (3.14), полагаем  $|\mathbf{a}'_j| = 0$ . Учитывая сказанное и подставляя в левую часть равенства (3.15) функцию  $F(a, b; c; z)$  вместо  $F_D^{(1)}$ , а в его правую часть — функцию  $\mathcal{R}_1(a; b, c; z) = (c-1)F(a-1, b-1; c-1; z)$ , вычисленную по формуле (3.16) при  $N = 1$ , приходим к тождеству (2.32).

**Замечание 2.3.** Отметим еще, что если для некоторого  $j$  параметр  $a_j = 1$ , то определяемая из (3.16) функция  $\mathcal{R}_j$ , является по переменному  $z_j$  полиномом степени  $(N-1)$ , который имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = & \left[ \prod_{p=1}^N' (z_j - z_p) \right] \left[ (c-1)F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_j; b-1, c-1; \mathbf{z}'_j) + \right. \\ & \left. + \sum_{s=1}^N' a_s \frac{z_s(1-z_s)}{z_j - z_s} F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_{j,s}; b, c; \mathbf{z}'_j) \right]; \end{aligned} \quad (3.17)$$

здесь вектор  $\mathbf{a}'_{j,s}$  получается из  $\mathbf{a}$  увеличением на единицу  $s$ -й компоненты и исключением  $j$ -й компоненты, т.е.

$$\mathbf{a}'_{j,s} := (a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_s + 1, \dots, a_N), \quad s \neq j,$$

а векторы  $\mathbf{a}'_j$  и  $\mathbf{z}'_j$  определяются из (1.8). Таким образом, если некоторое  $a_j = 1$ , то формулы (3.15), (3.17) позволяют существенно упростить интеграл вида (1.6), которым представима функция Лауричеллы  $F_D^{(N)}$ . Этот важный частный случай теоремы 2.2 находит применение в теории задачи Римана — Гильберта, которому посвящена глава III.

**3.3. Система уравнений с частными производными для функции Лауричеллы как следствие соотношений типа Якоби.** Приводимое ниже утверждение, устанавливающее вид новой системы дифференциальных уравнений для функции Лауричеллы, является следствием формул (3.15), (3.16) типа Якоби для этой функции.

**Теорема 2.3.** *Функция Лауричеллы  $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$  удовлетворяет следующей системе уравнений с частными производными по переменным*

$z_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j^2} + \left( \frac{c - |\mathbf{a}'_j|}{z_j} + \frac{a_j + b - c + 1}{z_j - 1} + \sum_{s=1}^N' \frac{a_s}{z_j - z_s} \right) \frac{\partial u}{\partial z_j} + \\ + \frac{a_j}{z_j(z_j - 1)} \sum_{s=1}^N' \frac{z_s(1 - z_s)}{z_j - z_s} \frac{\partial u}{\partial z_s} + \frac{a_j b u}{z_j(z_j - 1)} = 0, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем функцию

$$\tilde{u}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := F_D^{(N)}(\mathbf{a}_j; b - 1, c - 1; \mathbf{z}) \quad (3.18)$$

и заметим, что фигурирующие в правой части равенства (3.16) функции  $F_D^{(N)}$  выражаются через производные  $\tilde{u}$  следующими равенствами, вытекающими из (1.9), (3.18):

$$\begin{aligned} F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) &= \frac{c - 1}{(a_j - 1)(b - 1)} \frac{\partial}{\partial z_j} \tilde{u}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}); \\ F_D^{(N)}(\mathbf{a}_{j,s}; b, c; \mathbf{z}) &= \frac{c - 1}{a_s(b - 1)} \frac{\partial}{\partial z_s} \tilde{u}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad s \neq j; \end{aligned} \quad (3.19)$$

напомним, что векторы  $\mathbf{a}_j$  и  $\mathbf{a}_{j,s}$  в (3.18) и (3.19) определены равенствами (3.1) и (3.13). Подставляя (3.18) и (3.19) в формулы (3.15), (3.16) с номером  $j$ , приходим к уравнению, которому удовлетворяет  $\tilde{u}$ . Заменяя в нем  $a_j$ ,  $b$  и  $c$  соответственно на  $(a_j + 1)$ ,  $(b + 1)$  и  $(c + 1)$ , учитывая, что  $\tilde{u}$  при такой замене переходит в  $u = F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ , и применяя свойство (1.10) функции  $F_D^{(N)}$ , убеждаемся в справедливости теоремы 2.3.

Отметим, что некоторые формулы для случая функции Аппеля  $F_1$ , близкие к установленным в теореме 2.2 (если положить  $N = 2$ ), приведены в работе [154].

**3.4. Доказательство соотношений типа Якоби для функции Лауричеллы.** Перейдем к доказательству теоремы 2.2. Рассмотрим ее вначале для случая  $j = 1$ , т.е. убедимся в справедливости следующего утверждения, где, напомним, векторы  $\mathbf{a}'_1$ ,  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_{1,s}$  определяются из (1.8), (3.1) и (3.13).

**Теорема 2.4.** Для функции Лауричеллы справедливо следующее соотношение типа Якоби:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_1} \left\{ \left[ \prod_{s=2}^N (z_1 - z_s)^{a_s} \right] z_1^{c-|\mathbf{a}'_1|-1} (1 - z_1)^{a_1+b-c} F_D^{(N)} (\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) \right\} = \\ = \left[ \prod_{s=2}^N (z_1 - z_s)^{a_s-1} \right] z_1^{c-|\mathbf{a}'_1|-2} (1 - z_1)^{a_1+b-c-1} \mathcal{R}_1 (\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}); \end{aligned} \quad (3.20)$$

здесь  $\mathcal{R}_1$  определяется по формуле

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 (\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \left[ \prod_{s=2}^N (z_1 - z_s) \right] \left[ (c-1) F_D^{(N)} (\mathbf{a}_1; b-1, c-1; \mathbf{z}) + \right. \\ \left. + \sum_{s=2}^N a_s \frac{z_s(1-z_s)}{z_1 - z_s} F_D^{(N)} (\mathbf{a}_{1,s}; b, c; \mathbf{z}) \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство формулы (3.20), (3.21) проведем методом индукции по числу  $N$  переменных функции Лауричеллы. Согласно замечанию 1 после теоремы 2.2 при  $N = 1$  эта формула превращается в тождество Якоби (2.32) для функции Гаусса.

Докажем соотношения (3.20), (3.21) в предположении, что они справедливы для функции Лауричеллы с числом переменных, равным  $(N-1)$ , т.е. в предположении, что имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_1} \left\{ \left[ \prod_{s=2}^{N-1} (z_1 - z_s)^{a_s} \right] z_1^{c-|\tilde{\mathbf{a}}'_1|-1} (1 - z_1)^{a_1+b-c} F_D^{(N-1)} (\tilde{\mathbf{a}}; b, c; \tilde{\mathbf{z}}) \right\} = \\ = \left[ \prod_{s=2}^{N-1} (z_1 - z_s)^{a_s-1} \right] z_1^{c-|\tilde{\mathbf{a}}'_1|-2} (1 - z_1)^{a_1+b-c-1} \tilde{\mathcal{R}}_1 (\tilde{\mathbf{a}}; b, c; \tilde{\mathbf{z}}); \end{aligned} \quad (3.22)$$

здесь  $\tilde{\mathcal{R}}_1$  определяется по формуле

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}_1 (\tilde{\mathbf{a}}; b, c; \tilde{\mathbf{z}}) = \left[ \prod_{s=2}^{N-1} (z_1 - z_s) \right] \left[ (c+p-1) F_D^{(N-1)} (\tilde{\mathbf{a}}_1; b-1, c-1; \tilde{\mathbf{z}}) + \right. \\ \left. + \sum_{s=2}^{N-1} a_s \frac{z_s(1-z_s)}{z_1 - z_s} F_D^{(N-1)} (\tilde{\mathbf{a}}_{1,s}; b, c; \tilde{\mathbf{z}}) \right], \end{aligned} \quad (3.23)$$

векторы  $\tilde{\mathbf{a}}$  и  $\tilde{\mathbf{z}}$  даются формулой (3.5), а векторы  $\tilde{\mathbf{a}}'_1$ ,  $\tilde{\mathbf{a}}_1$  и  $\tilde{\mathbf{a}}_{1,s}$  определяются через  $\tilde{\mathbf{a}}$  с помощью равенств

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{a}}'_1 &:= (a_2, \dots, a_{N-1}), & \tilde{\mathbf{a}}_1 &:= (a_1 - 1, a_2, \dots, a_{N-1}), \\ \tilde{\mathbf{a}}_{1,s} &:= (a_1 - 1, a_2, \dots, a_{s-1}, a_s + 1, a_{s+1}, \dots, a_{N-1}).\end{aligned}\quad (3.24)$$

Введем обозначение для выражения в левой части (3.20):

$$\begin{aligned}g(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) &:= \\ &:= \frac{\partial}{\partial z_1} \left\{ \left[ \prod_{s=2}^N (z_1 - z_s)^{a_s} \right] z_1^{c - |\mathbf{a}'_1| - 1} (1 - z_1)^{a_1 + b - c} F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) \right\}\end{aligned}\quad (3.25)$$

и, используя (1.7), представим фигурирующую здесь функцию  $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$  в следующем виде:

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(a_N)_p (b)_p}{p! (c)_p} z_N^p F_D^{(N-1)}(\tilde{\mathbf{a}}; b + p, c + p; \tilde{\mathbf{z}}).$$

Подставляя это разложение в правую часть равенства (3.25), получаем представление величины  $g$  в виде следующего ряда:

$$g(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(a_N)_p (b)_p}{p! (c)_p} z_N^p g_p(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad (3.26)$$

где коэффициенты  $g_p(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$  даются равенствами

$$\begin{aligned}g_p(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) &:= \\ &:= \frac{\partial}{\partial z_1} \left\{ \left[ \prod_{s=2}^N (z_1 - z_s)^{a_s} \right] z_1^{c - |\mathbf{a}'_1| - 1} (1 - z_1)^{a_1 + b - c} F_D^{(N-1)}(\tilde{\mathbf{a}}; b + p, c + p; \tilde{\mathbf{z}}) \right\}.\end{aligned}\quad (3.27)$$

Далее для краткости будем пропускать набор аргументов  $(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$  у некоторых вспомогательных величин, если нет необходимости его указывать явно.

Перегруппируем множители в квадратных скобках (3.27) таким образом, чтобы можно было применить формулу типа Якоби (3.22), (3.23) для функции Лауричеллы с числом переменных  $(N - 1)$ , и запишем формулу (3.27)

для коэффициента  $g_p$  в виде

$$g_p(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \frac{\partial}{\partial z_1} \left[ P_1(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) P_2(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) \right], \quad (3.28)$$

где величины  $P_1$  и  $P_2$  даются равенствами

$$P_1 := (z_1 - z_N)^{a_N} z_1^{-a_N - p}, \quad (3.29)$$

$$P_2 := \prod_{s=2}^{N-1} (z_1 - z_s)^{a_s} z_1^{c+p - |\tilde{\mathbf{a}}'_1| - 1} (1 - z_1)^{a_1+b-c} F_D^{(N-1)}(\tilde{\mathbf{a}}; b+p, c+p; \tilde{\mathbf{z}}); \quad (3.30)$$

здесь  $|\tilde{\mathbf{a}}'_1|$  — сумма элементов вектора  $\tilde{\mathbf{a}}'_1$ , определенного в (3.24). Выполняя дифференцирование в правой части (3.28), получаем

$$g_p = g_p^{(1)} + g_p^{(2)}, \quad g_p^{(1)} := \frac{\partial P_1}{\partial z_1} P_2, \quad g_p^{(2)} := P_1 \frac{\partial P_2}{\partial z_1}, \quad (3.31)$$

где для  $g_p^{(1)}$  и  $g_p^{(2)}$  с учетом (3.29) и (3.30) находим выражения:

$$g_p^{(1)} = \left[ \prod_{s=2}^{N-1} (z_1 - z_s)^{a_s} \right] (z_1 - z_N)^{a_N - 1} z_1^{c - |\tilde{\mathbf{a}}'_1| - 2} (1 - z_1)^{a_1 + b - c} \times \times [a_N z_1 - (a_N + p)(z_1 - z_N)] F_D^{(N-1)}(\tilde{\mathbf{a}}; b+p, c+p; \tilde{\mathbf{z}}), \quad (3.32)$$

$$g_p^{(2)} = (z_1 - z_N)^{a_N} z_1^{-a_N - p} \times \times \frac{\partial}{\partial z_1} \left\{ \left[ \prod_{s=2}^{N-1} (z_1 - z_s)^{a_s} \right] z_1^{c+p - |\tilde{\mathbf{a}}'_1| - 1} (1 - z_1)^{a_1+b-c} F_D^{(N-1)}(\tilde{\mathbf{a}}; b+p, c+p; \tilde{\mathbf{z}}) \right\}. \quad (3.33)$$

Применяя к производной, фигурирующей в правой части равенства (3.33), формулу типа Якоби (3.22), (3.23), справедливость которой, напомним, предполагается, получаем для этой производной выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_1} \left\{ \left[ \prod_{s=2}^{N-1} (z_1 - z_s)^{a_s} \right] z_1^{c+p - |\tilde{\mathbf{a}}'_1| - 1} (1 - z_1)^{a_1+b-c} F_D^{(N-1)}(\tilde{\mathbf{a}}; b+p, c+p; \tilde{\mathbf{z}}) \right\} = \\ = \left[ \prod_{s=2}^{N-1} (z_1 - z_s)^{a_s - 1} \right] z_1^{c+p - |\tilde{\mathbf{a}}'_1| - 2} (1 - z_1)^{a_1+b-c-1} \tilde{\mathcal{R}}_1(\tilde{\mathbf{a}}; b+p, c+p; \tilde{\mathbf{z}}); \end{aligned} \quad (3.34)$$

где  $\tilde{\mathcal{R}}_1$  дается равенством

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}_1(\tilde{\mathbf{a}}; b+p, c+p; \tilde{\mathbf{z}}) &= \\ &= \left[ \prod_{s=2}^{N-1} (z_1 - z_s) \right] \left[ (c+p-1) F_D^{(N-1)}(\tilde{\mathbf{a}}_1; b+p-1, c+p-1; \tilde{\mathbf{z}}) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=2}^{N-1} a_s \frac{z_s(1-z_s)}{z_1 - z_s} F_D^{(N-1)}(\tilde{\mathbf{a}}_{1,s}; b+p, c+p; \tilde{\mathbf{z}}) \right]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Подставляя (3.32) и (3.33) с учетом (3.34), (3.35) в первое равенство (3.31), приходим к следующему выражению для  $g_p$ :

$$g_p = \left[ \prod_{s=2}^N (z_1 - z_s)^{a_s-1} \right] z_1^{c-|\mathbf{a}'_1|-2} (1-z_1)^{a_1+b-c-1} \rho_p, \quad (3.36)$$

где множитель  $\rho_p$  имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_p &:= \prod_{s=2}^{N-1} (z_1 - z_s) \times \\ &\times \left\{ (1-z_1) [a_N z_1 - (a_N + p)(z_1 - z_N)] F_D^{(N-1)}(\tilde{\mathbf{a}}_1; b+p, c+p; \tilde{\mathbf{z}}) + \right. \\ &+ (z_1 - z_N) \sum_{s=2}^{N-1} a_s \frac{z_s(1-z_s)}{z_1 - z_s} F_D^{(N-1)}(\tilde{\mathbf{a}}_{1,s}; b+p, c+p; \tilde{\mathbf{z}}) + \\ &\left. + (c+p-1)(z_1 - z_N) F_D^{(N-1)}(\tilde{\mathbf{a}}_1; b+p-1, c+p-1; \tilde{\mathbf{z}}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Подставляя (3.36), (3.37) в (3.26), получаем

$$g(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \left[ \prod_{s=2}^N (z_1 - z_s)^{a_s-1} \right] z_1^{c-|\mathbf{a}'_1|-2} (1-z_1)^{a_1+b-c-1} \mathcal{Q}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad (3.38)$$

где множитель  $\mathcal{Q}$  имеет вид

$$\mathcal{Q}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \left[ \prod_{s=2}^{N-1} (z_1 - z_s) \right] \sum_{j=1}^3 R_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad (3.39)$$

а функции  $R_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , даются равенствами

$$R_1 := (1-z_1) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(a_N)_p (b)_p}{(c)_p p!} z_N^p [a_N z_1 - (a_N + p)(z_1 - z_N)] F_D^{(N-1)}(\tilde{\mathbf{a}}; b+p, c+p; \tilde{\mathbf{z}}), \quad (3.40)$$

$$R_2 := (z_1 - z_N) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(a_N)_p (b)_p}{(c)_p p!} z_N^p \left[ \sum_{s=2}^{N-1} a_s \frac{z_s(1-z_s)}{z_1 - z_s} F_D^{(N-1)} (\tilde{\mathbf{a}}_{1,s}; b+p, c+p; \tilde{\mathbf{z}}) \right], \quad (3.41)$$

$$R_3 := (z_1 - z_N) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(a_N)_p (b)_p}{(c)_p p!} (c+p-1) z_N^p F_D^{(N-1)} (\tilde{\mathbf{a}}_1; b+p-1, c+p-1; \tilde{\mathbf{z}}). \quad (3.42)$$

Для того чтобы преобразовать выражение (3.38) для функции  $g$ , которая согласно определению (3.25) является левой частью равенства (3.22), к виду правой части того же равенства, необходимо выразить величины  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  через функцию Лауричеллы от  $N$  переменных.

Проведем последовательно преобразования выражений (3.40)–(3.42) для  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ .

(i) Обратимся к преобразованию функции  $R_1$ . Перепишем выражение в квадратных скобках (3.40) следующим образом:

$$a_N z_1 - (a_N + p)(z_1 - z_N) = (a_N + p)z_N - p z_1$$

и представим  $R_1$  в виде

$$R_1(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := (1 - z_1) \left[ R_1^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) - R_1^{(2)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) \right], \quad (3.43)$$

где ряды  $R_1^{(1)}$  и  $R_1^{(2)}$  даются формулами

$$R_1^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(a_N)_p (b)_p}{p! (c)_p} z_N^{p+1} (a_N + p) F_D^{(N-1)} (\tilde{\mathbf{a}}; b+p, c+p; \tilde{\mathbf{z}}), \quad (3.44)$$

$$R_1^{(2)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := z_1 \sum_{p=1}^{\infty} p \frac{(a_N)_p (b)_p}{p! (c)_p} z_N^{p+1} F_D^{(N-1)} (\tilde{\mathbf{a}}; b+p, c+p; \tilde{\mathbf{z}}), \quad (3.45)$$

Используя равенство  $(a_N)_p (a_N + p) = (a_N)_{p+1}$  и меняя индекс суммирования в (3.44) так, чтобы суммирование начиналось с  $p = 1$ , получаем

$$R_1^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(a_N)_p (b)_{p-1}}{(p-1)! (c)_{p-1}} z_N^p F_D^{(N-1)} (\tilde{\mathbf{a}}; b + p - 1, c + p - 1; \tilde{\mathbf{z}}). \quad (3.46)$$

С помощью выражений (3.45), (3.46) вычисляем разность, фигурирующую в квадратных скобках (3.43):

$$R_1^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) - R_1^{(2)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(a_N)_p}{(p-1)!} r_p z_N^p, \quad (3.47)$$

где

$$\begin{aligned} r_p = & \frac{(b)_{p-1}}{(c)_{p-1}} F_D^{(N-1)} (\tilde{\mathbf{a}}; b+p-1, c+p-1; \tilde{\mathbf{z}}) - \\ & - \frac{(b)_p}{(c)_p} z_1 F_D^{(N-1)} (\tilde{\mathbf{a}}; b+p, c+p; \tilde{\mathbf{z}}). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Вынося в (3.48) за скобки множитель  $(b)_{p-1}/(c)_p$ , преобразуем  $r_p$  к виду

$$\begin{aligned} r_p = & \frac{(b)_{p-1}}{(c)_p} \left[ (c+p-1) F_D^{(N-1)} (\tilde{\mathbf{a}}; b+p-1, c+p-1; \tilde{\mathbf{z}}) - \right. \\ & \left. - (b+p-1) z_1 F_D^{(N-1)} (\tilde{\mathbf{a}}; b+p, c+p; \tilde{\mathbf{z}}) \right]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Применяя к выражению в квадратных скобках (3.49) установленное в теореме 2.1 равенство (3.2) для ассоциированных функций Лауричеллы, получаем

$$r_p = \frac{(b)_{p-1}}{(c)_p} (c+p-1) F_D^{(N-1)} (\tilde{\mathbf{a}}_1; b+p-1, c+p-1; \tilde{\mathbf{z}}). \quad (3.50)$$

Подставляя в (3.50) в (3.47) и учитывая вытекающие из (1.5) равенства

$$\frac{c+p-1}{(c)_p} = \frac{1}{(c)_{p-1}}, \quad (a_N)_p = a_N (a_N + 1)_{p-1}, \quad (3.51)$$

приходим к выражениям для разности

$$R_1^{(1)} - R_2^{(2)} = a_N z_N F_D^{(N)} (\mathbf{a}_{1,N}; b+p, c+p; \mathbf{z}),$$

которое после подстановки в (3.43) дает следующую формулу для  $R_1$ :

$$R_1(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = a_N z_N (1 - z_1) F_D^{(N)} (\mathbf{a}_{1,N}; b, c; \mathbf{z}). \quad (3.52)$$

(ii) Обратимся к вычислению функции  $R_2$ . Меняя в формуле (3.41) порядок суммирования, а также учитывая вытекающее из (1.7) равенство

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(a_N)_p (b)_p}{p! (c)_p} z_N^p F_D^{(N-1)} (\tilde{\mathbf{a}}_{1,s}; b+p, c+p; \tilde{\mathbf{z}}) = F_D^{(N)} (\mathbf{a}_{1,s}; b+p, c+p; \mathbf{z}), \quad (3.53)$$

получаем для  $R_2$  выражение в виде конечной суммы

$$R_2(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (z_1 - z_N) \sum_{s=2}^{N-1} a_s \frac{z_s(1 - z_s)}{z_1 - z_s} F_D^{(N)}(\mathbf{a}_{1,s}; b, c; \mathbf{z}). \quad (3.54)$$

(iii) Перейдем к рассмотрению функции  $R_3$ . Преобразуя коэффициенты ряда (3.42) с помощью следующих соотношений

$$(b)_p = \frac{b+p-1}{b-1} (b-1)_p, \quad (c)_p = \frac{c+p-1}{c-1} (c-1)_p,$$

перепишем (3.42) в виде суммы двух рядов

$$R_3 = R_3^{(1)} + R_3^{(2)}, \quad (3.55)$$

где  $R_3^{(1)}$  и  $R_3^{(2)}$  даются равенствами

$$\begin{aligned} R_3^{(1)} &:= (c-1)(z_1 - z_N) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(a_N)_p (b-1)_p}{p! (c-1)_p} z_N^p F_D^{(N-1)}(\tilde{\mathbf{a}}_1; b-1+p, c-1+p; \tilde{\mathbf{z}}), \\ R_3^{(2)} &:= \frac{(c-1)(z_1 - z_N)}{b-1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(a_N)_p (b-1)_p}{p! (c-1)_p} p z_N^p F_D^{(N-1)}(\tilde{\mathbf{a}}_1; b+p-1, c+p-1; \tilde{\mathbf{z}}). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Применяя к  $R_3^{(1)}$  формулу (1.7), получаем

$$R_3^{(1)} = (c-1)(z_1 - z_N) F_D^{(N)}(\mathbf{a}_1; b-1, c-1; \mathbf{z}). \quad (3.57)$$

Для преобразования  $R_3^{(2)}$  подставим в (3.56) формулу для  $(a_N)_p$  из (3.51) и соотношения

$$(b-1)_p = (b-1)(b)_{p-1}, \quad (c-1)_p = (c-1)(c)_{p-1}.$$

Заменяя в полученном равенстве для  $R_3^{(2)}$  индекс суммирования так, чтобы оно начиналось с  $p=0$  и учитывая представление (1.7) для функции Лаурисчеллы, получаем

$$R_3^{(2)} = a_N z_N (z_1 - z_N) F_D^{(N)}(\mathbf{a}_{1,N}; b, c; \mathbf{z}). \quad (3.58)$$

Подставляя (3.57) и (3.58) в (3.55), приходим к требуемому выражению  $R_3$  в виде конечной комбинации функций Лауричеллы

$$R_3 = (z_1 - z_N) \left[ (c-1) F_D^{(N)} (\mathbf{a}_1; b-1, c-1; \mathbf{z}) + a_N z_N F_D^{(N)} (\mathbf{a}_{1,N}; b, c; \mathbf{z}) \right], \quad (3.59)$$

чем завершаем преобразование функций  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  из (3.40)–(3.42).

Используя равенства (3.52), (3.54) и (3.59), получаем искомое выражение для суммы из (3.39):

$$\sum_{l=1}^3 R_l(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (z_1 - z_N) \left[ (c-1) F_D^{(N)} (\mathbf{a}_1; b-1, c-1; \mathbf{z}) + \sum_{s=2}^N a_s \frac{z_s(1-z_s)}{z_1 - z_s} F_D^{(N)} (\mathbf{a}_{1,s}; b, c; \mathbf{z}) \right]. \quad (3.60)$$

Подставляя (3.60) в (3.39), а результат такой подстановки — в формулу (3.38), приходим к выводу, что величина  $g(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ , которая по определению представляет собой левую часть равенства (3.20), совпадает с правой частью того же равенства, что и требовалось показать. Ограничение  $|z_N| < 1$ , при котором проведено доказательство формулы типа Якоби (3.20), (3.21), легко устраняется с помощью принципа аналитического продолжения. Теорема 2.4 доказана.

Замечая, что утверждение теоремы 2.4 совпадает с утверждением теоремы 2.2 при  $j = 1$  и используя свойство симметрии (1.10) функции  $F_D^{(N)}$ , убеждаемся в справедливости теоремы 2.2, устанавливающей систему дифференциальных соотношений для гипергеометрической функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}$ , обобщающих классическое тождество Якоби (2.32) для функции Гаусса.

## §4. Аналитическое продолжение функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$

Параграф посвящен выводу формул аналитического продолжения вида (1.11) для функции Лариучеллы  $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$  в нелогарифмическом случае. В пп. 4.1, 4.2 получены формулы такого продолжения в окрестности точек  $\mathbf{z}^{(\infty)}, \mathbf{z}^{(1)}$ , все компоненты которых равны либо  $\infty$ , либо 1. На основе этих результатов в п. 4.3 построены общие формулы аналитического продолжения для  $F_D^{(N)}$  в окрестности точек  $\mathbf{z}_p^{(1, \infty)}$ , первые  $p$  компонент которых близки к единице, а остальные  $(N - p)$  — к бесконечности. Необходимо отметить, что формулы продолжения в окрестности  $\mathbf{z}^{(\infty)}$  и  $\mathbf{z}^{(1)}$  записаны в терминах обобщенных гипергеометрических рядов  $G^{(N, j)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ , рассматривавшихся в [169]; формулы продолжения в окрестности  $\mathbf{z}_p^{(1, \infty)}$  получены в терминах обобщенных гипергеометрических рядов  $\mathcal{F}^{(N, p)}(\mathbf{a}; b, c_1, c_2; \mathbf{z}), \mathcal{G}_j^{(N, p)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$  и  $\mathcal{H}_j^{(N, p)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ , по-видимому, не изучавшихся в литературе.

**4.1. Формулы аналитического продолжения в окрестность точки  $\mathbf{z}^{(\infty)} = (\infty, \dots, \infty)$ .** Переходя к построению формул аналитического продолжения  $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$  в окрестность точки  $\mathbf{z}^{(\infty)}$ , дадим вначале представление этой функции в виде контурного интеграла типа Барнса [19], [86], [127], [142]. Введем используемые в таком представлении обозначения для векторов

$$\mathbf{z}'_1 := (z_2, \dots, z_N), \quad \mathbf{a}'_1 := (a_2, \dots, a_N), \quad (4.1)$$

зададим область  $\mathbb{S}^N$  с помощью следующего равенства

$$\mathbb{S}^N := \{ |\arg(-z_1)| < \pi, |z_j| < 1, j = \overline{2, N} \}. \quad (4.2)$$

и определим функцию  $f(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}, s)$  по формуле

$$f(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}, s) := \frac{\Gamma(a_1 + s)\Gamma(b + s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c + s)} (-z_1)^s F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; b + s, c + s; \mathbf{z}'_1), \quad (4.3)$$

где  $\mathbf{z} \in \mathbb{S}^N$ ,  $s \in \mathbb{C}$ , а под выражением  $F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; b+s, c+s; \mathbf{z}'_1)$  понимается ряд, получаемый подстановкой соответствующих параметров в формулу (1.2).

Справедливо следующее утверждение.

**Предложение 2.1.** *Функция Лауриселлы  $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ , определяемая рядом (1.2), представима для  $\mathbf{z} \in \mathbb{U}^N \cap \mathbb{S}^N$  в виде контурного интеграла типа Барнса*

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \frac{\Gamma(c)}{2\pi i \Gamma(a_1) \Gamma(b)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} f(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}, s) ds, \quad (4.4)$$

где  $f$  дается равенством (4.3), а контур интегрирования в (4.4) выбран так, чтобы полюсы  $s_k^{(0)} = k$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ , и полюсы

$$s_k^{(1)} = -a_1 - k, \quad s_k^{(2)} = -b - k, \quad k \in \mathbb{Z}^+, \quad (4.5)$$

функции  $f(s)$  лежали соответственно справа и слева от него.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Обозначим через  $L$  контур интегрирования в (4.4) и пусть  $L_n$  — его часть, ограниченная точками  $-(n + 1/2)i$  и  $(n + 1/2)i$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , т.е. кривая  $L_n := \{s \in \gamma : |\operatorname{Im} s| \leq (n + 1/2)\}$ ; кроме того, пусть  $C_n$  — расположенная в правой полуплоскости полуокружность радиуса  $(n + 1/2)$  с направлением обхода по часовой стрелке. Используя известное [19] тождество для гамма-функции

$$\Gamma(-s) = \frac{-\pi}{\Gamma(1+s) \sin \pi s},$$

перепишем функцию (4.3) в более удобном для асимптотического исследования виде

$$f(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}, s) = - \left[ \frac{\Gamma(a_1 + s) \Gamma(b + s)}{\Gamma(c + s) \Gamma(1 + s)} \right] \left[ F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; b + s, c + s; \mathbf{z}'_1) \right] \frac{\pi(-z_1)^s}{\sin \pi s}, \quad (4.6)$$

и рассмотрим следующий интеграл:

$$I_n(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := \int_{L_n \cup C_n} f(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}, s) ds. \quad (4.7)$$

Используя известную [19] асимптотику гамма-функции:

$$\Gamma(a+s) = \mathcal{O}\left(s^{s+a-1/2} e^{-s}\right), \quad s \rightarrow \infty, \quad |\arg s| < \pi.$$

находим следующее соотношение для первого множителя в квадратных скобках из (4.6):

$$\frac{\Gamma(a_1+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)\Gamma(1+s)} = \mathcal{O}\left(s^{a_1+b-c-1}\right), \quad s \rightarrow \infty, \quad |\arg s| < \pi. \quad (4.8)$$

Для фигурирующей в (4.6) функции Лауричеллы справедлива оценка:

$$F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; b+s, c+s; \mathbf{z}'_1) = \mathcal{O}(1), \quad s \rightarrow \infty. \quad (4.9)$$

Для оценки третьего множителя на кривой  $C_n$  положим  $s = (n+1/2)e^{i\theta}$  и  $(-z_1)^s = \exp(s \ln(-z_1))$ , где  $\ln(-z_1) = \ln|z_1| + i \arg(-z_1)$ , причем по условиям предложения  $|\arg(-z_1)| \leq \pi - \delta$  для некоторого малого положительного  $\delta$ . Тогда нетрудно убедиться в том, что выполняется оценка:

$$\frac{(-z_1)^s}{\sin \pi \theta} = \mathcal{O}\left(\exp\left[-(n+1/2)(-\cos \theta \ln|z_1| + \delta|\sin \theta|)\right]\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.10)$$

С помощью этих соотношений получаем следующую асимптотику для функции (4.6):

$$|f(s)| = \mathcal{O}\left(n^{a_1+b-c-1} \exp\left[-n(-\cos \theta \ln|z_1| + \delta|\sin \theta|)\right]\right), \quad (4.11)$$

$$s \in C_n^+, \quad n \rightarrow \infty;$$

здесь использовано обозначение  $f(s) := f(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}, s)$ . Таким образом, если  $\ln z_1 < 0$ , т.е.  $|z_1| < 1$ , то подынтегральная функция для всех  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$  экспоненциально стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

Запишем интеграл (4.7) в виде

$$\int_{L_n \cup C_n^+} f(s) ds = \int_{L_n} f(s) ds + \int_{C_n^+} f(s) ds,$$

где первый интеграл при  $n \rightarrow \infty$  стремится к  $\int_L f(s) ds$ , а второй в силу оценки (4.11) — к нулю. Таким образом,

$$\int_L f(s) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{L_n \cup C_n^+} f(s) ds. \quad (4.12)$$

Для того чтобы вычислить интеграл в правой части (4.12) остановимся на обсуждении свойств функции (4.3), рассматриваемой в зависимости от комплексного переменного  $s$  и фиксированных остальных аргументах. Напомним, что гамма-функция  $\Gamma(s)$  имеет простые полюсы в целых неположительных точках  $s = -k$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ , причем вычеты в них даются следующими равенствами, см. [19], [127]:

$$\operatorname{res} \Gamma(-k) = (-1)^k (k!)^{-1}, \quad k \in \mathbb{Z}^+, \quad (4.13)$$

и отметим, что функция  $\tilde{F}(s) := F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; b + s, c + s; \mathbf{z}'_1)/\Gamma(c + s)$ , очевидно, регулярна по  $s$  во всей конечной плоскости. С учетом сказанного из определения (4.3) вытекает, что  $f(s)$  имеет простые полюсы в точках  $s_k^{(0)} = k$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ , а ее вычеты в них определяются равенствами:

$$\operatorname{res}_{s=s_k^{(0)}} f(s) = -\frac{\Gamma(a_1 + k)\Gamma(b + k)}{\Gamma(c + k)k!} z_1^k F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; b + k, c + k; \mathbf{z}'_1). \quad (4.14)$$

Интеграл в правой части (4.12) равен умноженной на  $(-2\pi i)$  сумме вычетов подынтегральной функции  $f(s)$  в области, ограниченной контуром  $L_n \cup C_n^+$ , т.е.

$$\int_{L_n \cup C_n^+} f(s) ds = (-2\pi i) \sum_{k=0}^n \operatorname{res}_{s=s_k^{(0)}} f(s), \quad (4.15)$$

Используя равенства (4.12)–(4.15) и определение символа Похгаммера, получаем

$$\int_L f(s) ds = 2\pi i \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (b)_k}{(c)_k k!} z_1^k F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; b + k, c + k; \mathbf{z}'_1). \quad (4.16)$$

Разделив обе части этого равенства на множитель, фигурирующий перед суммой в правой его части и замечая, что эта сумма согласно (1.7) равна функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ , убеждаемся в справедливости представления (4.3), (4.4). Предложение 2.1 доказано.

Отметим, что частный случай представления (4.3), (4.4) при  $N = 2$ , т.е. соответствующий функции Аппеля, приведен, например, в [142].

**Замечание 2.4.** Нетрудно увидеть, что установленное в предложении 2.1 интегральное представление (4.3), (4.4) осуществляет аналитическое продолжение функции Лауричеллы, первоначально определенной с помощью ряда (1.2), в область  $\mathbb{S}^N$ , в которой правая часть равенства (4.4) является голоморфной функцией  $\mathbf{z}$ .

Используя результат предложения 2.1, получим теперь для случая, когда  $(b-a_1)$  не является целым числом, представление функции  $F_D^{(N)}$  в виде суммы двух рядов, экспоненциально сходящихся в области

$$\mathbb{D}^N := \{ |z_1| > 1, |\arg(-z_1)| < \pi; |z_j| < 1, j = \overline{2, N} \}, \quad (4.17)$$

т.е. в подобласти  $\mathbb{S}^N$ , которая, напомним, определяется из (4.2).

**Предложение 2.2.** *Если параметры функции  $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$  таковы, что  $(b - a_1)$  не является целым числом, то для нее справедливо представление*

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = C_0 u_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) + C_1 u_1(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad (4.18)$$

где  $u_0$  и  $u_1$  даются формулами

$$\begin{aligned} u_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) &= \\ &= (-z_1)^{-a_1} \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{k_1} (1+a_1-c)_{k_1}}{k_1! (1+a_1-b)_{k_1}} z_1^{-k_1} F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; b - a_1 - k_1, c - a_1 - k_1; \mathbf{z}'_1), \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) &= \\ &= (-z_1)^{-b} F_D^{(N)} \left( 1 - c + b, a_2, \dots, a_N; b, 1 + b - a_1; \frac{1}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}, \dots, \frac{z_N}{z_1} \right), \end{aligned} \quad (4.20)$$

а коэффициенты  $C_0$  и  $C_1$  имеют вид

$$C_0 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(b - a_1)}{\Gamma(b) \Gamma(c - a_1)}, \quad C_1 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(a_1 - b)}{\Gamma(a_1) \Gamma(c - b)}. \quad (4.21)$$

Соотношения (4.18)–(4.21) осуществляют аналитическое продолжение ряда (1.2) в область  $\mathbb{D}^N$ , определяемую равенством (4.17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int_{L_n \cup C_n^-} f(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}, s) ds, \quad (4.22)$$

где  $C_n^-$  — полуокружность с центром в начале координат, радиусом  $(n + 1/2)$  и направлением обхода против часовой стрелки, целиком расположенная в левой полуплоскости. Проводя рассуждения, аналогичные тем, что были использованы при доказательстве предложения 2.1 и записывая оценку

$$|f(s)| = \mathcal{O}\left(n^{a_1+b-c-1} \exp\left[-n(-\cos\theta \ln|z_1| + \delta|\sin\theta|)\right]\right), \quad (4.23)$$

$$s \in C_n^-, \quad n \rightarrow \infty;$$

для подынтегральной функции, показывающую экспоненциальное убывание при  $n \rightarrow \infty$  функции  $f$  на контуре  $C_n^-$  для  $\ln|z_1| > 0$ , т.е.  $|z_1| > 1$ , находим

$$\int_L f(s) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{L_n \cup C_n^-} f(s) ds. \quad (4.24)$$

Представим теперь интеграл в виде умноженной на  $(2\pi i)$  суммы вычетов в (простых) полюсах  $s_k^{(1)}$  и  $s_k^{(2)}$ , указанных в формуле в (4.5), функции  $f(s)$ , расположенных в области, ограниченной контуром  $L_n \cup C_n^-$ :

$$\int_{L_n \cup C_n^-} f(s) ds = 2\pi i (S_1 + S_2),$$

$$S_1^{(n)} := \sum_{k=0}^n \operatorname{res}_{s=s_k^{(1)}} f(s), \quad S_2^{(n)} := \sum_{k=0}^n \operatorname{res}_{s=s_k^{(2)}} f(s). \quad (4.25)$$

Здесь выражения для вычетов, получаемые с учетом свойства (4.13) гамма-функции, даются равенствами:

$$\operatorname{res}_{s=s_k^{(1)}} f(s) = \frac{\Gamma(b-a_1)\Gamma(a_1)(1+a_1-c)_k(a_1)_k}{\Gamma(c-a_1)(1+a_1-b)_k k!} (-z_1)^{-a_1-k} (-1)^k \times$$

$$\times F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; b-a_1-k, c-a_1-k; \mathbf{z}'_1), \quad (4.26)$$

$$\operatorname{res}_{s=s_k^{(2)}} f(s) = \frac{\Gamma(a_1-b)\Gamma(b)(1+b-c)_k(b)_k}{\Gamma(c-b)(1+b-a_1)_k k!} (-z_1)^{-b-k} (-1)^k \times$$

$$\times F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; -k, c-b-k; \mathbf{z}'_1). \quad (4.27)$$

С помощью (4.24), используя (4.25)–(4.27), находим следующее сопротивление:

$$\frac{\Gamma(c)}{2\pi i \Gamma(a_1)\Gamma(b)} \int_L f(s) ds = S_1 + S_2, \quad (4.28)$$

где  $S_0$  и  $S_1$  даются формулами

$$S_0 = C_0 u_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad S_1 = C_1 \tilde{u}_1(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}),$$

в которых функция  $u_0$  определяется из (4.19), константы  $C_0$  и  $C_1$  – из (4.35), а функция  $\tilde{u}_1$  дается равенством

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) &= \\ &= (-z_1)^{-b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+a_1-c)_k (b)_k}{k! (1+b-a_1)_k} z_1^{-k} F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; -k, c-b-k; \mathbf{z}'_1). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Поскольку второй параметр функции  $F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; -k, c-b-k; \mathbf{z}'_1)$  равен целому отрицательному числу, то эта функция является полиномом степени  $k$  по переменным  $z_2, \dots, z_N$ :

$$F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; -k, c-b-k; \mathbf{z}'_1) = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^k \frac{(-k)_{|\mathbf{k}_{2,N}|} (a_2)_{k_2} \dots (a_N)_{k_N}}{(c-b-k)_{|\mathbf{k}_{2,N}|} k_1! \dots k_N!} z_2^{k_1} \dots z_N^{k_N}. \quad (4.30)$$

Подставляя (4.30) в (4.29), вводя новый индекс  $k_1 = k - (k_2 + \dots + k_N)$  и учитывая определение (1.2) функции Лауринеллы, получаем для  $\tilde{u}_1$  представление, совпадающее с формулой (4.20) для функции  $u_1$ .

Сходимость ряда (4.19) для  $u_0$  в области  $\mathbb{D}^N$  вытекает из следующей асимптотики для общего члена ряда:

$$\begin{aligned} \left| \frac{(a_1)_k (1+a_1-c)_k}{k! (1+a_1-b)_k} z_1^{-k} F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; b-a_1-k, c-a_1-k; \mathbf{z}'_1) \right| &= \\ &= \mathcal{O}\left(k^{a_1+b-c-1} \exp(-k \ln |z_1|)\right), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Представление (4.20) для  $u_1$  сходится в  $\mathbb{D}^N$ , поскольку если вектор  $\mathbf{z}$  лежит в этой области, то аргумент

$$\left( \frac{1}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}, \dots, \frac{z_N}{z_1} \right)$$

функции  $F_D^{(N)}$  из (4.20), очевидно, принадлежит поликругу  $\mathbb{U}^N$ . Предложение 2.2 доказано.

Отметим, что предложение 2.2 позволяет продолжить ряд (1.2) по переменной  $z_1$ , модуль которой при  $\mathbf{z} \in \mathbb{D}^N$  может принимать значения, большие единицы. При этом функция  $u_1$  в представлении (4.20), очевидно, определена в более широкой области

$$\tilde{\mathbb{D}} := \{|z_1| > 1, |\arg(-z_1)| < \pi; |z_1| > \dots > |z_N|\},$$

где одновременно все переменные  $z_j, j = \overline{1, N}$ , могут принимать значения по модулю большие единицы. Таким образом, в представлении (4.18) необходимо продолжить по переменным  $z_j, j = \overline{2, N}$ , лишь функцию  $u_0$ .

Прежде чем перейти к такому продолжению, определим величины

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_j &:= (a_1, \dots, a_{j-1}, 1 - c + b, a_{j+1}, \dots, a_N), \\ |\mathbf{a}_{s,j}| &:= \sum_{n=s}^j a_n, \quad |\mathbf{a}| := |\mathbf{a}_{1,N}|, \quad |\mathbf{k}_{s,j}| := \sum_{n=s}^j k_n, \end{aligned} \quad (4.31)$$

и введем преобразования вектора  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)$ :

$$\mathbf{z}^{-1} := \left( \frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_N} \right), \quad (4.32)$$

$$\mathcal{Y}_j(\mathbf{z}) := \left( \frac{z_1}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, z_j, \frac{z_j}{z_{j+1}}, \dots, \frac{z_j}{z_N} \right), \quad (4.33)$$

где, уточним, что выражения  $\mathcal{Y}_1(\mathbf{z})$  и  $\mathcal{Y}_N(\mathbf{z})$  означают:

$$\mathcal{Y}_1(\mathbf{z}) := \left( z_1, \frac{z_1}{z_2}, \dots, \frac{z_1}{z_N} \right), \quad \mathcal{Y}_N(\mathbf{z}) := \left( \frac{z_1}{z_N}, \dots, \frac{z_{N-1}}{z_N}, z_N \right). \quad (4.34)$$

Запишем также следующий обобщенный гипергеометрический ряд [169]:

$$G^{(N, j)}(\mathbf{a}; b; c; \mathbf{z}) := \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{|\mathbf{k}_j|} (a_1)_{k_1} \dots (a_N)_{k_N}}{(c)_{|\mathbf{k}_j|} k_1! \dots k_N!} z_1^{k_1} \dots z_N^{k_N}, \quad (4.35)$$

где выражение  $|\mathbf{k}_j|$  для мультииндекса  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_N)$ , означает

$$|\mathbf{k}_j| := \sum_{n=j}^N k_n - \sum_{n=1}^{j-1} k_n,$$

а параметр  $j$  может принимать значения  $1, 2, \dots, N + 1$ . Областью сходимости ряда (4.35) при всех  $j = \overline{1, N+1}$  является единичный поликруг  $\mathbb{U}^N$ . При  $j = 1$  формула (4.35), очевидно, переходит в определение (1.2) функции Лауричеллы.

В формуле (4.35) разность индексов  $|\mathbf{k}_j|$  может принимать отрицательные значения. Отметим, что для отрицательных целых значений  $k$  символ Похгаммера  $(a)_k$ , определяемый из (1.3), записывается с учетом известного тождества [19] для Гамма-функции

$$\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} = (-1)^k \frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-a-k)},$$

в следующем виде:

$$(a)_k = (-1)^k \left[ (1-a)(2-a) \dots ((1-a)-k-1) \right]^{-1}, \quad k = -1, -2, \dots \quad (4.36)$$

Введем еще обозначение для области

$$\mathbb{V}^N := \{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |z_1| > \dots > |z_N| > 1; |\arg(-z_j)| < \pi, j = \overline{1, N} \}. \quad (4.37)$$

Применяя результат предложения 2.2 к функциям  $F_D^{(N-1)}$ , фигурирующим в (4.19), а также к аналогичным функциям с меньшим числом переменных, возникающим в результате такого применения, приходим к следующему утверждению, позволяющему продолжить функцию Лауричеллы  $F_D^{(N)}$  в область  $\mathbb{V}^N$ .

**Теорема 2.5.** *Если ни одно из чисел  $(b - |\mathbf{a}_{1,j}|)$ ,  $j = \overline{1, N}$ , не является целым, то аналитическое продолжение ряда (1.2) в область  $\mathbb{V}^N$  дается формулой*

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{j=0}^N B_j \mathcal{U}_j^{(\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad (4.38)$$

где функции  $\mathcal{U}_j^{(\infty)}$  определяются равенствами

$$\mathcal{U}_0^{(\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := \left( \prod_{l=1}^N (-z_l)^{-a_l} \right) F_D^{(N)}(\mathbf{a}; 1 + |\mathbf{a}| - c, 1 + |\mathbf{a}| - b; \mathbf{z}^{-1}), \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_j^{(\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) &:= (-z_j)^{|\mathbf{a}_{1,j-1}|-b} \left( \prod_{l=1}^{j-1} (-z_l)^{-a_l} \right) \times \\ &\times G^{(N,j)} \left( \mathbf{g}_j; b - |\mathbf{a}_{1,j-1}|, 1 - |\mathbf{a}_{1,j}| + b; \mathcal{Y}_j(\mathbf{z}^{-1}) \right), \quad j = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

а коэффициенты  $B_j$  имеют вид

$$B_0 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(b - |\mathbf{a}|)}{\Gamma(b) \Gamma(c - |\mathbf{a}|)}, \quad B_j = \frac{\Gamma(c) \Gamma(b - |\mathbf{a}_{1,j-1}|) \Gamma(|\mathbf{a}_{1,j}| - b)}{\Gamma(a_j) \Gamma(b) \Gamma(c - b)}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (4.41)$$

Функции (4.39), (4.40) являются линейно независимыми частными решениями системы (1.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство формулы продолжения (4.38)–(4.41) проведем методом индукции по числу  $N$  переменных функции  $F_D^{(N)}$ .

Заметим, прежде всего, что при  $N = 1$ , т.е. когда функция Лауричеллы совпадает с функцией Гаусса, соотношения (4.38)–(4.41), устанавливаемые теоремой, совпадают с известными формулами (2.8), (2.9), (2.26), (2.27), осуществляющими продолжение функции  $F(a, b; c; z)$  во внешность единичного круга. Действительно, при  $N = 1$  правая часть (4.38), как и правая часть (2.26), содержит лишь два слагаемых  $B_0 \mathcal{U}_0^{(\infty)}$  и  $B_1 \mathcal{U}_1^{(\infty)}$ , а формулы (4.39) и (4.40), которыми определяются функции  $\mathcal{U}_0^{(\infty)}$  и  $\mathcal{U}_1^{(\infty)}$ , переходят соответственно в канонические решения Куммера (2.8) и (2.9). При этом равенства (4.41) для коэффициентов  $B_0$  и  $B_1$  совпадают с (2.27). Формула (4.37) для области  $\mathbb{V}^N$  переходит в равенство (2.25) для области  $\mathbb{V}$ , где справедливы соотношения (2.8), (2.9), (2.26), (2.27).

Предположим теперь, что утверждение теоремы справедливо для функции Лауричеллы с числом переменных  $(N - 1)$ , и убедимся в справедливости равенств (4.38)–(4.41), записанных для функции Лауричеллы с числом переменных  $N$ . Для этого воспользуемся представлением (4.18) для функции Лауричеллы, которое устанавливает предложение 2.2. Заметим, прежде всего, что фигурирующие в формуле (4.18) функция  $u_1$  и множитель  $C_1$ , определяемые из (4.20) и (4.21), совпадают соответственно с фигурирующими в (4.38)

функцией  $\mathcal{U}_1^{(\infty)}$  и множителем  $B_1$ , которые определяются из (4.40) и (4.41) при  $j = 1$ , т.е. для второго слагаемого в (4.18) справедливо равенство

$$C_1 u_1(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = B_1 \mathcal{U}_1^{(\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}). \quad (4.42)$$

Убедимся теперь в том, что аналитическое продолжение по переменным  $z_2, \dots, z_N$  первого слагаемого в формуле (4.18), равного  $C_0 u_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ , даст сумму (4.38) за исключением слагаемого  $B_1 \mathcal{U}_1^{(\infty)}$ , т.е. в том, что справедливо равенство

$$C_0 u_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = B_0 \mathcal{U}_0^{(\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) + \sum_{j=2}^N B_j \mathcal{U}_j^{(\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}). \quad (4.43)$$

Применяя к функциям  $F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; b - a_1 - k_1, c - a_1 - k_1; \mathbf{z}'_1)$ , фигурирующим в формуле (4.19), соотношения (4.38)–(4.41), которые, напомним, предполагаются верными для числа переменных  $(N - 1)$ , записываем формулы аналитического продолжения для них в виде:

$$F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; b - a_1 - k_1, c - a_1 - k_1; \mathbf{z}'_1) = \sum_{j=0}^N' \tilde{B}_j \tilde{\mathcal{U}}_j^{(\infty)}(\mathbf{a}; b, c, k_1; \mathbf{z}'_1), \quad (4.44)$$

где штрих над суммой означает, что пропущено слагаемое, соответствующее  $j = 1$ , функции  $\tilde{\mathcal{U}}_j^{(\infty)}$  определяются равенствами

$$\tilde{\mathcal{U}}_0^{(\infty)}(\mathbf{a}; b, c, k_1; \mathbf{z}) := \left( \prod_{l=2}^N (-z_l)^{-a_l} \right) F_D^{(N)}\left(\mathbf{a}'_1; 1 + |\mathbf{a}| - c + k_1, 1 + |\mathbf{a}| - b + k_1; \frac{1}{\mathbf{z}'_1}\right), \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{U}}_j^{(\infty)}(\mathbf{a}; b, c, k_1; \mathbf{z}) &:= (-z_j)^{|\mathbf{a}_{1,j-1}| - b + k_1} \left( \prod_{l=2}^{j-1} (-z_l)^{-a_l} \right) \times \\ &\times G^{(N-1,j)}\left(\tilde{\mathbf{g}}_j; b - |\mathbf{a}_{1,j-1}| - k_1, 1 - |\mathbf{a}_{1,j}| + b - k_1; \mathcal{Y}_{j-1}(1/\mathbf{z}'_1)\right), \quad j = \overline{2, N}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

а коэффициенты  $\tilde{B}_j = \tilde{B}_j(k_1)$  имеют вид

$$\tilde{B}_0(k_1) = \frac{\Gamma(c - a_1 - k_1) \Gamma(b - |\mathbf{a}| - k_1)}{\Gamma(b - a_1 - k_1) \Gamma(c - |\mathbf{a}| - k_1)}, \quad (4.47)$$

$$\widetilde{B}_j(k_1) = \frac{\Gamma(c - a_1 - k_1) \Gamma(b - |\mathbf{a}_{1,j-1}| - k_1) \Gamma(|\mathbf{a}_{1,j}| - b + k_1)}{\Gamma(a_j) \Gamma(b - a_1 - k_1) \Gamma(c - b)}, \quad j = \overline{2, N}. \quad (4.48)$$

Величины  $\widetilde{\mathbf{g}}_j$  и  $\mathcal{Y}_m(1/\mathbf{z}'_1)$  в (4.46) определяются равенствами:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{g}}_j &= (a_2, \dots, a_{j-1}, 1 - c + b, a_{j+1}, \dots, a_N), \quad j = \overline{2, N} \\ \mathcal{Y}_m(1/\mathbf{z}'_1) &= \left( \frac{z_m}{z_2}, \dots, \frac{z_m}{z_{m-1}}, \frac{1}{z_m}, \frac{z_{m+1}}{z_m}, \dots, \frac{z_N}{z_m} \right), \quad m = \overline{1, N-1}. \end{aligned}$$

Подставляя (4.44)–(4.48) в формулу (4.19) и умножая на  $C_0$ , получаем:

$$C_0 u_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \mathcal{Q}_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) + \sum_{j=2}^N \mathcal{Q}_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad (4.49)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) &:= \\ &= C_0 (-z_1)^{-a_1} \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{k_1} (1 + a_1 - c)_{k_1}}{k_1! (1 + a_1 - b)_{k_1}} z_1^{-k_1} \widetilde{B}_j(k_1) \widetilde{\mathcal{U}}_j^{(\infty)}(\mathbf{a}; b, c, k_1; \mathbf{z}). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Покажем, что для  $j = 0$  и  $j = \overline{2, N}$  выполняются равенства

$$\mathcal{Q}_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = B_j \mathcal{U}_j^{(\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad (4.51)$$

где функции  $\mathcal{U}_j^{(\infty)}$  определяются равенствами (4.39), (4.40), а множители  $B_j$  — равенствами (4.41).

(i) Убедимся в справедливости формулы (4.51) при  $j = 0$ , для чего преобразуем правую часть (4.50) при  $j = 0$  и покажем, она совпадает с  $B_0 \mathcal{U}_0^{(\infty)}$ . Подставляя в (4.50) величины  $\widetilde{\mathcal{U}}_0^{(\infty)}$  и  $\widetilde{B}_0$ , определяемые из (4.45) и (4.47), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(b - a_1)}{\Gamma(b) \Gamma(c - a_1)} (-z_1)^{-a_1} \left( \prod_{l=2}^N (-z_l)^{-a_l} \right) \times \\ &\times \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{k_1} (1 + a_1 - c)_{k_1}}{k_1! (1 + a_1 - b)_{k_1}} \frac{\Gamma(c - a_1 - k_1) \Gamma(b - |\mathbf{a}| - k_1)}{\Gamma(b - a_1 - k_1) \Gamma(c - |\mathbf{a}| - k_1)} \times \\ &\times z_1^{-k_1} F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; 1 + |\mathbf{a}| - c + k_1, 1 + |\mathbf{a}| - b + k_1; \mathbf{z}'_1). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Учитывая следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(b - a_1)}{(1 + a_1 - b)_{k_1} \Gamma(b - a_1 - k_1)} &= (-1)^{k_1}, \\ \frac{\Gamma(c - a_1)}{(1 + a_1 - c)_{k_1} \Gamma(c - a_1 - k_1)} &= (-1)^{k_1}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

преобразуем (4.52) к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} \left( \prod_{l=1}^N (-z_l)^{-a_l} \right) \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{k_1}}{k_1!} \frac{\Gamma(b - |\mathbf{a}| - k_1)}{\Gamma(c - |\mathbf{a}| - k_1)} \times \\ &\times z_1^{-k_1} F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; 1 + |\mathbf{a}| - c + k_1, 1 + |\mathbf{a}| - b + k_1; \mathbf{z}'_1). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Записывая фигурирующие в (4.54) функции  $F_D^{(N-1)}$  в виде гипергеометрических рядов (1.2), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} \left( \prod_{l=1}^N (-z_l)^{-a_l} \right) \times \\ &\times \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b - |\mathbf{a}| - k_1)(1 + |\mathbf{a}| - c + k_1)_{|\mathbf{k}_{2,N}|}}{\Gamma(c - |\mathbf{a}| - k_1)(1 + |\mathbf{a}| - b + k_1)_{|\mathbf{k}_{2,N}|}} \frac{(a_1)_{k_1} \dots (a_N)_{k_N}}{k_1! \dots k_N!} z_1^{-k_1} \dots z_N^{-k_N}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Используя следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(b - |\mathbf{a}| - k_1)}{(1 + |\mathbf{a}| - b + k_1)_{|\mathbf{k}_{2,N}|}} &= (-1)^{k_1} \frac{\Gamma(b - |\mathbf{a}|)}{(1 + |\mathbf{a}| - b)_{|\mathbf{k}|}}, \\ \frac{\Gamma(c - |\mathbf{a}| - k_1)}{(1 + |\mathbf{a}| - c + k_1)_{|\mathbf{k}_{2,N}|}} &= (-1)^{k_1} \frac{\Gamma(c - |\mathbf{a}|)}{(1 + |\mathbf{a}| - c)_{|\mathbf{k}|}}, \end{aligned}$$

переписываем  $\mathcal{Q}_0$  в виде

$$\mathcal{Q}_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(b - |\mathbf{a}|)}{\Gamma(b) \Gamma(c - |\mathbf{a}|)} \left( \prod_{l=1}^N (-z_l)^{-a_l} \right) F_D^{(N)}(\mathbf{a}; 1 + |\mathbf{a}| - c, 1 + |\mathbf{a}| - b; \mathbf{z}^{-1}),$$

и, таким образом, учитывая (4.39), (4.41), приходим к равенству (4.51) при  $j = 0$ .

(ii) Убедимся теперь в справедливости формулы (4.51) при всех  $j = \overline{2, N}$ , для чего преобразуем правую часть (4.50) к виду  $B_j \tilde{\mathcal{U}}_j^{(\infty)}$ . Подставляя величины  $\tilde{\mathcal{U}}_j^{(\infty)}$  и  $\tilde{B}_j$ ,  $j = \overline{2, N}$ , определяемые из (4.40) и (4.47) в формулу (4.50),

получаем

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q}_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(b - a_1)}{\Gamma(b) \Gamma(c - a_1) \Gamma(a_j) \Gamma(c - b)} (-z_1)^{-a_1} (-z_j)^{|\mathbf{a}_{1,j-1}| - b} \left( \prod_{l=2}^{j-1} (-z_l)^{-a_l} \right) \times \\
 &\times \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{k_1} (1 + a_1 - c)_{k_1}}{k_1! (1 + a_1 - b)_{k_1}} \frac{\Gamma(c - a_1 - k_1) \Gamma(b - |\mathbf{a}_{1,j-1}| - k_1) \Gamma(|\mathbf{a}_{1,j}| - b + k_1)}{\Gamma(b - a_1 - k_1)} \times \\
 &\times z_1^{-k_1} G^{(N-1,j-1)} \left( \tilde{\mathbf{g}}_j; b - |\mathbf{a}_{1,j-1}| - k_1, 1 - |\mathbf{a}_{1,j}| + b - k_1; \mathcal{Y}_{j-1}(1/\mathbf{z}'_1) \right).
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Преобразуя эту формулу с учетом (4.53), находим

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q}_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b) \Gamma(a_j) \Gamma(c - b)} (-z_j)^{|\mathbf{a}_{1,j-1}| - b} \left( \prod_{l=1}^{j-1} (-z_l)^{-a_l} \right) \times \\
 &\times \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{k_1}}{k_1!} \Gamma(b - |\mathbf{a}_{1,j-1}| - k_1) \Gamma(|\mathbf{a}_{1,j}| - b + k_1) \times \\
 &\times (-1)^{k_1} \left( \frac{z_j}{z_1} \right)^{k_1} G^{(N-1,j-1)} \left( \tilde{\mathbf{g}}_j; b - |\mathbf{a}_{1,j-1}| - k_1, 1 - |\mathbf{a}_{1,j}| + b - k_1; \mathcal{Y}_{j-1}(1/\mathbf{z}'_1) \right).
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Записывая фигурирующие в (4.57) функции  $G^{(N-1,j)}$  в виде гипергеометрических рядов (4.35)

$$\begin{aligned}
 &G^{(N-1,j-1)} \left( \tilde{\mathbf{g}}_j; b - |\mathbf{a}_{1,j-1}| - k_1, 1 - |\mathbf{a}_{1,j}| + b - k_1; \mathcal{Y}_{j-1}(1/\mathbf{z}'_1) \right) = \\
 &= \sum_{|\mathbf{k}_{2,N}|=0}^{\infty} \frac{(b - |\mathbf{a}_{1,j-1}| - k_1)_{|\mathbf{k}_{j,N}| - |\mathbf{k}_{2,j-1}|} (a_2)_{k_2} \dots (1 - c + b)_{k_j} \dots (a_N)_{k_N}}{(1 + b - |\mathbf{a}_{1,j}| - k_1)_{|\mathbf{k}_{j,N}| - |\mathbf{k}_{2,j-1}|} k_2! \dots k_N!} \\
 &\quad (z_j/z_2)^{k_2} \dots (z_j/z_{j-1})^{k_{j-1}} (1/z_j)^{k_j} (z_{j+1}/z_j)^{k_{j+1}} \dots (z_N/z_j)^{k_N},
 \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q}_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b) \Gamma(a_j) \Gamma(c - b)} (-z_j)^{|\mathbf{a}_{1,j-1}| - b} \left( \prod_{l=1}^{j-1} (-z_l)^{-a_l} \right) \times \\
 &\times \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b - |\mathbf{a}_{1,j-1}| - k_1) \Gamma(|\mathbf{a}_{1,j}| - b + k_1) (b - |\mathbf{a}_{1,j-1}| - k_1)_{|\mathbf{k}_{j,N}| - |\mathbf{k}_{2,j-1}|}}{(1 - |\mathbf{a}_{1,j}| + b - k_1)_{|\mathbf{k}_{j,N}| - |\mathbf{k}_{2,j-1}|}} \times \\
 &\times \frac{(a_1)_{k_1} \dots (1 - c + b)_{k_j} \dots (a_N)_{k_N}}{k_1! \dots k_N!} \times \\
 &\times (z_j/z_1)^{k_1} \dots (z_j/z_{j-1})^{k_{j-1}} (1/z_j)^{k_j} (z_{j+1}/z_j)^{k_{j+1}} \dots (z_N/z_j)^{k_N}.
 \end{aligned}$$

Используя следующие равенства:

$$\begin{aligned} & \Gamma(b - |\mathbf{a}_{1,j-1}| - k_1) (b - |\mathbf{a}_{1,j-1}| - k_1)_{|\mathbf{k}_{j,N}| - |\mathbf{k}_{2,j-1}|} = \\ & = \Gamma(b - |\mathbf{a}_{1,j-1}|) (b - |\mathbf{a}_{1,j-1}|)_{|\mathbf{k}_{j,N}| - |\mathbf{k}_{1,j-1}|}, \\ & \frac{\Gamma(|\mathbf{a}_{1,j}| - b + k_1)}{(1 - |\mathbf{a}_{1,j}| + b - k_1)_{|\mathbf{k}_{j,N}| - |\mathbf{k}_{2,j-1}|}} = (-1)^{k_1} \frac{\Gamma(|\mathbf{a}_{1,j}| - b)}{(1 - |\mathbf{a}_{1,j}| + b)_{|\mathbf{k}_{j,N}| - |\mathbf{k}_{1,j-1}|}}, \end{aligned}$$

переписываем  $\mathcal{Q}_j$  в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(b - |\mathbf{a}_{1,j-1}|) \Gamma(|\mathbf{a}_{1,j}| - b)}{\Gamma(a_j) \Gamma(b) \Gamma(c - b)} \times \\ & \times (-z_j)^{|\mathbf{a}_{1,j-1}| - b} \left( \prod_{l=1}^{j-1} (-z_l)^{-a_l} \right) G^{(N,j)} \left( \mathbf{g}_j; b - |\mathbf{a}_{1,j-1}|, 1 - |\mathbf{a}_{1,j}| + b; \mathcal{Y}_j(\mathbf{z}^{-1}) \right), \end{aligned}$$

и, таким образом, убеждаемся в справедливости равенства (4.51) для всех  $j = \overline{2, N}$ .

Подставляя (4.42) и (4.49), (4.51) в (4.18), получаем представление (4.38) для функции Лауричеллы.

В том, что  $\mathcal{U}_j^{(\infty)}, j = \overline{0, N}$ , являются частными решениями системы (1.5), можно убедиться непосредственной подстановкой (4.39) и (4.40) в (1.5). Теорема 2.5 доказана.

Из теоремы 2.5 с помощью несложных рассуждений могут быть найдены формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы в области вида  $\mathbb{V}_\sigma^N := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sigma(\mathbf{z}) \in \mathbb{V}^N\}$ , где  $\sigma$  — произвольный элемент группы перестановок  $S_N$ . Действительно, учитывая равенство (1.10), вытекающее непосредственно из определения (1.2), а также то, что включение  $\mathbf{z} \in \mathbb{V}_\sigma^N$  влечет  $\sigma(\mathbf{z}) \in \mathbb{V}^N$ , получаем, что аналитическое продолжения функции  $F_D^{(N)}$  в область  $\mathbb{V}_\sigma^N$  осуществляется формулой (4.38) с заменой в ее правой части  $\mathbf{a}$  на  $\sigma(\mathbf{a})$  и  $\mathbf{z}$  на  $\sigma(\mathbf{z})$ . При этом функции  $\mathcal{U}_j^{(\infty)}(\sigma(\mathbf{a}); b, c; \sigma(\mathbf{z})), j = \overline{0, N}$ , получаемые из (4.39), (4.40) действием перестановки  $\sigma \in S_N$  на аргумент  $\mathbf{z}$  и параметр  $\mathbf{a}$ , являются линейно независимыми частными решениями системы (1.5).

**4.2. Формулы аналитического продолжения в окрестность точки**  $\mathbf{z}^{(1)} = (1, \dots, 1)$ . Обратимся к выводу формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$  в окрестность точки  $\mathbf{z}^{(1)}$ . Используя известную лемму Барнса (см. формулу (2.5), приведенную, например, в [127]) и определение (1.2) функции Лауричеллы, устанавливаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(a_1 + s)\Gamma(b + s)}{\Gamma(c + s)} F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; b + s, c + s; \mathbf{z}'_1) = \\ & = \frac{1}{2\pi i \Gamma(c - a_1) \Gamma(c - b)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Gamma(a_1 + t)\Gamma(b + t)\Gamma(s - t)\Gamma(c - a_1 - b - t) \times \\ & \quad \times F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; b + t; c - a_1; \mathbf{z}'_1) dt, \end{aligned} \quad (4.58)$$

где векторы  $\mathbf{a}'_1$  и  $\mathbf{z}'_1$ , напомним, определяются равенствами (4.1). Переписывая определение (4.3) функции  $f$  с учетом равенства (4.58) и подставляя новое выражение  $f$  в формулу (4.4), получаем представление функции  $F_D^{(N)}$  в виде двойного интеграла. Меняя в нем порядок интегрирования по  $s$  и  $t$ , а также используя известное тождество

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} \Gamma(-s)\Gamma(s - t)(-z)^s ds = (1 - z)^t$$

и вводя обозначение

$$\begin{aligned} g(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}, s) := & \Gamma(a_1 + s)\Gamma(b + s)\Gamma(-s)\Gamma(c - a_1 - b - s) \times \\ & \times (1 - z_1)^s F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; b + s, c - a_1; \mathbf{z}'_1), \end{aligned} \quad (4.59)$$

приходим к следующему утверждению, устанавливающему используемое в работе *второе* представление типа Барнса для функции  $F_D^{(N)}$ .

**Предложение 2.3.** *Функция Лауричеллы  $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ , определяемая рядом (1.2), представима для  $\mathbf{z} \in \{|\arg(1 - z_1)| < \pi, |z_k| < 1, k = \overline{2, N}\}$  в виде контурного интеграла типа Барнса*

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \frac{\Gamma(c)}{2\pi i \Gamma(a_1) \Gamma(b) \Gamma(c - a_1) \Gamma(c - b)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} g(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}, s) ds, \quad (4.60)$$

где подынтегральная функция имеет вид (4.59), а контур интегрирования в формуле (4.60) выбран так, чтобы полюсы

$$s_k^{(1)} = k, \quad s_k^{(2)} = c - a_1 - b, \quad k \in \mathbb{Z}^+, \quad (4.61)$$

и полюсы  $s_k^{(3)} = -a_1 - k$ ,  $s_k^{(4)} = -b - k$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ , функции  $g(s) := g(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}, s)$  лежали соответственно справа и слева от него.

Отметим, что наличие указанных в предложении 2.3 полюсов у подынтегрального выражения  $g(s)$ , определяемого из (4.59), вытекает из существования полюсов у гамма-функции  $\Gamma(s)$  в точках  $s \in \mathbb{Z}^-$ . Учитывая еще, что функция

$$\tilde{F}(s) := F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; b + s, c - a_1; \mathbf{z}'_1),$$

очевидно, является регулярной в конечной плоскости, находим, что подынтегральная функция  $g(s)$  справа от контура интегрирования (4.60) не имеет других особых точек, кроме полюсов (4.61). Нетрудно увидеть, что если выполняется соотношение  $(c - a_1 - b) \notin \mathbb{Z}$ , то указанные полюсы являются простыми, а вычеты  $g(s)$  в них, вычисляемые с учетом (4.13), даются равенствами:

$$\begin{aligned} \text{res } g(s_k^{(1)}) &= -\Gamma(a_1) \Gamma(b) \Gamma(c - a_1 - b) \frac{(a_1)_k (b)_k}{(1 + a_1 + b - c)_k k!} \times \\ &\quad \times (1 - z)^k F(a'_1, b + k; c - a_1; \zeta), \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} \text{res } g(s_k^{(2)}) &= -\Gamma(c - a_1) \Gamma(c - b) \Gamma(a_1 + b - c) \frac{(c - a_1)_k (c - b)_k}{(1 + c - a_1 - b)_k k!} \times \\ &\quad \times (1 - z)^{c - a_1 - b + k} F(a'_1, c - a_1 + k; c - a_1; \zeta). \end{aligned} \quad (4.63)$$

Предполагая, что разность  $(c - a_1 - b)$  не является целым числом и записывая интеграл (4.60) в виде (бесконечной) суммы вычетов (4.62), (4.63) в простых полюсах  $s_k^{(1)}$  и  $s_k^{(2)}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ , функции  $g(s)$ , приходим к следующему утверждению.

**Предложение 2.4.** *Если параметры функции  $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ , определяемой рядом (1.2) таковы, что  $(c - a_1 - b)$  не является целым числом, то ее*

аналитическое продолжение в область

$$\mathbb{G}^N := \{ |1 - z_1| + |z_k| < 1, \quad k = \overline{2, N}; \quad |\arg(1 - z_1)| < \pi \},$$

дается следующей формулой:

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = D_0 v_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) + D_1 v_1(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad (4.64)$$

где  $v_0$  и  $v_1$  определяются равенствами

$$v_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (b)_k}{k! (1 + a_1 + b - c)_k} (1 - z_1)^k F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; b + k, c - a_1; \mathbf{z}'_1), \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} v_1(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) &= (1 - z_1)^{c - a_1 - b} \left( \prod_{l=2}^N (1 - z_l)^{-a_l} \right) \times \\ &\times F_D^{(N)} \left( c - |\mathbf{a}|, a_2, \dots, a_N; c - b, 1 + c - a_1 - b; 1 - z_1, \frac{1 - z_1}{1 - z_2}, \dots, \frac{1 - z_1}{1 - z_N} \right), \end{aligned} \quad (4.66)$$

а коэффициенты  $D_1$  и  $D_2$  имеют вид

$$D_0 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c - a_1 - b)}{\Gamma(c - a_1) \Gamma(c - b)}, \quad D_1 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(a_1 + b - c)}{\Gamma(a_1) \Gamma(b)}. \quad (4.67)$$

Сходимость ряда (4.65) для  $v_0$  в области  $\mathbb{G}^N$  устанавливается методами, изложенными в [169]. Представление (4.66) для  $v_1$  сходится в  $\mathbb{G}^N$ , поскольку если вектор  $\mathbf{z}$  лежит в этой области, то аргумент функции  $F_D^{(N)}$  из (4.66), очевидно, принадлежит поликругу  $\mathbb{U}^N$ .

Отметим, что предложение 2.4 дает аналитическое продолжение ряда (1.2) для функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$  в область  $\mathbb{G}^N$ , где переменная  $z_1$  изменяется в окрестности единицы. Прежде чем осуществить такое продолжение по остальным переменным  $z_j$ ,  $j = \overline{2, N}$ , определим векторы  $(\mathbf{1} - \mathbf{z})$  и  $\mathbf{h}_j$  по формулам:

$$(\mathbf{1} - \mathbf{z}) := (1 - z_1, \dots, 1 - z_N), \quad (4.68)$$

$$\mathbf{h}_j := (a_1, \dots, a_{j-1}, c - |\mathbf{a}|, a_{j+1}, \dots, a_N),$$

а также введем обозначение для области

$$\mathbb{K}^N := \{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : 0 < |1-z_1| < \dots < |1-z_N| < 1; |\arg(1-z_j)| < \pi, j = \overline{1, N} \}. \quad (4.69)$$

Кроме того, напомним, что величины  $|\mathbf{a}_{1,j}|$ ,  $|\mathbf{a}|$  и отображение  $\mathcal{Y}_j$  даются соответственно равенствами (4.31) и (4.33), а ряд  $G^{(N,j)}$  определен формулой (4.35).

Применяя результат предложения 2.4 к функциям  $F_D^{(N-1)}$ , фигурирующим в (4.65), а также к аналогичным функциям с меньшим числом переменных, возникающим в результате такого применения, приходим к следующему утверждению, позволяющему осуществить продолжение функции Лауриселлы  $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$  в область  $\mathbb{K}^N$ .

**Теорема 2.6.** *Если ни одно из чисел  $(c - |\mathbf{a}_{1,j}| - b)$ ,  $j = \overline{1, N}$ , не является целым, то аналитическое продолжение ряда (1.2) в область  $\mathbb{K}^N$  дается формулой*

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{j=0}^N A_j \mathcal{U}_j^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad (4.70)$$

где функции  $\mathcal{U}_j^{(1)}$  определяются равенствами

$$\mathcal{U}_0^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, 1 + |\mathbf{a}| + b - c; \mathbf{1} - \mathbf{z}), \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_j^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) &= (1 - z_j)^{c - |\mathbf{a}_{1,j}| - b} \left( \prod_{l=j+1}^N (1 - z_l)^{-a_l} \right) \times \\ &\times G^{(N,j)} \left( \mathbf{h}_j; c - |\mathbf{a}_{1,j-1}| - b, 1 + c - |\mathbf{a}_{1,j}| - b, \mathcal{Y}_j(\mathbf{1} - \mathbf{z}) \right), \quad j = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (4.72)$$

а коэффициенты  $A_j$  имеют вид

$$A_0 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c - |\mathbf{a}| - b)}{\Gamma(c - |\mathbf{a}|) \Gamma(c - b)}, \quad (4.73)$$

$$A_j = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c - |\mathbf{a}_{1,j-1}| - b) \Gamma(|\mathbf{a}_{1,j}| + b - c)}{\Gamma(a_j) \Gamma(b) \Gamma(c - b)}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (4.74)$$

Функции (4.71), (4.72) являются линейно независимыми частными решениями системы (1.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2.6 дано в приложении С.

Из теоремы 2.6 и равенства (1.10) вытекает, что формулы аналитического продолжения  $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$  в области вида  $\mathbb{K}_\sigma^N := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sigma(\mathbf{z}) \in \mathbb{K}^N\}$ , где  $\sigma \in S_N$ , имеют вид (4.70) с заменой в правой части этого равенства  $\mathbf{a}$  на  $\sigma(\mathbf{a})$  и  $\mathbf{z}$  на  $\sigma(\mathbf{z})$ . При этом функции  $\mathcal{U}_j^{(1)}(\sigma(\mathbf{a}); b, c; \sigma(\mathbf{z})), j = \overline{0, N}$ , получаемые из (4.71), (4.72) действием перестановки  $\sigma \in S_N$  на аргумент  $\mathbf{z}$  и параметр  $\mathbf{a}$ , являются линейно независимыми частными решениями системы (1.5).

В заключение отметим, что подход к получению формул аналитического продолжения функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ , реализованный в пп. 4.1, 4.2 на примере точек  $\mathbf{z}^{(\infty)}$  и  $\mathbf{z}^{(1)}$ , далее применяется для построения полной системы формул такого продолжения, соответствующих различным диапазонам изменения  $\mathbf{z}$  вблизи всех особых многообразий  $F_D^{(N)}$ .

**4.3. Формулы аналитического продолжения в окрестность точки  $\mathbf{z}_p^{(1, \infty)} = (1, \dots, 1, \infty, \dots, \infty)$ .** Перейдем к выводу формул аналитического продолжения в область, где первые  $p$  переменных функции Лауричеллы  $z_1, \dots, z_p$  близки к единице, а остальные  $(N - p)$  ее переменных  $z_{p+1}, \dots, z_N$  близки к бесконечности.

4.3.1°. Некоторые обозначения. Обозначим через  $\mathbb{W}^{N, p}$  области следующего вида:

$$\mathbb{W}^{N, p} := \bigcup_{\delta \in (0, 1)} \mathbb{W}^{N, p}(\delta), \quad (4.75)$$

где для каждого заданного  $\delta \in (0, 1)$  вспомогательная область  $\mathbb{W}^{N, p}(\delta)$  определяется равенством

$$\begin{aligned} \mathbb{W}^{N, p}(\delta) := \\ := \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : 0 < |1 - z_1| < \dots < |1 - z_p| < \delta, |\arg(1 - z_j)| < \pi, j = \overline{1, p}; \right. \\ \left. |z_{p+1}| > \dots > |z_N| > 1 + \delta, |\arg(-z_j)| < \pi, j = \overline{p + 1, N} \right\}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Здесь целочисленный параметр  $p$  принимает значения  $p = \overline{0, N}$ , причем, если  $p = 0$ , то в (4.76) отсутствуют ограничения для переменных  $z_j$ ,  $j = \overline{1, p}$ , а если  $p = N$ , то в этом определении отсутствуют ограничения для переменных  $z_j$ ,  $j = \overline{p+1, N}$ .

Напомним, что  $S_N$  — группа перестановок множества из  $N$  элементов, а  $\sigma(\mathbf{z})$  — результат действия некоторого элемента  $\sigma \in S_N$  на вектор  $\mathbf{z}$ , т.е. вектор, получаемый перестановкой компонент  $\mathbf{z}$ . Определим конусные области, совпадающие с  $\mathbb{W}^{N,p}$  с точностью до симметрий

$$\mathbb{W}_\sigma^{N,p} := \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sigma(\mathbf{z}) \in \mathbb{W}^{N,p} \right\}. \quad (4.77)$$

Напомним также следующие элементарные операции над вектором  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)$ :

$$(\mathbf{1} - \mathbf{z}) := (1 - z_1, \dots, 1 - z_N), \quad \mathbf{z}^{-1} := \left( \frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_N} \right), \quad (4.78)$$

а также вид (4.33), (4.34) преобразований  $\mathcal{Y}_j(\mathbf{z})$ . Для векторов

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_p(\mathbf{z}) := (z_1, \dots, z_p), \quad \mathbf{s}_p = \mathbf{s}_p(\mathbf{z}) := (z_{p+1}, \dots, z_N) \quad (4.79)$$

аналогичные (4.33), (4.34) преобразования, а также их композиции определяются очевидным образом, например, справедливы равенства

$$\mathcal{Y}_j(\mathbf{1} - \mathbf{r}_p) = \left( \frac{1 - z_1}{1 - z_j}, \dots, \frac{1 - z_{j-1}}{1 - z_j}, 1 - z_j, \frac{1 - z_j}{1 - z_{j+1}}, \dots, \frac{1 - z_j}{1 - z_p} \right), \quad (4.80)$$

$$\mathcal{Y}_j(\mathbf{s}_p^{-1}) = \left( \frac{z_j}{z_{p+1}}, \dots, \frac{z_j}{z_{j-1}}, \frac{1}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_N}{z_j} \right). \quad (4.81)$$

Введем еще вспомогательные функции  $\mathcal{Z}_j^{(N,p)}(\mathbf{z})$ , где  $j, p = \overline{0, N}$ , по формулам:

$$\mathcal{Z}_0^{(N,p)}(\mathbf{z}) := (\mathbf{r}_p - \mathbf{1}, \mathbf{s}_p^{-1}), \quad \mathcal{Z}_j^{(N,p)}(\mathbf{z}) := \left( \mathcal{Y}_j(\mathbf{1} - \mathbf{r}_p), \mathbf{s}_p^{-1} \right), \quad j = \overline{1, p}; \quad (4.82)$$

$$\mathcal{Z}_j^{(N,p)}(\mathbf{z}) := \left( \frac{z_1 - 1}{z_j}, \dots, \frac{z_p - 1}{z_j}, \mathcal{Y}_j(\mathbf{s}_p^{-1}) \right), \quad j = \overline{p+1, N}; \quad (4.83)$$

здесь использованы определения (4.79)–(4.81), а выражения вида

$$\mathbf{f} = (w_1, \dots, w_n, \mathbf{q})$$

или  $\mathbf{f} = (\mathbf{w}, \mathbf{q})$ , где  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$  и  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_j)$ , означают, что

$$\mathbf{f} = (w_1, \dots, w_n, q_1, \dots, q_j).$$

Если  $p = 0$ , то для определения функций  $Z_j^{(N, p)}(\mathbf{z})$  используется первое равенство (4.82) и равенства (4.83), а если  $p = N$ , то указанные функции находятся из (4.82), а формулы (4.83) в определении не участвуют.

Напомним обозначения (4.31) для частичных сумм  $|\mathbf{a}_{s, l}|$  и  $|\mathbf{a}|$  компонент вектора  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)$  и введем векторы  $\mathbf{h}_{p, j}$ , выражющиеся через параметры  $a_1, \dots, a_N, b$  и с функции Лауричеллы по формулам:

$$\mathbf{h}_{p, j} := (a_1, \dots, a_{j-1}, c - |\mathbf{a}|, a_{j+1}, \dots, a_N), \quad j = \overline{1, p}, \quad (4.84)$$

$$\mathbf{h}_{p, j} := (a_1, \dots, a_{j-1}, 1 - c + |\mathbf{a}_{1, p}| + b, a_{j+1}, \dots, a_N), \quad j = \overline{p+1, N}. \quad (4.85)$$

Если  $p = 0$ , то  $\mathbf{h}_{p, j}$  определяются только с помощью (4.85), а если  $p = N$ , то только с помощью (4.84). В п. 4.3.2° векторы (4.82), (4.83) и (4.84), (4.85) будут играть роль соответственно переменных и параметров для обобщенных гипергеометрических функций, с помощью которых записаны формулы аналитического продолжения ряда (1.2).

Введем следующие величины:

$$\begin{aligned} \varkappa(\mathbf{k}, p, l) &:= |\mathbf{k}_{1, p}| - |\mathbf{k}_{p+1, l-1}| + |\mathbf{k}_{l, N}|, \\ \lambda(\mathbf{k}, p, l) &:= |\mathbf{k}_{l, p}| - |\mathbf{k}_{1, l-1}|, \quad \mu(\mathbf{k}, p) := |\mathbf{k}_{p+1, N}| - |\mathbf{k}_{1, p}|, \end{aligned} \quad (4.86)$$

где выражение  $|\mathbf{k}_{s, l}|$  означает частичную сумму элементов мультииндекса  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_N)$ , определенную в (4.31). Кроме того, будем использовать сокращенную запись для произведений вида:

$$\mathbf{k}! := k_1! \dots k_N!, \quad (\mathbf{a})_{\mathbf{k}} := (a_1)_{k_1} \dots (a_N)_{k_N}, \quad \mathbf{z}^{\mathbf{k}} := z_1^{k_1} \dots z_N^{k_N}. \quad (4.87)$$

Напомним, что символ Похгаммера  $(a)_k$ , определяемый из (1.3) для  $k \in \mathbb{Z}^+$  имеет вид (1.4), а для  $0 > k \in \mathbb{Z}$  — вид (4.36).

Введем обобщенные гипергеометрические ряды  $\mathcal{F}^{(N,p)}(\mathbf{a}; b, c_1, c_2; \mathbf{z})$ ,  $\mathcal{G}_j^{(N,p)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$  и  $\mathcal{H}_j^{(N,p)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$  по следующим формулам, где использованы обозначения (1.3), (4.86), (4.87):

$$\mathcal{F}^{(N,p)}(\mathbf{a}; b, c_1, c_2; \mathbf{z}) := \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{|\mathbf{k}_{p+1,N}|}}{(c_1)_{\mu(\mathbf{k},p)} (c_2)_{|\mathbf{k}_{1,p}|}} \frac{(\mathbf{a})_{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \quad (4.88)$$

$$\mathcal{G}_j^{(N,p)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{\lambda(\mathbf{k},p,j)}}{(c)_{\lambda(\mathbf{k},p,j)}} \frac{(a_j - |\mathbf{k}_{p+1,N}|)_{k_j}}{(a_j)_{k_j}} \frac{(\mathbf{a})_{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \quad (4.89)$$

$$\mathcal{H}_j^{(N,p)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{\varkappa(\mathbf{k},p,j)}}{(c)_{\varkappa(\mathbf{k},p,j)}} \frac{(a_j + |\mathbf{k}_{1,p}|)_{k_j}}{(a_j)_{k_j}} \frac{(\mathbf{a})_{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}. \quad (4.90)$$

Предполагается, что в формуле (4.89) параметр  $j$  может принимать значения  $1, 2, \dots, p$ , а в формуле (4.90) — значения  $p+1, p+2, \dots, N$ .

Сходимость рядов (4.88)–(4.90) устанавливает следующее утверждение.

**Предложение 2.5.** *Ряды (4.88), (4.89) и (4.90) сходятся соответственно в областях  $\mathbb{F}^{N,p}$ ,  $\mathbb{G}_j^{N,p}$  и  $\mathbb{H}_j^{N,p}$ , которые можно представить в виде*

$$\mathbb{F}^{N,p} = \bigcup_{\delta \in (0,1)} \mathbb{F}^{N,p}(\delta), \quad \mathbb{G}_j^{N,p} = \bigcup_{\delta \in (0,1)} \mathbb{G}_j^{N,p}(\delta), \quad \mathbb{H}_j^{N,p} = \bigcup_{\delta \in (0,1)} \mathbb{H}_j^{N,p}(\delta),$$

где вспомогательные круговые области  $\mathbb{F}^{N,p}(\delta)$ ,  $\mathbb{G}_j^{N,p}(\delta)$  и  $\mathbb{H}_j^{N,p}(\delta)$  для каждого заданного заданного  $\delta \in (0,1)$  определяются следующими формулами:

$$\mathbb{F}^{N,p}(\delta) := \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |z_s| < \delta, \quad s = \overline{1, p}; \quad |z_l| < (1 + \delta)^{-1}, \quad l = \overline{p + 1, N} \right\},$$

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_j^{N,p}(\delta) := & \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |z_s| < 1, \quad s = \overline{1, p}, \quad s \neq j; \quad |z_j| < \delta; \right. \\ & \left. |z_l| < (1 + \delta)^{-1}, \quad l = \overline{p + 1, N} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_j^{N,p}(\delta) := & \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |z_s| < 1, \quad s = \overline{1, p}; \right. \\ & |z_l| < 1 - \delta, \quad l = \overline{p + 1, N}, \quad l \neq j, \quad |z_j| < \delta \left. \right\}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения 2.5 проводится известными методами, изложенными, например, в [169]. Для каждого из  $N$ -кратных гипергеометрических рядов рассматривается набор *сопряженных* радиусов сходимости, т.е.

положительных величин  $r_j$ ,  $j = \overline{1, N}$ , таких, что соответствующий ряд сходится при  $|z_j| < r_j$ ,  $j = \overline{1, N}$ , и расходится, если выполняются обратные неравенства (подробно о сходимости  $N$ -кратных степенных рядов см. [34], [131]). Величины  $r_j$  для рядов (4.88)–(4.90), следуя [169], вычисляем по формулам  $r_j = |\Phi_j(\mathbf{k})|^{-1}$ , где

$$\Phi_j(\mathbf{k}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} f_j(\varepsilon \mathbf{k}), \quad f_j(\mathbf{k}) = \frac{A(k_1, \dots, k_j + 1, \dots, k_N)}{A(\mathbf{k})}, \quad k_l \geq 0, \quad j = \overline{l, N},$$

а  $A(\mathbf{k}) = A(k_1, \dots, k_N)$  общий вид коэффициентов. Например, для ряда (4.88), т.е при

$$A(\mathbf{k}) = \frac{(b)_{|\mathbf{k}_{p+1, N}|}}{(c_1)_{\mu(\mathbf{k}, p)} (c_2)_{|\mathbf{k}_{1, p}|}} \frac{(\mathbf{a})_{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!},$$

находим  $r_s = |\mathbf{k}_{1, p}| / r$  при  $s = \overline{1, p}$ , и  $r_l = r / |\mathbf{k}_{p+1, N}|$ , при  $l = \overline{p+1, N}$ , где  $r := \||\mathbf{k}_{1, p}| - |\mathbf{k}_{p+1, N}|\|$ . Отсюда с учетом требования  $r_j < 1$  для всех  $j = \overline{1, N}$  получаем  $(1 + r_s)r_l = 1$  для  $s$  и  $l$  из указанных диапазонов. Таким образом, устанавливаем, что ряд (4.88) сходится на каждом множестве  $\mathbb{F}^{N, p}(\delta)$ ,  $\delta \in (0, 1)$ , т.е. на множестве  $\mathbb{F}^{N, p}$ . Доказательство остальных двух утверждений предложения проводится аналогично. Предложение 2.5 доказано.

4.3.2°. Построение формул аналитического продолжения. Обратимся к вопросу об аналитическом продолжении функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ . Следующая теорема, где использованы обозначения (4.31), (4.82)–(4.85), (4.88)–(4.90), устанавливает формулы такого продолжения функции  $F_D^{(N)}$  в области  $\mathbb{W}^{N, p}$ , вид которых определяется соотношениями (4.59).

**Теорема 2.7.** *Аналитическое продолжение ряда (1.2) в область  $\mathbb{W}^{N, p}$  с произвольным  $p = \overline{0, N}$ , при котором ни одно из чисел*

$$(c - |\mathbf{a}_{1, j}| - b), \quad j = \overline{1, p}; \quad (b - |\mathbf{a}_{p+1, j}|), \quad j = \overline{p+1, N},$$

*не является целым, дается следующей формулой:*

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{j=0}^N A_j \mathcal{U}_{p, j}^{(1, \infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad (4.91)$$

где функции  $\mathcal{U}_{p,j}^{(1,\infty)}$  при  $j = \overline{0,p}$  определяются равенствами

$$\mathcal{U}_{p,0}^{(1,\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := \left( \prod_{l=p+1}^N (-z_l)^{-a_l} \right) \times \quad (4.92)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{p,j}^{(1,\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := & (1 - z_j)^{c - |\mathbf{a}_{1,j}| - b} \left( \prod_{l=j+1}^p (1 - z_l)^{-a_l} \right) \left( \prod_{l=p+1}^N (-z_l)^{-a_l} \right) \times \\ & \times \mathcal{G}_j^{(N,p)}(\mathbf{h}_{j,p}; c - |\mathbf{a}_{1,j-1}| - b, 1 + c - |\mathbf{a}_{1,j}| - b; \mathcal{Z}_j^{(N,p)}(\mathbf{z})), \quad j = \overline{1,p}, \end{aligned} \quad (4.93)$$

а при  $j = \overline{p+1,N}$  – следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{p,j}^{(1,\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := & (-z_j)^{|\mathbf{a}_{p+1,j-1}| - b} \left( \prod_{l=p+1}^{j-1} (-z_l)^{-a_l} \right) \times \\ & \times \mathcal{H}_j^{(N,p)}(\mathbf{h}_{j,p}; b - |\mathbf{a}_{p+1,j-1}|, 1 + b - |\mathbf{a}_{p+1,j}|; \mathcal{Z}_j^{(N,p)}(\mathbf{z})), \quad j = \overline{p+1,N}. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Фигурирующие в представлении (4.38) коэффициенты  $A_j$  при  $j = \overline{0,p}$  имеют вид

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(b - |\mathbf{a}_{p+1,N}|) \Gamma(c - |\mathbf{a}_{1,p}| - b)}{\Gamma(b) \Gamma(c - |\mathbf{a}|) \Gamma(c - b)}, \\ A_j &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(c - |\mathbf{a}_{1,j-1}| - b) \Gamma(|\mathbf{a}_{1,j}| + b - c)}{\Gamma(a_j) \Gamma(b) \Gamma(c - b)}, \end{aligned} \quad (4.95)$$

а при  $j = \overline{p+1,N}$  – следующий вид:

$$A_j = \frac{\Gamma(c) \Gamma(b - |\mathbf{a}_{p+1,j-1}|) \Gamma(|\mathbf{a}_{p+1,j}| - b)}{\Gamma(a_j) \Gamma(b) \Gamma(c - b)}. \quad (4.96)$$

Функции  $\mathcal{U}_{p,j}^{(1,\infty)}$ , определяемые из (4.92)–(4.94), являются линейно независимыми частными решениями системы (1.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО формул продолжения (4.91)–(4.96) осуществляется методом индукции по числу переменных функции Лауриселлы. Мы не приводим эти довольно громоздкие выкладки, вполне аналогичные тем, которые

были выполнены при доказательствах теорем 2.5 и 2.6. В том, что  $\mathcal{U}_{p,j}^{(1,\infty)}$ ,  $j = \overline{0, N}$ , являются частными решениями системы (1.5), можно убедиться непосредственной подстановкой (4.92), (4.93) и (4.94) в (1.5). Имеющееся в теореме 2.7 ограничение на параметры  $F_D^{(N)}$  устраняются с помощью подхода, продемонстрированного в §5 на примере случая двух переменных (т.е. функции Аппеля  $F_1$ ).

Из теоремы 2.7 с помощью несложных рассуждений могут быть найдены формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы в области  $\mathbb{W}_\sigma^{N,p}$ , определяемые равенством (4.64), для всех  $p = \overline{0, N}$  и  $\sigma \in S_N$ , где, напомним,  $S_N$  — группа перестановок множества из  $N$  элементов. Действительно, учитывая свойство симметрии (1.10) функции Лауричеллы, вытекающее непосредственно из ее определения (1.2), а также то, что включение  $\mathbf{z} \in \mathbb{W}_\sigma^{N,p}$  влечет  $\sigma(\mathbf{z}) \in \mathbb{W}^{N,p}$ , получаем, что аналитическое продолжения функции  $F_D^{(N)}$  в область  $\mathbb{W}_\sigma^{N,p}$  осуществляется формулой (4.38) с заменой в ее правой части, т.е. в коэффициентах  $A_j = A_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$  и функциях  $\mathcal{U}_{p,j}^{(1,\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ , определяемых из (4.39)–(4.60), параметра  $\mathbf{a}$  на  $\sigma(\mathbf{a})$  и аргумента  $\mathbf{z}$  на  $\sigma(\mathbf{z})$ . При этом функции  $\mathcal{U}_{p,j,\sigma}^{(1,\infty)} := \mathcal{U}_{p,j}^{(1,\infty)}(\sigma(\mathbf{a}); b, c; \sigma(\mathbf{z}))$ , получаемые из (4.39), (4.40) действием перестановки  $\sigma \in S_N$ , являются линейно независимыми частными решениями системы (1.5).

Можно показать, что множество

$$\mathfrak{A}^{(N)} := \left\{ \mathcal{U}_{p,j,\sigma}^{(1,\infty)}; j, p = \overline{0, N}, \sigma \in S_N \right\}$$

представляет собой полный набор решений системы (1.5) в  $\mathbb{W} := \bigcup_{p,\sigma} \mathbb{W}_\sigma^{(N,p)}$ .

При  $N = 1$  функции из  $\mathfrak{A}^{(N)}$  превращаются в известные канонические решения гипергеометрического уравнения (2.2), найденные Куммером [19], [127]. При  $N = 2$  такая система решений была, в основном, построена в [203], [168] (способом, отличным от примененного в диссертации), а при  $N = 3$  за некоторыми исключениями указана в [169]. При  $N \geq 3$  полный набор функций, принадлежащих множеству  $\mathfrak{A}^{(N)}$ , по-видимому, оставался неизвестным.

## §5. Аналитическое продолжение функции Аппеля $F_1$ в логарифмическом случае

**5.1. Функция Аппеля и связанная с ней система уравнений.** Рассматриваемая настоящем параграфе гипергеометрическая функция Аппеля  $F_1$  определяется с помощью следующего двойного ряда [140], [142], [19]:

$$F_1(a, a'; b, c; z, \zeta) = \sum_{k, n=0}^{\infty} \frac{(b)_{k+n} (a)_k (a')_n}{(c)_{k+n} k! n!} z^k \zeta^n, \quad |z| < 1, \quad |\zeta| < 1, \quad (5.1)$$

являющегося частным случаем функции Лауричеллы (1.2) для  $N = 2$ :

$$F_1(a, a'; b, c; z, \zeta) = F_D^{(2)}(a, a'; b, c; z, \zeta);$$

здесь  $z$  и  $\zeta$  — комплексные переменные, а величины  $a, a', b$  и  $c$  — комплексные параметры, от которых зависит функция  $F_1$ . Отметим также, что для  $F_1$  справедливо следующее интегральное представление, являющееся частным случаем (1.6):

$$F_1(a, a'; b, c; z, \zeta) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b) \Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1} (1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a (1-t\zeta)^{a'}} dt; \quad (5.2)$$

здесь  $\operatorname{Re} b > 0$  и  $\operatorname{Re}(c-b) > 0$ .

В работе Аппеля [141] было установлено, что обобщенный гипергеометрический ряд (5.1) является частным решением следующей системы двух дифференциальных уравнений, записанной относительно функции  $u = u(z, \zeta)$ :

$$\begin{cases} z(1-z)u_{zz} + \zeta(1-z)u_{z\zeta} + [c - (a+b+1)z]u_z - a u_\zeta - ab u = 0, \\ \zeta(1-\zeta)u_{\zeta\zeta} + z(1-\zeta)u_{z\zeta} + [c - (a'+b+1)\zeta]u_\zeta - a' u_z - a'b u = 0, \end{cases} \quad (5.3)$$

где, как обычно, частная производная искомой функции  $u(z, \zeta)$  указывается в виде нижнего индекса, так что, например, выражения  $u_{z\zeta}$  и  $u_{zz}$  означают соответственно  $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \zeta}$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ . В окрестности любой точки  $(z, \zeta) \in \mathbb{C}^2$  определены три линейно независимых решения этой системы, и таким образом,

ее общее решение зависит от трех произвольных комплексных постоянных, см. [168], [169]; здесь  $\mathbb{C}^2$  обозначает двумерное комплексное пространство. Нетрудно увидеть, что система (5.3) является частным случаем системы (1.5), которой удовлетворяет функция Лауричеллы.

Начиная с работы [209], изучался важный вопрос о построении набора канонических частных решений системы (5.3), играющих для нее ту же роль, которую играют решения Куммера [19], [127] для гипергеометрического уравнения Гаусса. Отметим, что набор канонических решений для (5.3), которые можно выписать в терминах рядов вида (5.1), можно найти в книге [142]. Подробный обзор исследований, проводившихся в этом направлении, дан в статье Эрдейи [168]. В этой работе установлено, что представленных в [142] функций недостаточно для описания общего решения системы (5.3). Кроме того, в [168] было указано, что недостающие решения могут быть выражены через следующий гипергеометрический ряд двух переменных:

$$G(a, a'; b, c; z, \zeta) = \sum_{k, n=0}^{\infty} \frac{(b)_{n-k} (a)_k (a')_n}{(c)_{n-k} k! n!} z^k \zeta^n, \quad |z| < 1, \quad |\zeta| < 1. \quad (5.4)$$

Этот ряд, играющий столь важную роль в теории функции Аппеля, был ранее указан в работе [180] как функция  $G_2$  среди перечня существенно различных гипергеометрических рядов двух переменных, известного как список Горна. Отметим, что в настоящей работе используется несколько иная форма записи этого ряда, отличная от указанной в списке Горна [180] (см. также [19]), в связи с чем для его обозначения будем использовать символ  $G$  вместо традиционного  $G_2$ . Нетрудно увидеть, что формула (5.4) является частным случаем формулы (4.35) при  $N = 2$  и  $j = 2$ , т.е. в ситуации двух переменных.

В статье [203] изучался вопрос об аналитическом продолжении ряда (5.1), определяющего функцию Аппеля в бикруге

$$\mathbb{U}^2 := \{ (z, \zeta) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |\zeta| < 1 \}, \quad (5.5)$$

за его границу. В указанной работе получены представления для  $F_1$ , являющиеся обобщением известных формул аналитического продолжения гипер-

геометрической функции Гаусса  $F(a, b; c; z)$ , приведенных, например, в [19], [127] (см. п. 2.3). Выведенные соотношения позволили также указать новые канонические решения системы (5.3), которые записываются в терминах ряда (5.4). Однако использованный в [203] подход, основанный на переразложении ряда (5.1), в силу своей громоздкости не дает исчерпывающего решения поставленной задачи об аналитическом продолжении  $F_1$  и интегрировании системы (5.3). Отметим, что некоторые частные случаи продолжения функции  $F_1$ , не рассмотренные в [203], указаны в [38].

Настоящий параграф посвящен рассмотрению *логарифмического случая* функции Аппеля  $F_1$ , когда ее параметры таковы, что некоторые из чисел

$$c - a - a' - b, \quad c - a - b, \quad c - a' - b, \quad b - a - a', \quad b - a, \quad b - a' \quad (5.6)$$

являются целыми. Отметим, что полученные в [203] формулы не распространяются на этот важный для теории и приложений случай. Термин "логарифмический" использован для него в связи с тем, что найденные в пп. 5.2–5.4 представления для  $F_1$  вне единичного бикруга содержат не только степени переменных  $z$  и  $\zeta$  или величин  $(1 - z)$  и  $(1 - \zeta)$ , но и логарифмы различных их комбинаций. Противоположную ситуацию, когда ни одно из чисел (5.6) не является целым, называем *нелогарифмическим случаем*.

Для вывода формул аналитического продолжения функции  $F_1$  и нахождения набора канонических решений системы (5.3) для логарифмического случая в настоящей работе используется подход, развиваемый в §4. Построенные в пп. 5.2–5.4 канонические решения системы (5.3) записаны в терминах двойных гипергеометрических рядов нового типа, являющихся аналогами рядов (5.1) и (5.4). Аналитическое продолжение в окрестность точек  $(z, \zeta) = (\infty, \infty)$  и  $(z, \zeta) = (1, 1)$  рассмотрено соответственно в п. 5.2 и 5.3, а продолжение в окрестности  $(1, \infty)$  и  $(\infty, 1)$  — в п. 5.4. В этом пункте также получены некоторые новые формулы продолжения и для нелогарифмического случая. Интегральным представлениям типа Барнса для  $F_1$ , служащим основой для пп. 5.2–5.4, посвящены п. 5.2.2<sup>o</sup> и п. 5.3.2<sup>o</sup>.

Построенные формулы аналитического продолжения  $F_1(a, a'; b, c; z, \zeta)$  позволяют эффективно вычислять эту функцию во всем диапазоне изменения ее переменных.

## 5.2. Формулы аналитического продолжения в окрестность точки $(z, \zeta) = (\infty, \infty)$ .

5.2.1<sup>o</sup>. Предварительные замечания. Настоящий раздел посвящен аналитическому продолжению функции Аппеля  $F_1$ , во внешность единичного бикруга, т.е. в область

$$\{(z, \zeta) \in \mathbb{C}^2 : |z| > 1, |\zeta| > 1\},$$

где переменные  $z$  и  $\zeta$  могут принимать большие по модулю значения. Отметим, что поскольку эта функция удовлетворяет следующему соотношению симметрии

$$F_1(a, a'; b, c; z, \zeta) = F_1(a', a; b, c; \zeta, z), \quad (5.7)$$

вытекающему непосредственно из ее определения (5.1), то достаточно рассмотреть ситуацию

$$|z| > |\zeta|. \quad (5.8)$$

Формулы аналитического продолжения для противоположного случая, т.е. при  $|\zeta| > |z|$ , легко следуют из результатов настоящего раздела путем применения к ним соотношения (5.7).

Проведенные в пп. 5.2.3<sup>o</sup>–5.2.7<sup>o</sup> рассмотрения показали, что если оба числа  $(b - a)$  и  $(b - a - a')$  не являются целыми, то вид формул аналитического продолжения функции Аппеля (5.1) качественно отличается от вида аналогичных формул в противоположной ситуации, когда целым числом является либо разность  $(b - a)$ , либо разность  $(b - a - a')$ . Первый из указанных случаев, при котором

$$(b - a) \notin \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad (b - a - a') \notin \mathbb{Z}, \quad (5.9)$$

будем называть *нелогарифмическим*, поскольку представления функции  $F_1$ , получаемые при аналитическом продолжении, содержат лишь степени пе-

переменных  $z$  и  $\zeta$  и не содержат их логарифмы. Этот случай рассмотрен в п. 5.2.3<sup>o</sup>.

Противоположный случай, который будем называть *логарифмическим*, наступает, если имеет место одно из следующих соотношений:

$$(\mathcal{A}) \quad (b-a) \in \mathbb{Z}, \quad (b-a-a') \notin \mathbb{Z}; \quad (\mathcal{B}) \quad (b-a) \notin \mathbb{Z}, \quad (b-a-a') \in \mathbb{Z}. \quad (5.10)$$

Формулы аналитического продолжения функции  $F_1$  для условий  $(\mathcal{A})$  и  $(\mathcal{B})$  выведены соответственно в пп. 5.2.5<sup>o</sup>, 5.2.6<sup>o</sup> и 5.2.7<sup>o</sup>, 5.2.8<sup>o</sup>. Будем называть  $(\mathcal{A})$  *первым логарифмическим*, а  $(\mathcal{B})$  — *вторым логарифмическим* случаем при продолжении в бесконечность. Общим для них является то, что соответствующие представления  $F_1$  включают не только степени переменных  $z$  и  $\zeta$ , но и их логарифмы.

Отметим еще, что ситуация, в которой числа  $(b-a)$  и  $a'$  являются целыми, т.е. одновременно нарушаются оба соотношения (5.9), исключена из нашего рассмотрения.

При изучении случая  $(\mathcal{A})$  необходимо отдельно рассматривать ситуацию, когда разность  $(b-a)$  является целым неотрицательным числом, и когда эта разность отрицательна, т.е. требуется ввести следующие два подслучаи:

$$(\mathcal{A}.1) \quad b = a + m, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad (\mathcal{A}.2) \quad b = a - m, \quad m = 1, 2, \dots. \quad (5.11)$$

Подчеркнем, что формулы продолжения, полученные при условиях  $(\mathcal{A}.1)$  и  $(\mathcal{A}.2)$  соответственно в пп. 5.2.5<sup>o</sup> и 5.2.6<sup>o</sup>, имеют качественно различное устройство, и они не могут быть получены друг из друга, например, с помощью каких-либо простых замен.

При изучении случая  $(\mathcal{B})$  необходимо рассматривать ситуацию, когда разность  $(b-a-a')$  является неотрицательным числом, и когда эта разность

отрицательна, т.е. требуется ввести следующие два подслучаи:

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}.1) \quad b &= a + a' + m, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \\ (\mathcal{B}.2) \quad b &= a + a' - m, \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5.12)$$

формулы аналитического продолжения для которых построены соответственно в пп. 3.5.1 и 3.5.2.

Для упрощения записи формул в тех случаях, где это не может вызвать недоразумений, будем опускать набор аргументов  $(a, a'; b, c; z, \zeta)$  или его часть, т.е., например, вместо  $w(a, a'; b, c; z, \zeta)$  будем писать  $w(\zeta)$ .

5.2.2<sup>o</sup>. Представление в виде интеграла типа Барнса. Зададим область  $\mathbb{S}$  с помощью следующего соотношения:

$$\mathbb{S} := \{ (z, \zeta) \in \mathbb{C}^2 : |\arg(-z)| < \pi, |\zeta| < 1 \}, \quad (5.13)$$

и определим функцию  $f(a, a'; b, c; z, \zeta, s)$  по формуле

$$f(a, a'; b, c; z, \zeta, s) := \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s F(a', b+s; c+s; \zeta), \quad (5.14)$$

где  $(z, \zeta) \in \mathbb{S}$  и  $s \in \mathbb{C}$ , а под выражением  $F(a'; b+s, c+s; \zeta)$  понимается ряд, получаемый подстановкой соответствующих параметров в формулу (2.1).

Остановимся на обсуждении свойств функции (5.14), рассматриваемой в зависимости от комплексного переменного  $s$  и фиксированных остальных аргументах; при этом для краткости будем использовать обозначение  $f(s) := f(a, a'; b, c; z, \zeta, s)$ . Напомним, что гамма-функция  $\Gamma(s)$  имеет простые полюсы в целых неположительных точках  $s = -k$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ , причем вычеты в них даются равенствами (4.13), указанными, например, в [19], [127], и отметим, что функция  $\tilde{F}(s) := F(a', b+s; c+s; \zeta)/\Gamma(c+s)$ , очевидно, регулярна по  $s$  во всей конечной плоскости. С учетом сказанного из определения (5.14) вытекает, что  $f(s)$  имеет простые полюсы в точках  $s_k^{(0)} = k$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ , а ее вычеты в них:

$$\text{res } f(s_k^{(0)}) = -\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k F(a', b+k; c+k; \zeta). \quad (5.15)$$

Это свойство позволяет записать используемое в работе *первое* интегральное представление типа Барнса для функции Аппеля, справедливость которого устанавливает следующее утверждение, приведенное, например, в [142].

**Предложение 2.6.** *Функция Аппеля  $F_1$ , определяемая рядом (5.1), представима для  $(z, \zeta) \in \mathbb{U}^2 \cap \mathbb{S}$  в виде контурного интеграла типа Барнса*

$$F_1(a, a'; b, c; z, \zeta) = \frac{\Gamma(c)}{2\pi i \Gamma(a) \Gamma(b)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} f(a, a'; b, c; z, \zeta, s) ds, \quad (5.16)$$

где  $f$  дается равенством (5.14), области  $\mathbb{U}^2$  и  $\mathbb{S}$  определяются из (5.5) и (5.13), а контур интегрирования в (5.16) выбран так, чтобы полюсы  $s_k^{(0)}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ , и полюсы

$$s_k^{(1)} = -a - k, \quad s_k^{(2)} = -b - k, \quad k \in \mathbb{Z}^+, \quad (5.17)$$

функции  $f(s)$  лежали соответственно справа и слева от него.

Формулу (5.16) нетрудно проверить, представив интеграл в ее правой части в виде умноженной на  $(-2\pi i)$  суммы вычетов (5.15) функции  $f(s)$  в точках  $\{s_k^{(0)}\}_{k=0}^{\infty}$ . Необходимые оценки для  $f(s)$ , позволяющие записать интеграл (5.14) в виде такой суммы, получаются с использованием известных оценок [19], [127], [169] для гипергеометрической и гамма-функции (см. доказательство предложения 2.1).

Продолжая рассматривать свойства функции  $f(s)$ , отметим, что если разность параметров  $a$  и  $b$  не является целым числом, т.е.  $(b - a) \notin \mathbb{Z}$ , то расположенные слева от контура интегрирования в (5.16) точки (5.17), являются простыми полюсами  $f(s)$ , а вычеты в них, получаемые с учетом (4.13), даются равенствами:

$$\begin{aligned} \text{res } f(s_k^{(1)}) &= \frac{\Gamma(b - a)\Gamma(a)}{\Gamma(c - a)} \frac{(1 + a - c)_k (a)_k}{(1 + a - b)_k k!} \times \\ &\times (-z)^{-a-k} (-1)^k F(a', b - a - k; c - a - k; \zeta), \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \text{res } f(s_k^{(2)}) &= \frac{\Gamma(a - b)\Gamma(b)}{\Gamma(c - b)} \frac{(1 + b - c)_k (b)_k}{(1 + b - a)_k k!} \times \\ &\times (-z)^{-b-k} (-1)^k F(a', -k; c - b - k; \zeta). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Если же параметры  $a$  и  $b$  связаны соотношением  $b = a + m$ , где  $m$  — неотрицательное целое число, то точки

$$s_k^{(1)} = -a - k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.20)$$

по-прежнему, являются простыми полюсами, вычеты в которых находятся заменой  $b$  на  $a + m$  в формуле (5.18):

$$\begin{aligned} \text{res } f(s_k^{(1)}) &= \frac{(m-1)! \Gamma(a)}{\Gamma(c-a)} \frac{(1+a-c)_k (a)_k}{(1-m)_k k!} \times \\ &\times (-z)^{-a-k} (-1)^k F(a', m-k; c-a-k; \zeta), \end{aligned} \quad (5.21)$$

а точки

$$s_{k,ln}^{(2)} = -a - k, \quad k = m, m+1, \dots, \quad (5.22)$$

представляют собой полюсы второго порядка, и можно показать, что соответствующие вычеты имеют вид

$$\begin{aligned} \text{res } f(s_{k,ln}^{(2)}) &= \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c-a)} \frac{(a)_k (1+a-c)_k}{k!(k-m)!} \times \\ &\times (-z)^{-a-k} (-1)^{m+k} \left\{ \frac{d}{ds} \left[ F(a', a+m+s; c+s; \zeta) \right] \Big|_{s=-a-k} + \right. \\ &\left. + \left[ h_k^-(a, 1+a-c) + \ln(-z) \right] F(a', m-k; c-a-k; \zeta) \right\}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

где величины  $h_k^-$  определяются равенством (2.11).

Укажем также, что если выполнено равенство  $b = a - m$ , где  $m$  — неотрицательное целое число, то точки

$$s_k^{(2)} = -b - k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5.24)$$

по-прежнему, являются простыми полюсами, вычеты в которых находятся из (5.18) и имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{res } f(s_k^{(2)}) &= \frac{(m-1)! \Gamma(b)}{\Gamma(c-b)} \frac{(1+b-c)_k (b)_k}{(1-m)_k k!} \times \\ &\times (-z)^{-b-k} (-1)^k F(a', -k; c-b-k; \zeta), \end{aligned} \quad (5.25)$$

а точки

$$s_{k,ln}^{(1)} = -b - k, \quad k = m, m + 1, \dots, \quad (5.26)$$

представляют собой полюсы второго порядка, вычеты в которых, как можно показать, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f(s_{k,ln}^{(1)}) &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(c-b)} \frac{(b)_k (1+b-c)_k}{k!(k-m)!} \times \\ &\times (-z)^{-b-k} (-1)^{m+k} \left\{ \frac{d}{ds} \left[ F(a', b+s; c+s; \zeta) \right] \Big|_{s=-b-k} + \right. \\ &+ \left. [h_k^-(b, 1+b-c) + \ln(-z)] F(a', -k; c-b-k; \zeta) \right\}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

где величины  $h_k^-$  определяются из (2.11).

В заключение отметим, что слева от контура, по которому в формуле (5.16) ведется интегрирование, подынтегральная функция  $f(s)$  за исключением перечисленных выше полюсов других особенностей не имеет. Формулы аналитического продолжения  $F_1$  в область больших по модулю  $z$  будут получены в разд. 3 путем вычисления интеграла (5.16) в виде суммы вычетов в указанных полюсах.

5.2.3°. Нелогарифмический случай. Для удобства вывода формул продолжения в логарифмическом случае, построенных в пп. 5.2.5°–5.2.8°, настоящий пункт воспроизводит некоторые из результатов §3, посвященного функции Лауричеллы, для ее частного случая — функции Аппеля.

Перейдем к выводу формул продолжения функции Аппеля  $F_1$ , предполагая, что ее переменные  $z$  и  $\zeta$  удовлетворяют неравенству (5.8), а параметры  $a$ ,  $a'$  и  $b$  таковы, что выполнены соотношения (5.9), т.е. имеет место нелогарифмический случай.

Напомним, что функция Аппеля представима в виде интеграла типа Барнса (5.14), (5.16). Записывая интеграл (5.16) в виде умноженной на  $(2\pi i)$  суммы вычетов (5.18) и (5.19) в простых полюсах (5.17) подынтегральной функции (5.14), находим следующее соотношение для  $F_1$ :

$$F_1(a, a'; b, c; z, \zeta) = B_1 u_1(a, a'; b, c; z, \zeta) + B_2 u_2(a, a'; b, c; z, \zeta), \quad (5.28)$$

где функции  $u_1$  и  $u_2$  даются равенствами

$$u_1(a, a'; b, c; z, \zeta) = (-z)^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+a-c)_k (a)_k}{(1+a-b)_k k!} z^{-k} F(a', b-a-k; c-a-k; \zeta), \quad (5.29)$$

$$u_2(a, a'; b, c; z, \zeta) = (-z)^{-b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+b-c)_k (b)_k}{(1+b-a)_k k!} z^{-k} F(a', -k; c-b-k; \zeta), \quad (5.30)$$

а коэффициенты  $B_1$  и  $B_2$  определяются из (2.27).

Поскольку второй параметр функции  $F(a', -k; c-b-k; \zeta)$ , фигурирующей в (5.30) равен целому отрицательному числу, то она является полиномом степени  $k$  по переменному  $\zeta$ , вид которого вытекает из определений функции Гаусса (2.1) и выражения (1.4) для символа Похгаммера:

$$F(a', -k; c-b-k; \zeta) = \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n (a')_n}{(c-b-k)_n n!} \zeta^n. \quad (5.31)$$

Подставляя (5.31) в (5.30), вводя новый индекс суммирования  $k_1 = k - n$  и учитывая определение (5.1) функции Аппеля, находим представление для  $u_2$  через эту функцию

$$u_2(a, a'; b, c; z, \zeta) = (-z)^{-b} F_1 \left( 1-c+b, a'; b, 1+b-a; \frac{1}{z}, \frac{\zeta}{z} \right); \quad (5.32)$$

здесь  $F_1$  означает гипергеометрический ряд (5.1). Заметим, что соотношения (2.27), (5.28), (5.29), (5.32) дают аналитическое продолжение функции Аппеля в область

$$\mathbb{D} := \{ |z| > 1, |\arg(-z)| < \pi; |\zeta| < 1 \}.$$

При этом функция  $u_2$  из (5.32) определена в более широкой, чем  $\mathbb{D}$ , области

$$\tilde{\mathbb{D}} := \{ |z| > 1, |\arg(-z)| < \pi; |z| > |\zeta| \},$$

где одновременно обе переменные  $z, \zeta$  могут принимать значения по модулю большие единицы. Таким образом, для получения требуемого аналитического продолжения функции Аппеля в представлении (5.28) необходимо продолжить по переменной  $\zeta$  лишь функцию  $u_1$ , определяемую (5.29).

Введем область  $\mathbb{V}^2$  с помощью соотношения:

$$\mathbb{V}^2 := \{ |z| > |\zeta| > 1, |\arg(-z)| < \pi; |\arg(-\zeta)| < \pi \}. \quad (5.33)$$

которое является частным случаем (4.37), определяющего область  $\mathbb{V}^N$ .

Применяя к фигурирующим в (5.29) гипергеометрическим функциям

$$F(a', b - a - k; c - a - k; \zeta),$$

формулы продолжения (2.8), (2.9), (2.26), (2.27) и подставляя результат в правую часть (5.29), приходим к следующему утверждению, позволяющему аналитически продолжить функцию Аппеля  $F_1(a, a'; b, c; z, \zeta)$  в область  $\mathbb{V}^2$ , определяемую с помощью (5.33).

**Предложение 2.7.** *Пусть выполняются соотношения (5.9), т.е. имеет место нелогарифмический случай. Тогда аналитическое продолжение ряда (5.1) в область  $\mathbb{V}^2$  дается формулой*

$$F_1(a, a'; b, c; z, \zeta) = \sum_{j=0}^2 B_j \mathcal{U}_j^{(\infty)}(a, a'; b, c; z, \zeta), \quad (5.34)$$

где функции  $\mathcal{U}_j^{(\infty)}$ ,  $j = 0, 1, 2$ , определяются равенствами

$$\mathcal{U}_0^{(\infty)}(a, a'; b, c; z, \zeta) = (-z)^{-a} (-\zeta)^{-a'} F_1 \left( a, a'; 1-c+a+a', 1-b+a+a'; \frac{1}{z}, \frac{1}{\zeta} \right), \quad (5.35)$$

$$\mathcal{U}_1^{(\infty)}(a, a'; b, c; z, \zeta) = (-z)^{-a} (-\zeta)^{a-b} G \left( a, 1-c+b; b-a, 1+b-a-a'; \frac{\zeta}{z}, \frac{1}{\zeta} \right), \quad (5.36)$$

$$\mathcal{U}_2^{(\infty)}(a, a'; b, c; z, \zeta) = (-z)^{-b} F_1 \left( 1-c+b, a'; b, 1+b-a; \frac{1}{z}, \frac{\zeta}{z} \right), \quad (5.37)$$

а коэффициенты  $B_j$  имеют вид

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(b - a - a')}{\Gamma(b) \Gamma(c - a - a')}, & B_1 &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(b - a) \Gamma(a + a' - b)}{\Gamma(a') \Gamma(c - b) \Gamma(b)}, \\ B_2 &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(a - b)}{\Gamma(a) \Gamma(c - b)}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Функции (5.35)–(5.37) являются линейно независимыми частными решениями системы (5.3). Под функцией  $G$ , фигурирующей в формуле (5.36),

понимается обобщенный гипергеометрический ряд (5.4), а  $F_1$  в формулах (5.35), (5.37) означает ряд (5.1).

В том, что функции  $\mathcal{U}_j^{(\infty)}$ ,  $j = 0, 1, 2$ , являются частными решениями системы (5.3), можно убедиться, например, непосредственной подстановкой (5.35)–(5.37) в уравнения (5.3) или же сделать это так, как указано в [168]. Отметим, что формулы (5.34)–(5.38) были выведены в статье [203] другим способом, основанным на переразложении рядов. Примененный в настоящей работе способ получения этих формул представляет интерес, поскольку может быть использован для построения аналитического продолжения многих других двукратных гипергеометрических рядов. В данной работе эти результаты приведены также и для удобства их сопоставления с полученными далее формулами продолжения в логарифмическом случае.

Необходимо отметить, что целые неположительные значения параметра  $c$  являются "сингулярными" для ряда (5.1), определяющего функцию Аппеля. Действительно, если  $c = -m$ ,  $m \in \mathbb{Z}^+$ , то все члены ряда (5.1), для которых сумма индексов  $(k+n)$  больше  $m$ , обращаются в бесконечность. Что же касается ряда (5.4), то для него сингулярными являются целые неположительные значения  $c \in \mathbb{Z}^-$ , а также целые положительные значения параметра  $b \in \mathbb{N}$ . Учитывая еще, что гамма-функция  $\Gamma(s)$  имеет полюсы в точках  $s \in \mathbb{Z}^-$ , нетрудно увидеть, что если имеет место логарифмический случай (A), т.е. выполнено первое соотношение (5.10), то в формуле (5.34) не определены величины  $B_1 \mathcal{U}_1^{(\infty)}$  и  $B_2 \mathcal{U}_2^{(\infty)}$ . Если же имеет место логарифмический случай (B), т.е. выполнено второе соотношение (5.10), то в (5.34) не определены  $B_0 \mathcal{U}_0^{(\infty)}$  и  $B_1 \mathcal{U}_1^{(\infty)}$ .

Таким образом, логарифмический случай требует отдельного рассмотрения, которое и проведено в пп. 5.2.5°–5.2.8°. При этом в отличие от нелогарифмического случая формулы аналитического продолжения функции  $F_1$  не могут быть выписаны лишь в терминах рядов (5.1) и (5.4). Поэтому прежде, чем перейти к выводу формул аналитического продолжения, распространя-

юших результат предложения 2.7 на логарифмический случай, определим двойные гипергеометрические ряды, являющиеся расширением  $F_1$  и  $G$  на случай ”сингулярных“ значений параметров  $b$  и  $c$ . Этим обобщенным гипергеометрическим рядам посвящен следующий п. 5.2.4°.

5.2.4°. Обобщенные гипергеометрические ряды  $F_{1,ln}^\pm$ ,  $G_{1,ln}^\pm$  и  $G_{1,ln}$ . Определим с помощью следующих формул функции  $F_{1,ln}^\pm$ , представляющие собой аналоги  $F_1$  для случая целых неположительных значений параметра  $c$ , которые, напомним, являются сингулярными для ряда (5.1):

$$\begin{aligned} F_{1,ln}^\pm(a, a'; b, 1 - m; z, \zeta) := & \sum_{k+n=0}^{m-1} \frac{(b)_{k+n} (a)_k (a')_n}{(1-m)_{k+n} k! n!} z^k \zeta^n + \\ & + \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \sum_{k+n=m}^{\infty} \frac{(b)_{k+n} (a)_k (a')_n}{(k+n-m)! k! n!} (\lambda_{k,n}^\pm - \ln \zeta) z^k \zeta^n, \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{k,n}^+ &:= \tilde{\lambda}_{k,n} - \psi(b + k + n), \quad \lambda_{k,n}^- := \tilde{\lambda}_{k,n} - \psi(1 - b - k - n), \\ \tilde{\lambda}_{k,n} &:= \psi(1 + n) + \psi(1 - m + k + n) - \psi(a' + n); \end{aligned} \quad (5.40)$$

здесь параметр  $m$  принимает целые неотрицательные значения. Предполагается, что первая сумма в (5.39) отсутствует при  $m = 0$  и равна единице при  $m = 1$ , а множитель  $(-1)^m/(m-1)!$  перед второй суммой равен 1 при  $m = 0$  и  $(-1)$  при  $m = 1$ .

Введем в рассмотрение функции  $G_{1,ln}^\pm$ , являющиеся расширением определения (5.4) функции  $G$  на случай целых значений параметров  $b$  и  $c$ , являющихся сингулярными для (5.4). Определим функцию  $G_{ln}^\pm(a, a'; m, c; z, \zeta)$ , представляющую собой аналог ряда (5.4) для целых неотрицательных значений параметра  $b$ , по формулам

$$\begin{aligned} G_{ln}^\pm(a, a'; m, c; z, \zeta) := & \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m)_{n-k} (a)_k (a')_n}{(c)_{n-k} k! n!} z^k \zeta^n + \\ & + \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \sum_{k=m}^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^{k-m} \frac{(1-c)_{k-n} (a)_k (a')_n}{(k-n-m)! k! n!} (\tau_{k,n}^\pm - \ln z) z^k \zeta^n + \right. \\ & \left. + \sum_{n=k-m+1}^{\infty} \frac{(m+n-k-1)! (a)_k (a')_n}{(c)_{n-k} k! n!} z^k \zeta^n \right], \end{aligned} \quad (5.41)$$

где числа  $\tau_{k,n}^{\pm}$  имеют вид:

$$\begin{aligned}\tau_{k,n}^+ &:= \tilde{\tau}_{k,n} - \psi(b + n - k), & \tau_{k,n}^- &:= \tilde{\tau}_{k,n} - \psi(1 - b - n + k), \\ \tilde{\tau}_{k,n} &:= \psi(1 + k) + \psi(1 - m + k - n) - \psi(a + k),\end{aligned}\quad (5.42)$$

а также функцию  $G_{ln}(a, a'; -m, c; z, \zeta)$  с помощью следующего равенства:

$$G_{ln}(a, a'; -m, c; z, \zeta) := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k+m+1}^{\infty} \frac{(n-k-m-1)! (a)_k (a')_n}{(c)_{n-k} k! n!} z^k \zeta^n. \quad (5.43)$$

В формулах (5.41)–(5.43) параметр  $m \in \mathbb{Z}^+$ , а первая сумма в (5.41) считается равной нулю при  $m = 0$ .

Определим теперь аналоги функции (5.4) для целых значений параметра  $c$ . Введем функции  $G_{ln}^{\pm}(a, a'; b, 1 - m; z, \zeta)$  по формулам

$$\begin{aligned}G_{ln}^{\pm}(a, a'; b, 1 - m; z, \zeta) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{m+k-1} \frac{(b)_{n-k} (a)_k (a')_n}{(1-m)_{n-k} k! n!} z^k \zeta^n + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \sum_{n=m+k}^{\infty} \frac{(b)_{n-k} (a)_k (a')_n}{(n-k-m)! k! n!} [\varkappa_{k,n}^{\pm} - \ln(\pm\zeta)] z^k \zeta^n \right\},\end{aligned}\quad (5.44)$$

где величины  $\varkappa_{k,n}^{\pm}$  даются равенствами:

$$\begin{aligned}\varkappa_{k,n}^+ &:= \tilde{\varkappa}_{k,n} - \psi(a' + n), & \varkappa_{k,n}^- &:= \tilde{\varkappa}_{k,n} - \psi(1 - a' - n), \\ \tilde{\varkappa}_{k,n} &:= \psi(1 + n) + \psi(1 - m + n - k) + \psi(b + n - k),\end{aligned}\quad (5.45)$$

а также следующие функции:

$$\begin{aligned}G_{ln}^{\pm}(a, a'; b, 1 + m; z, \zeta) &:= \sum_{k=m}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{k-m-1} \frac{(k-n-m-1)! (a)_k (a')_n}{(1-b)_{k-n} k! n!} z^k \zeta^n + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^m \sum_{n=k-m}^{\infty} \frac{(b)_{n-k} (a)_k (a')_n}{(n-k+m)! k! n!} [\varkappa_{k,n}^{\pm} - \ln(\pm\zeta)] z^k \zeta^n \right\};\end{aligned}\quad (5.46)$$

здесь величины  $\varkappa_{k,n}^{\pm}$  даются равенствами:

$$\begin{aligned}\varkappa_{k,n}^+ &:= \tilde{\varkappa}_{k,n} - \psi(a' + n), & \varkappa_{k,n}^- &:= \tilde{\varkappa}_{k,n} - \psi(1 - a' - n), \\ \tilde{\varkappa}_{k,n} &:= \psi(1 + n) + \psi(1 + m + n - k) + \psi(b + n - k).\end{aligned}\quad (5.47)$$

Напомним, что символ Похгаммера  $(a)_k$ , определенный равенством (1.4), при положительных значениях индекса  $k$  имеет вид произведения (1.5), а при отрицательных значениях  $k$  переписывается в виде (4.36).

Используя известный подход, изложенный, например, в [19], [169], можно показать, что введенные выше ряды (5.39)–(5.42) сходятся в единичном бикруге  $\mathbb{U}^2$ , определенном в (5.5), с исключенным множеством

$$\mathbb{E}_z := \{(z, \zeta) : z = 0, |\zeta| < 1\},$$

ряды (5.44)–(5.47) сходятся в  $\mathbb{U}^{(2)}$  с исключенным множеством

$$\mathbb{E}_\zeta := \{(z, \zeta) : \zeta = 0, |z| < 1\}, \quad (5.48)$$

а ряд (5.43) сходится во всей области  $\mathbb{U}^2$ . На множествах  $\mathbb{E}_z$  и  $\mathbb{E}_\zeta$  соответствующие ряды формально обращаются в бесконечность благодаря наличию логарифмов  $\ln z$  или  $\ln \zeta$ . Неоднозначность, обусловленная этими логарифмическими слагаемыми, устраняется очевидным образом с помощью проведения подходящих разрезов.

5.2.5°. **Логарифмический случай (A.1).** Предположим, что выполнено первое соотношение (5.11), т.е. имеет место первый логарифмический случай (A.1). Справедливо следующее утверждение, позволяющее продолжить функцию Аппеля в область  $\mathbb{V}^2$ , определенную в (5.33).

**Предложение 2.8.** *Пусть параметры  $a$  и  $b$  функции Аппеля связаны первым соотношением (5.11) при некотором  $t \in \mathbb{Z}^+$ . Тогда аналитическое продолжение ряда (5.1) в область  $\mathbb{V}^2$  дается формулой*

$$\begin{aligned} F_1(a, a'; a + m, c; z, \zeta) &= \\ &= B_0 \mathcal{U}_0^{(\infty)}(a, a'; a + m, c; z, \zeta) + B_1 \mathcal{U}_1^{(\infty)}(a, a'; a + m, c; z, \zeta), \end{aligned}$$

где функции  $\mathcal{U}_0^{(\infty)}$  и  $\mathcal{U}_1^{(\infty)}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0^{(\infty)}(a, a'; a + m, c; z, \zeta) &= \\ &= (-z)^{-a} (-\zeta)^{-a'} F_1 \left( a, a'; 1 - c + a + a', 1 + a' - m; \frac{1}{z}, \frac{1}{\zeta} \right), \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1^{(\infty)}(a, a'; a + m, c; z, \zeta) &= \\ &= (-z)^{-a} (-\zeta)^{-m} G_{ln}^-(a, 1 - c + a + m; m, 1 - a' + m; \frac{\zeta}{z}, \frac{1}{\zeta}), \end{aligned} \quad (5.50)$$

обобщенный гипергеометрический ряд  $G_{ln}^-$  определен в (5.41), (5.42), а коэффициенты  $B_0$  и  $B_1$  даются равенствами

$$B_0 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(m - a')}{\Gamma(a + m) \Gamma(c - a - a')}, \quad B_1 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(a' - m) (m - 1)!}{\Gamma(a') \Gamma(a + m) \Gamma(c - a - m)}.$$

Функции  $\mathcal{U}_0^{(\infty)}$  и  $\mathcal{U}_1^{(\infty)}$ , определенные в (5.49), (5.50), а также следующая функция

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_2^{(\infty)}(a, a'; a + m, c; z, \zeta) &= \\ &= (-z)^{-b} F_1 \left( 1 - c + a + m, a'; a + m, 1 + m; \frac{1}{z}, \frac{\zeta}{z} \right), \end{aligned} \quad (5.51)$$

являются линейно независимыми частными решениями системы (5.3) в области  $\mathbb{V}^2$ .

Введенные в предложении 2.8 функции  $\mathcal{U}_j^{(\infty)}$ ,  $j = 0, 1, 2$ , являются каноническими решениями системы (5.3) в области  $\mathbb{V}^2$  при условии (A.1), указанном в формуле (5.11). В том, что они удовлетворяют этой системе можно убедиться, например, непосредственной подстановкой (5.35)–(5.37) в уравнения (5.3). Эти громоздкие, но по существу элементарные выкладки мы не приводим. Отметим, что в отличие от нелогарифмического случая, рассмотренного в предложении 2.7, в логарифмическом случае (A.1) аналитическое продолжение функции Аппеля дается линейной комбинацией двух, а не трех канонических решений системы (5.3).

5.2.6°. Логарифмический случай (A.2). Предположим, что выполнено второе соотношение (5.11), т.е. имеет место случай (A.2). Справедливо следующее утверждение, где, напомним, область  $\mathbb{V}^2$ , определена соотношением (5.33).

**Предложение 2.9.** *Пусть параметры  $a$  и  $b$  функции Аппеля связаны вторым соотношением (5.11) при некотором  $t \in \mathbb{Z}^+$ . Тогда аналитическое*

продолжение ряда (5.1) в область  $\mathbb{V}^2$  дается формулой

$$F_1(b+m, a'; b, c; z, \zeta) = \sum_{j=0}^2 B_j \mathcal{U}_j^{(\infty)}(b+m, a'; b, c; z, \zeta),$$

где функции  $\mathcal{U}_j^{(\infty)}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0^{(\infty)}(b+m, a'; b, c; z, \zeta) &= \\ &= (-z)^{-b-m} (-\zeta)^{-a'} F_1 \left( b+m, a'; 1-c+a'+b+m, 1+a'+m; \frac{1}{z}, \frac{1}{\zeta} \right), \end{aligned} \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1^{(\infty)}(b+m, a'; b, c; z, \zeta) &= \\ &= (-z)^{-b-m} (-\zeta)^m G_{ln} \left( b+m, 1-c+b; -m, 1-a'-m; \frac{\zeta}{z}, \frac{1}{\zeta} \right), \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\mathcal{U}_2^{(\infty)}(b+m, a'; b, c; z, \zeta) = (-z)^{-b} F_{1,ln}^+ \left( 1-c+b, a'; b, 1-m; \frac{1}{z}, \frac{\zeta}{z} \right), \quad (5.54)$$

обобщенные гипергеометрические ряды  $G_{ln}$  и  $F_{1,ln}^+$  определяются из (5.41)–(5.43), а коэффициенты  $B_j$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(-a'-m)}{\Gamma(b) \Gamma(c-b-a'-m)}, & B_1 &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(a'+m)}{\Gamma(a') \Gamma(b) \Gamma(c-b)}, \\ B_2 &= \frac{\Gamma(c) (m-1)!}{\Gamma(b+m) \Gamma(c-b)}. \end{aligned}$$

Функции (5.52)–(5.54) являются линейно независимыми частными решениями системы (5.3).

Отметим, что введенные в предложении 2.9 функции  $\mathcal{U}_j^{(\infty)}$ ,  $j = 0, 1, 2$ , представляют собой канонические решения системы (5.3) при условии (A.2), указанном в формуле (5.11). Также как и в нелогарифмическом случае, см. предложение 2.7, в логарифмическом случае (A.2) аналитическое продолжение функции Аппеля дается линейной комбинацией трех канонических решений системы (5.3).

5.2.7°. Логарифмический случай (B.1). Обратимся к аналитическому продолжению функции  $F_1$  в ситуации, когда параметры функции таковы, что

разность  $(b - a - a')$  является целым неотрицательным числом  $m$ , т.е. имеет место указанный в формуле (5.12) случай (B.1). Справедливо следующее утверждение, где, напомним, область  $\mathbb{V}^2$  определена равенством (5.33).

**Предложение 2.10.** *Пусть параметры  $a$  и  $b$  функции Аппеля связаны первым соотношением (5.12) при некотором  $m \in \mathbb{Z}^+$ . Тогда аналитическое продолжение ряда (5.1) в область  $\mathbb{V}^2$  дается формулой*

$$F_1(a, a'; a + a' + m, c; z, \zeta) = \sum_{j=0}^2 B_j \mathcal{U}_j^{(\infty)}(a, a'; a + a' + m, c; z, \zeta),$$

где функции  $\mathcal{U}_j^{(\infty)}$ ,  $j = 0, 1, 2$ , имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0^{(\infty)}(a, a'; a + a' + m, c; z, \zeta) &= \\ &= (-z)^{-a} (-\zeta)^{-a'} F_{1,ln}^-(a, a'; 1 - c + a + a', 1 - m; \frac{1}{z}, \frac{1}{\zeta}), \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1^{(\infty)}(a, a'; a + a' + m, c; z, \zeta) &= \\ &= (-z)^{-a} (-\zeta)^{-a'-m} G_{ln}^-(a, 1 - c + a + a' + m; a' + m, 1 + m; \frac{\zeta}{z}, \frac{1}{\zeta}), \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_2^{(\infty)}(a, a'; a + a' + m, c; z, \zeta) &= \\ &= (-z)^{-a-a'-m} F_1 \left( 1 - c + a + a' + m, a'; a + a' + m, 1 + a' + m; \frac{1}{z}, \frac{\zeta}{z} \right), \end{aligned} \quad (5.57)$$

обобщенные гипергеометрические ряды  $F_{1,ln}^-$  и  $G_{ln}^-$  определяются из (5.39), (5.40) и (5.46), (5.47), а коэффициенты  $B_j$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{\Gamma(c)(m-1)!}{\Gamma(a+a'+m)\Gamma(c-a-a')}, \\ B_1 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a'+m)}{\Gamma(a')\Gamma(a+a'+m)\Gamma(c-a-a'-m)}, \\ B_2 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(-m-a')}{\Gamma(a)\Gamma(c-a-a'-m)}. \end{aligned}$$

Функции (5.55)–(5.57) являются линейно независимыми частными решениями системы (5.3).

Введенные в предложении 2.10 функции  $\mathcal{U}_j^{(\infty)}$ ,  $j = 0, 1, 2$ , являются каноническими решениями системы (5.3) в области  $\mathbb{V}^2$  для логарифмического случая (B.1), условия которого указаны в (5.12). Также как и в случаях, рассмотренных в предложениях 2.7, 2.9, здесь аналитическое продолжение функции Аппеля дается линейной комбинацией трех канонических решений системы (5.3).

5.2.8°. Логарифмический случай (B.2). Предположим, что параметры функции  $F_1$  таковы, что разность  $(b - a - a')$  является целым отрицательным числом  $m$ , т.е. имеет место второе соотношение из формулы (5.12). Следующее утверждение устанавливает формулы аналитического продолжения  $F_1$  в область  $\mathbb{V}^2$ , определяемую равенством (5.33).

**Предложение 2.11.** *Пусть параметры  $a$  и  $b$  функции Аппеля связаны вторым соотношением (5.11) при некотором  $m \in \mathbb{Z}^+$ . Тогда аналитическое продолжение ряда (5.1) в область  $\mathbb{V}^2$  дается формулой*

$$F_1(a, a'; a + a' - m, c; z, \zeta) =$$

$$= B_1 \mathcal{U}_1^{(\infty)}(a, a'; a + a' - m, c; z, \zeta) + B_2 \mathcal{U}_2^{(\infty)}(a, a'; a + a' - m, c; z, \zeta),$$

где функции  $\mathcal{U}_1^{(\infty)}$  и  $\mathcal{U}_2^{(\infty)}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1^{(\infty)}(a, a'; a + a' - m, c; z, \zeta) &= \\ &= (-z)^{-a} (-\zeta)^{-a'+m} G_{ln}^-(a, 1 - c + a + a' - m; a' - m, 1 - m; \frac{\zeta}{z}, \frac{1}{\zeta}), \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\mathcal{U}_2^{(\infty)}(a, a'; a + a' - m, c; z, \zeta) =$$

$$= (-z)^{-a-a'+m} F_1\left(1 - c + a + a' - m, a'; a + a' - m, 1 + a' - m; \frac{1}{z}, \frac{\zeta}{z}\right), \quad (5.59)$$

ряд  $G_{ln}^-$  определяется из (5.44), (5.45), а коэффициенты  $B_1$  и  $B_2$  даются равенствами

$$B_1 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(a' - m) (m - 1)!}{\Gamma(a') \Gamma(a + a' - m) \Gamma(c - a - a' + m)}, \quad B_2 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(m - a')}{\Gamma(a) \Gamma(c - a - a' + m)}.$$

Функции  $\mathcal{U}_1^{(\infty)}$  и  $\mathcal{U}_2^{(\infty)}$ , определенные по формулам (5.58), (5.59), а также следующая функция

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0^{(\infty)}(a, a'; a + a' - m, c; z, \zeta) &= \\ &= (-z)^{-a} (-\zeta)^{-a'} F_1 \left( a, a'; 1 - c + a + a', 1 + m; \frac{1}{z}, \frac{1}{\zeta} \right) \end{aligned} \quad (5.60)$$

являются линейно независимыми частными решениями системы (5.3).

Фигурирующие в предложении 2.11 функции  $\mathcal{U}_j^{(\infty)}$ ,  $j = 0, 1, 2$ , являются каноническими решениями системы (5.3) в области  $\mathbb{V}^2$  для логарифмического случая (B.2), условия которого указаны в (5.12). В отличие от нелогарифмического случая и случая (A.2), рассмотренных в предложениях 2.7, 2.9, здесь продолжение функции Аппеля дается линейной комбинацией двух, а не трех канонических решений системы (5.3).

В заключение отметим, что произвольное решение системы (5.3) в области  $\mathbb{V}^2$  может быть представлено в виде линейной комбинации не более чем трех функций  $\mathcal{U}_j^{(\infty)}$ ,  $j = 0, 1, 2$ , указанных в предложениях 2.7–2.11.

### 5.3. Формулы аналитического продолжения в окрестность точки $(z, \zeta) = (1, 1)$ .

5.3.1°. Предварительные замечания. Настоящий раздел посвящен к выводу формул аналитического продолжения функции Аппеля во внешность единичного поликруга, т.е. в область

$$\{(z, \zeta) \in \mathbb{C}^2 : |z - 1| < 1, |\zeta - 1| < 1\}.$$

Отметим, что поскольку эта функция удовлетворяет соотношению симметрии (5.7), то достаточно рассмотреть ситуацию

$$|z - 1| < |\zeta - 1|. \quad (5.61)$$

Если выполнено обратное неравенство  $|\zeta - 1| < |z - 1|$ , то соответствующие формулы аналитического продолжения легко следуют из результатов настоящего раздела и соотношения (5.7).

Рассмотрению случая, когда одновременно выполняются соотношения

$$(c - a - b) \notin \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad (c - a - a' - b) \notin \mathbb{Z}, \quad (5.62)$$

посвящен п. 5.3.3<sup>o</sup>. Поскольку представления для функции  $F_1(a, a'; b, c; z, \zeta)$ , осуществляющие аналитическое продолжение в окрестность точки  $(z, \zeta) = (1, 1)$ , содержат лишь степени величин  $(1 - z)$ ,  $(1 - \zeta)$  и не содержат их логарифмы, то будем называть (5.62) нелогарифмическим случаем.

Если же соотношения (5.62) не выполняются, то будем отдельно рассматривать следующие два случая:

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}) \quad & (c - a - b) \in \mathbb{Z}, \quad (c - a - a' - b) \notin \mathbb{Z}; \\ (\mathcal{D}) \quad & (c - a - b) \notin \mathbb{Z}, \quad (c - a - a' - b) \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (5.63)$$

которые будем называть соответственно *первым логарифмическим* и *вторым логарифмическим* случаем продолжения в окрестность единицы. Формулы аналитического продолжения функции  $F_1$  для условий (C) и (D) построены соответственно в пп. 5.3.4<sup>o</sup>, 5.3.5<sup>o</sup> и 5.3.6<sup>o</sup>, 5.3.7<sup>o</sup>. Общим для них является то, что в найденных формулах для  $F_1$  присутствуют не только степени величин  $(1 - z)$  и  $(1 - \zeta)$ , но и их логарифмы.

При изучении случая (C) необходимо отдельно рассматривать ситуацию, когда разность  $(c - b - a)$  является целым неотрицательным числом, и когда эта разность отрицательна, т.е. требуется ввести два подслучаи:

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}.1) \quad & c = a + b + m, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad (\mathcal{C}.2) \quad c = a + b - m, \quad m = 1, 2, \dots. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Подчеркнем, что формулы продолжения, полученные при условиях (C.1) и (C.2) соответственно в пп. 5.3.4<sup>o</sup> и 5.3.5<sup>o</sup>, имеют качественно различное устройство, и они не могут быть получены друг из друга, например, с помощью каких-либо простых замен.

Условие (D), очевидно, включает следующие два варианта:

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}.1) \quad & c = a + a' + b + m, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \\ (\mathcal{D}.2) \quad & c = a + a' + b - m, \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5.65)$$

формулы аналитического продолжения для которых построены соответственно в пп. 5.3.6<sup>o</sup> и 5.3.7<sup>o</sup>.

5.3.2<sup>o</sup>. Представление в виде интеграла типа Барнса. Перейдем к выводу еще одного представления типа Барнса для функции Аппеля, которое будет использовано для построения ее аналитического продолжения в случае, когда одна или обе переменные  $z$  и  $\zeta$  близки к единице. Используя известную лемму Барнса (см. формулу (2.5), указанную, например, в [127]) и определение (2.1) гипергеометрической функции, устанавливаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)} F(a', b+s, c+s; \zeta) &= \frac{1}{2\pi i \Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} \times \\ &\times \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Gamma(a+t)\Gamma(b+t)\Gamma(s-t)\Gamma(c-a-b-t) F(a'; b+t; c-a; \zeta) dt. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Переписывая определение (5.14) функции  $f$  с учетом равенства (5.66) и подставляя новое выражение  $f$  в формулу (5.16), получаем представление функции  $F_1$  в виде двойного интеграла. Меняя в нем порядок интегрирования по  $s$  и  $t$ , а также используя известное тождество

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} \Gamma(-s)\Gamma(s-t)(-z)^s ds = (1-z)^t$$

и вводя обозначение

$$\begin{aligned} g(a, a'; b, c; z, \zeta, s) &:= \\ &:= \Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)\Gamma(c-a-b-s)(1-z)^s F(a', b+s; c-a; \zeta), \end{aligned} \quad (5.67)$$

приходим к следующему утверждению, устанавливающему используемое в работе *второе* представление типа Барнса для функции  $F_1$ .

**Предложение 2.12.** *Функция Аппеля  $F_1$ , определяемая рядом (5.1), представима в области  $\{(z, \zeta) \in \mathbb{C}^2 : |\arg(1-z)| < \pi, |\zeta| < 1\}$  в виде контурного*

интеграла типа Барнса

$$F_1(a, a'; b, c; z, \zeta) = \frac{\Gamma(c)}{2\pi i \Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} g(a, a'; b, c; z, \zeta, s) ds, \quad (5.68)$$

где подынтегральная функция имеет вид (5.67), а контур интегрирования в формуле (5.68) выбран так, чтобы полюсы

$$s_k^{(1)} = k, \quad s_k^{(2)} = c - a - b + k, \quad k \in \mathbb{Z}^+, \quad (5.69)$$

и полюсы  $s_k^{(3)} = -a - k$ ,  $s_k^{(4)} = -b - k$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ , функции

$$g(s) := g(a, a'; b, c; z, \zeta, s)$$

лежали соответственно справа и слева от него.

Отметим, что наличие указанных в предложении 2.12 полюсов у подынтегрального выражения  $g(s)$  вытекает из существования полюсов у гамма-функции  $\Gamma(s)$  в точках  $s \in \mathbb{Z}^-$ . Учитывая еще, что функция

$$\tilde{F}(s) := F(a', b + s; c - a; \zeta),$$

очевидно, является регулярной в конечной плоскости, находим, что подынтегральная функция  $g(s)$  справа от контура интегрирования (5.68) не имеет других особых точек, кроме полюсов (5.69). Нетрудно увидеть, что если выполняется соотношение  $(c - a - b) \notin \mathbb{Z}$ , то указанные полюсы являются простыми, а вычеты  $g(s)$  в них, вычисляемые с учетом (4.13), даются равенствами:

$$\begin{aligned} \text{res } g(s_k^{(1)}) &= -\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a-b) \frac{(a)_k (b)_k}{(1+a+b-c)_k k!} \times \\ &\quad \times (1-z)^k F(a', b+k; c-a; \zeta), \end{aligned} \quad (5.70)$$

$$\begin{aligned} \text{res } g(s_k^{(2)}) &= -\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(a+b-c) \frac{(c-a)_k (c-b)_k}{(1+c-a-b)_k k!} \times \\ &\quad \times (1-z)^{c-a-b+k} F(a', c-a+k; c-a; \zeta). \end{aligned} \quad (5.71)$$

Если же, напротив,  $(c - a - b) \in \mathbb{Z}$ , то необходимо различать следующие два случая.

Пусть  $c - a - b = m$ , где  $m$  — неотрицательное целое число. Тогда точки

$$s_k^{(1)} = -k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5.72)$$

по-прежнему, являются простыми полюсами, вычеты в которых находятся заменой параметра  $c$  на  $(a + b + m)$  в формуле (5.71):

$$\text{res } g(s_k^{(1)}) = -\Gamma(a)\Gamma(b)(m-1)! \frac{(a)_k (b)_k}{(1-m)_k k!} (1-z)^k F(a', b+k; b+m; \zeta), \quad (5.73)$$

а точки

$$s_{k,ln}^{(2)} = k, \quad k = m, m+1, \dots, \quad (5.74)$$

представляют собой полюсы второго порядка, и можно показать, что соответствующие вычеты имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{res } g(s_{k,ln}^{(2)}) &= \\ &= (-1)^m \Gamma(a)\Gamma(b) \frac{(a)_k (b)_k}{k!(k-m)!} (1-z)^k \left\{ \left[ \frac{d}{ds} F(a', b+s; b+m; \zeta) \right]_{s=k} + \right. \\ &+ \left. \left[ \ln(1-z) - h_k^+(a, b) \right] F(a', b+k; b+m; \zeta) \right\}, \end{aligned} \quad (5.75)$$

где величины  $h_k^+$  определяются равенством (2.11).

Пусть  $c - a - b = -m$ , где  $m$  — неотрицательное целое число. Тогда точки

$$s_k^{(2)} = -m + k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5.76)$$

являются простыми полюсами, вычеты в которых по формуле

$$\begin{aligned} \text{res } g(s_k^{(2)}) &= -\Gamma(a-m)\Gamma(b-m)(m-1)! \frac{(a-m)_k (b-m)_k}{(1-m)_k k!} \times \\ &\times (1-z)^{-m+k} F(a', b-m+k; b-m; \zeta), \end{aligned} \quad (5.77)$$

а точки

$$s_{k,ln}^{(1)} = -m + k, \quad k = m, m+1, \dots, \quad (5.78)$$

представляют собой полюсы второго порядка, и можно показать, что соответствующие вычеты имеют вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{res} g(s_{k,ln}^{(1)}) &= (-1)^m \Gamma(a-m) \Gamma(b-m) \frac{(a-m)_k (b-m)_k}{(k-m)! (k)!} (1-z)^{k-m} \times \\ &\times \left\{ \left[ \frac{d}{ds} F(a', b-m+s; b-m; \zeta) \right]_{s=k} + \right. \\ &\left. + [\ln(1-z) - h_k^+(a-m, b-m)] F(a', b-m+k; b-m; \zeta) \right\}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

где величины  $h_k^+$  определяются из (2.11).

В заключение обратим внимание на то, что справа от контура, по которому в формуле (5.68) ведется интегрирование, подынтегральная функция  $g(s)$  за исключением перечисленных выше полюсов других особенностей не имеет. Формулы аналитического продолжения  $F_1$  в область, где  $z$  принимает значения вблизи единицы, будут получены в разд. 4 путем вычисления интеграла (5.68) в виде суммы вычетов в указанных полюсах.

Отметим еще, что обобщения представлений Барнса (5.16) и (5.68) на случай функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}$  представлены в работе [8].

5.3.3°. Нелогарифмический случай. Переходим к выводу формул продолжения функции Аппеля  $F_1$ , предполагая, что переменные  $z$  и  $\zeta$  удовлетворяют неравенству (5.61), а параметры таковы, что выполнены соотношения (5.62), т.е. имеет место нелогарифмический случай.

Напомним, что функция Аппеля представима в виде интеграла типа Барнса (5.67), (5.68). Записывая интеграл (5.68) в виде умноженной на  $(-2\pi i)$  суммы вычетов (5.70) и (5.71) в простых полюсах (5.69) подынтегральной функции (5.67), находим следующее соотношение для функции  $F_1$ :

$$F_1(a, a'; b, c; z, \zeta) = A_1 v_1(a, a'; b, c; z, \zeta) + A_2 v_2(a, a'; b, c; z, \zeta), \quad (5.80)$$

где функции  $v_1$  и  $v_2$  даются равенствами

$$v_1(a, a'; b, c; z, \zeta) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(1+a+b-c)_k k!} (1-z)^k F(a', b+k; c-a; \zeta), \quad (5.81)$$

$$v_2(a, a'; b, c; z, \zeta) := (1-z)^{c-a-b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(c-a)_k (c-b)_k}{(1+c-a-b)_k k!} (1-z)^k F(a', c-a+k; c-a; \zeta), \quad (5.82)$$

а коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$  определяются из (2.22).

Применяя формулу (2.21) к фигурирующим в (5.81) гипергеометрическим функциям

$$F(a', b+k; c-a; \zeta), \quad k \in \mathbb{Z}^+, \quad (5.83)$$

записываем каждую из них в виде произведения константы  $(a')_k/(c-a)_k$ , степени  $(1-\zeta)^{-a'-k}$  и функции  $F(c-a-a', -k; 1-a'-k; 1-\zeta)$ , которая, согласно (2.1), (1.4) является полиномом степени  $k$  по  $(1-\zeta)$ , т.е. функции (5.83) могут быть записаны в виде:

$$F(a', b+k; c-a; \zeta) = \frac{(a')_k}{(c-a)_k} (1-\zeta)^{-a'-k} \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n (c-a-a')_n}{(1-a'-k)_n n!} (1-\zeta)^n. \quad (5.84)$$

Подставляя (5.84) в (5.82), вводя новый индекс суммирования  $k_1 = k - n$  и учитывая определение (5.1) функции Аппеля, находим представление для  $v_2$  через эту функцию

$$v_2(a, a'; b, c; z, \zeta) := (1-z)^{c-a-b} (1-\zeta)^{-a'} F_1 \left( c-a-a', a'; c-b, 1+c-a-b; 1-z, \frac{1-z}{1-\zeta} \right). \quad (5.85)$$

Заметим, что соотношения (2.22), (5.80), (5.81), (5.85) дают аналитическое продолжение функции Аппеля в область

$$\mathbb{G} := \{ |1-z| + |\zeta| < 1, |\arg(1-z)| < \pi; |\arg(1-\zeta)| < \pi \}.$$

При этом функция  $v_2$  определена в более широкой области

$$\tilde{\mathbb{G}} := \{ |1-z| < 1, |1-z| < |1-\zeta|; |\arg(1-z)| < \pi; |\arg(1-\zeta)| < \pi \},$$

где одновременно обе переменные  $z, \zeta$  могут принимать значения, близкие к единице. Таким образом, в представлении (5.80) в окрестность единицы необходимо продолжить по переменной  $\zeta$  лишь функцию  $v_1$ , определяемую равенством (5.81).

Введем область  $\mathbb{K}^2$  с помощью соотношения:

$$\mathbb{K}^2 := \{ 0 < |1-z| < |1-\zeta|; |\arg(1-z)| < \pi, |\arg(1-\zeta)| < \pi \}, \quad (5.86)$$

которое является частным случаем (4.69) для области  $\mathbb{K}^N$  при  $N = 2$ . Применяя к фигурирующим в (5.81) гипергеометрическим функциям  $F(a', b+k; c-a; \zeta)$  формулы продолжения (2.6), (2.7), (2.21), (2.22) и подставляя результат в формулу (5.81), приходим к следующему утверждению, позволяющему продолжить функцию Аппеля  $F_1(a, a'; b, c; z, \zeta)$  в область  $\mathbb{K}^2$ .

**Предложение 2.13.** *Пусть выполняются соотношения (5.9). Тогда аналитическое продолжение ряда (5.1) в область  $\mathbb{K}^2$  дается формулой*

$$F_1(a, a'; b, c; z, \zeta) = \sum_{j=0}^2 A_j \mathcal{U}_j^{(1)}(a, a'; b, c; z, \zeta), \quad (5.87)$$

где функции  $\mathcal{U}_j^{(1)}$ ,  $j = 0, 1, 2$ , определяются равенствами

$$\mathcal{U}_0^{(1)}(a, a'; b, c; z, \zeta) = F_1(a, a'; b, 1+a+a'+b-c; 1-z, 1-\zeta), \quad (5.88)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1^{(1)}(a, a'; b, c; z, \zeta) = & (1-z)^{c-a-a'-b} \times \\ & \times G\left(a, c-a-a'; c-a-b, 1+c-a-a'-b; \frac{1-z}{1-\zeta}, 1-\zeta\right), \end{aligned} \quad (5.89)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_2^{(1)}(a, a'; b, c; z, \zeta) = & (1-z)^{c-a-b} (1-\zeta)^{-a'} \times \\ & \times F_1\left(c-a-a', a'; c-b, 1+c-a-b; 1-z, \frac{1-z}{1-\zeta}\right), \end{aligned} \quad (5.90)$$

а коэффициенты  $A_j$  имеют вид

$$A_0 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-a'-b)}{\Gamma(c-a-a')\Gamma(c-b)}, \quad A_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)\Gamma(a+a'+b-c)}{\Gamma(a')\Gamma(b)\Gamma(c-b)},$$

$$A_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}.$$
(5.91)

Функции (5.88)–(5.90) являются линейно независимыми частными решениями системы (5.3). Под функцией  $G$ , фигурирующей в формуле (5.89), понимается обобщенный гипергеометрический ряд (5.4).

Относительно результатов этого предложения справедливы замечания, аналогичные приведенным после предложения 2.7. Представленный в настоящей работе подход к получению формул (5.87)–(5.91) отличается от примененного в [203] способа, основанного на переразложении рядов, и может быть применен для построения аналитического продолжения других классов двукратных гипергеометрических рядов. В работе эти формулы приведены также и для удобства их сопоставления с полученными далее формулами продолжения в логарифмическом случае.

Нетрудно увидеть, что если имеет место логарифмический случай  $(\mathcal{C})$ , т.е. выполнено первое соотношение (5.63), то в формуле (5.87) не определены величины  $A_1\mathcal{U}_1^{(1)}$  и  $A_2\mathcal{U}_2^{(1)}$ . Если же имеет место логарифмический случай  $(\mathcal{D})$ , т.е. выполнено второе соотношение (5.63), то в (5.87) не определены  $A_0\mathcal{U}_0^{(1)}$  и  $A_1\mathcal{U}_1^{(1)}$ .

Таким образом, логарифмический случай требует отдельного рассмотрения, которому посвящены пп. 5.3.4° и 5.3.6°. При этом формулы аналитического продолжения функции Аппеля  $F_1$  содержат введенные в п. 5.2.4° ряды  $F_{1,ln}^{\pm}$  и  $G_{ln}^{\pm}$ .

5.3.4°. Логарифмический случай  $(\mathcal{C}.1)$ . Перейдем к рассмотрению формул аналитического продолжения функции Аппеля  $F_1$  в ситуации, когда ее параметры удовлетворяют первому условию (5.64), т.е имеет место логарифмический случай  $(\mathcal{C}.1)$ . Справедливо следующее утверждение, где, напомним,

область  $\mathbb{K}^2$  определена соотношением (5.86).

**Предложение 2.14.** *Пусть параметры  $a, b$  и  $c$  функции Аппеля связаны первым соотношением (5.64) при некотором  $m \in \mathbb{Z}^+$ . Тогда аналитическое продолжение ряда (5.1) в область  $\mathbb{K}^2$  дается формулой*

$$F_1(a, a'; b, a+b+m; z, \zeta) = A_0 \mathcal{U}_0^{(1)}(a, a'; b, a+b+m; z, \zeta) + A_1 \mathcal{U}_1^{(1)}(a, a'; b, a+b+m; z, \zeta),$$

где функции  $\mathcal{U}_0^{(1)}$  и  $\mathcal{U}_1^{(1)}$  имеют вид

$$\mathcal{U}_0^{(1)}(a, a'; b, a+b+m; z, \zeta) = F_1\left(a, a'; b, 1+a'-m; 1-z, 1-\zeta\right), \quad (5.92)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1^{(1)}(a, a'; b, a+b+m; z, \zeta) &= \\ &= (1-\zeta)^{m-a'} G_{ln}^+\left(a, b-a'-m; m, 1-a'+m; \frac{1-z}{1-\zeta}, 1-\zeta\right), \end{aligned} \quad (5.93)$$

обобщенный гипергеометрический ряд  $G_{ln}^+$  определяется из (5.41), (5.42), а коэффициенты  $A_0$  и  $A_1$  даются равенствами:

$$A_0 = \frac{\Gamma(a+b+m) \Gamma(m-a')}{\Gamma(a+m) \Gamma(b-a'+m)}, \quad A_1 = \frac{\Gamma(a+b+m) \Gamma(a'-m) (m-1)!}{\Gamma(a') \Gamma(b) \Gamma(a+m)}.$$

Функции  $\mathcal{U}_0^{(1)}$  и  $\mathcal{U}_1^{(1)}$ , определенные формулами (5.92), (5.93), а также следующая функция

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_2^{(1)}(a, a'; b, a+b+m; z, \zeta) &= (1-z)^m (1-\zeta)^{-a'} \times \\ &\times F_1\left(b-a'+m, a'; a+m, 1+m; 1-z, \frac{1-z}{1-\zeta}\right). \end{aligned} \quad (5.94)$$

являются линейно независимыми частными решениями системы (5.3) в области  $\mathbb{K}^2$ .

Введенные в предложении 2.14 по формулам (5.92), (5.93) и (5.94) функции  $\mathcal{U}_j^{(1)}, j = 0, 1, 2$ , являются каноническими решениями системы (5.3) в области  $\mathbb{K}^2$  для логарифмического случая (С.1), условия которого указаны в (5.64).

5.3.5°. *Логарифмический случай (С.2).* Предположим, что выполнено второе соотношение (5.64), т.е. имеет место случай (С.2). Следующее утверждение устанавливает формулы аналитического продолжения функции  $F_1$  в область  $\mathbb{K}^2$ , определенную соотношением (5.86).

**Предложение 2.15.** Пусть параметры  $a, b$  и  $c$  функции Аппеля связаны вторым соотношением (5.64), т.е. имеет место логарифмический случай (С.2). Тогда аналитическое продолжение ряда (5.1) в область  $\mathbb{K}^2$  дается формулой

$$F_1(a, a'; b, a+b-m; z, \zeta) = \sum_{j=0}^2 A_j \mathcal{U}_j^{(1)}(a, a'; b, a+b-m; z, \zeta),$$

где функции  $\mathcal{U}_j^{(1)}$ ,  $j = 0, 1, 2$ , имеют вид

$$\mathcal{U}_0^{(1)}(a, a'; b, a+b-m; z, \zeta) = F_1(a, a'; b, 1+a'+m; 1-z, 1-\zeta), \quad (5.95)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1^{(1)}(a, a'; b, a+b-m; z, \zeta) &= \\ &= (1-\zeta)^{-a'-m} G_{ln} \left( a, b-a'-m; -m, 1-a'-m; \frac{1-z}{1-\zeta}, 1-\zeta \right), \end{aligned} \quad (5.96)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_2^{(1)}(a, a'; b, a+b-m; z, \zeta) &= \\ &= (1-z)^{-m} (1-\zeta)^{-a'} F_{1,ln}^+ \left( b-a'-m, a'; a-m, 1-m; 1-z, \frac{1-z}{1-\zeta} \right), \end{aligned} \quad (5.97)$$

обобщенные гипергеометрические ряды  $F_{1,ln}^+$  и  $G_{ln}$ , даются равенствами (5.39), (5.40) и (5.43), а коэффициенты  $A_j$  выражаются по формулам

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\Gamma(a+b-m) \Gamma(-a'-m)}{\Gamma(a-m) \Gamma(b-a'-m)}, \quad A_1 = \frac{\Gamma(a+b-m) \Gamma(a'+m)}{\Gamma(a-m) \Gamma(a) \Gamma(b)}, \\ A_2 &= \frac{\Gamma(a+b-m) (m-1)!}{\Gamma(a) \Gamma(b)}. \end{aligned}$$

Функции (5.95)–(5.97) являются линейно независимыми частными решениями системы (5.3).

Введенные в предложении 2.15 по формулам (5.95)–(5.97) функции  $\mathcal{U}_j^{(1)}$ ,  $j = 0, 1, 2$ , являются каноническими решениями системы (5.3) в области  $\mathbb{K}^2$  для логарифмического случая (С.2), условия которого указаны в (5.64).

5.3.6°. Логарифмический случай (Д.1). Перейдем к формулам аналитического продолжения функции Аппеля  $F_1$  в ситуации, когда ее параметры такие, что разность  $(c-a-a'-b)$  является целым неотрицательным числом  $m$ ,

т.е. имеет место указанный в формуле (5.65) случай (Д.1). Справедливо следующее утверждение, где область  $\mathbb{K}^2$  определена соотношением (5.86).

**Предложение 2.16.** *Пусть параметры  $a, a', b$  и  $c$  функции Аппеля связаны первым соотношением (5.65) при некотором  $m \in \mathbb{Z}^+$ . Тогда аналитическое продолжение ряда (5.1) в область  $\mathbb{K}^2$  дается формулой*

$$F_1(a, a'; b, a + a' + b + m; z, \zeta) = \sum_{j=0}^2 A_j \mathcal{U}_j^{(1)}(a, a'; b, a + a' + b + m; z, \zeta),$$

где функции  $\mathcal{U}_j^{(1)}$  имеют вид

$$\mathcal{U}_0^{(1)}(a, a'; b, a + a' + b + m; z, \zeta) = F_{1,ln}^+(a, a'; b, 1 - m; 1 - z, 1 - \zeta), \quad (5.98)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1^{(1)}(a, a'; b, a + a' + b + m; z, \zeta) &= \\ &= (1 - \zeta)^m G_{ln}^+(a, b + m; a' + m, 1 + m; \frac{1 - z}{1 - \zeta}, 1 - \zeta), \end{aligned} \quad (5.99)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_2^{(1)}(a, a'; b, a + a' + b + m; z, \zeta) &= (1 - z)^{a' + m} (1 - \zeta)^{-a'} \times \\ &\times F_1\left(b + m, a'; a + a' + m, 1 + a' + m; 1 - z, \frac{1 - z}{1 - \zeta}\right), \end{aligned} \quad (5.100)$$

гипергеометрические ряды  $F_{1,ln}^+$  и  $G_{ln}^+$  определяются из (5.39), (5.40) и (5.46), (5.47), а коэффициенты  $A_j$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\Gamma(c)(m-1)!}{\Gamma(a+a'+m)\Gamma(c-a-a')}, \\ A_1 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a'+m)}{\Gamma(a')\Gamma(a+a'+m)\Gamma(c-a-a'-m)}, \\ A_2 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(-m-a')}{\Gamma(a)\Gamma(c-a-a'-m)}. \end{aligned}$$

Функции (5.98)–(5.100) являются линейно независимыми частными решениями системы (5.3).

Введенные в предложении 2.16 по формулам (5.98)–(5.100) функции  $\mathcal{U}_j^{(1)}$ ,  $j = 0, 1, 2$ , являются каноническими решениями системы (5.3) в области  $\mathbb{K}^2$  для логарифмического случая (Д.1), условия которого указаны в (5.65).

5.3.7°. Логарифмический случай ( $\mathcal{D}.2$ ). Предположим, что параметры функции Аппеля таковы, что разность  $(c - a - a' - b)$  является целым отрицательным числом  $-m$ , т.е. имеет место второе соотношение из формулы (5.65). Имеет место следующее утверждение, позволяющее продолжить функцию Аппеля в область  $\mathbb{K}^2$ , определяемую из (5.86).

**Предложение 2.17.** *Пусть параметры  $a, b$  и  $c$  функции Аппеля связаны вторым соотношением (5.65) при некотором  $m \in \mathbb{Z}^+$ . Тогда аналитическое продолжение ряда (5.1) в область  $\mathbb{K}^2$  дается формулой*

$$F_1(a, a'; b, a + a' + b - m; z, \zeta) =$$

$$B_1 u_1^{(1)}(a, a'; b, a + a' + b - m; z, \zeta) + B_2 u_2^{(1)}(a, a'; b, a + a' + b - m; z, \zeta),$$

где функции  $U_j^{(1)}$ ,  $j = 0, 1, 2$ , имеют вид

$$\begin{aligned} U_1^{(1)}(a, a'; b, a + a' + b - m; z, \zeta) &= \\ &= (1 - z)^{-m} G_{ln}^+(a, b - m; a' - m, 1 - m; \frac{1 - z}{1 - \zeta}, 1 - \zeta), \end{aligned} \quad (5.101)$$

$$\begin{aligned} U_2^{(1)}(a, a'; b, a + a' + b - m; z, \zeta) &= (1 - z)^{a' - m} (1 - \zeta)^{-a'} \times \\ &\times F_1\left(b - m, a'; a + a' - m, 1 + a' - m; 1 - z, \frac{1 - z}{1 - \zeta}\right); \end{aligned} \quad (5.102)$$

гипергеометрический ряд  $G_{ln}^+$  находится из (5.44), а коэффициенты  $A_j$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\Gamma(a + a' + b - m) \Gamma(a' - m) (m - 1)!}{\Gamma(a') \Gamma(b) \Gamma(a + a' - m)}, \\ A_2 &= \frac{\Gamma(a + a' + b - m) \Gamma(m - a')}{\Gamma(a) \Gamma(b)}. \end{aligned}$$

Функции (5.101), (5.102), а также следующая

$$U_0^{(1)}(a, a'; b, a + a' + b - m; z, \zeta) = F_1\left(a, a'; b, 1 + m; 1 - z, 1 - \zeta\right). \quad (5.103)$$

являются линейно независимыми частными решениями системы (5.3).

Введенные в предложении 2.17 по формулам (5.101), (5.102) и (5.103) функции  $U_j^{(1)}$ ,  $j = 0, 1, 2$ , являются каноническими решениями системы (5.3) в области  $\mathbb{K}^2$  для логарифмического случая ( $\mathcal{D}.2$ ), условия которого приведены в (5.65).

В заключение отметим, что произвольное решение системы (5.3) в области  $\mathbb{K}^2$  может быть представлено в виде линейной комбинации не более чем трех функций  $\mathcal{U}_j^{(1)}$ ,  $j = 0, 1, 2$ , указанных в предложениях 8–12.

**5.4. Формулы аналитического продолжения в окрестности точек  $(z, \zeta) = (\infty, 1)$  и  $(z, \zeta) = (1, \infty)$ .**

5.4.1<sup>o</sup>. Гипергеометрические ряды  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$  и их аналоги для логарифмического случая В данном разделе построены формулы аналитического продолжения функции Аппеля в область  $\mathbb{W}^2$ , определяемую как объединение

$$\mathbb{W}^2 := \bigcup_{\delta \in (0,1)} \mathbb{W}^2(\delta), \quad (5.104)$$

где вспомогательные области  $\mathbb{W}^2(\delta)$  при каждом  $\delta \in (0, 1)$  даются равенством

$$\begin{aligned} \mathbb{W}^2(\delta) := \{ (z, \zeta) \in \mathbb{C}^2 : & 0 < |1 - z| < \delta, |\zeta| > 1 + \delta; \\ & |\arg(1 - z)| < \pi, |\arg(-\zeta)| < \pi \}. \end{aligned} \quad (5.105)$$

Представленные в следующем п. 5.4.2<sup>o</sup> записаны в терминах следующих гипергеометрических рядов:

$$\mathcal{F}(a, a'; b, c, c'; z, \zeta) = \sum_{k, n=0}^{\infty} \frac{(b)_n (a)_k (a')_n}{(c)_{n-k} (c')_k k! n!} z^k \zeta^n, \quad (z, \zeta) \in \mathbb{F}, \quad (5.106)$$

$$\mathcal{G}(a, a'; b, c; z, \zeta) = \sum_{k, n=0}^{\infty} \frac{(b)_k (a - n)_k (a')_n}{(c)_k k! n!} z^k \zeta^n, \quad (z, \zeta) \in \mathbb{F}, \quad (5.107)$$

$$\mathcal{H}(a, a'; b, c; z, \zeta) = \sum_{k, n=0}^{\infty} \frac{(b)_{k+n} (a)_k (a' + k)_n}{(c)_{k+n} k! n!} z^k \zeta^n, \quad (z, \zeta) \in \mathbb{H}. \quad (5.108)$$

Области сходимости  $\mathbb{F}$  и  $\mathbb{H}$  этих рядов, в чем можно убедиться, используя подход, изложенный, например, в [169], [19], определяются по формулам

$$\mathbb{F} := \bigcup_{\delta \in (0,1)} \mathbb{F}(\delta), \quad \mathbb{H} := \bigcup_{\delta \in (0,1)} \mathbb{H}(\delta), \quad (5.109)$$

где вспомогательные области  $\mathbb{F}(\delta)$  и  $\mathbb{H}(\delta)$  для каждого  $\delta \in (0, 1)$  имеют вид:

$$\mathbb{F}(\delta) := \{ (z, \zeta) \in \mathbb{C}^2 : |z| < \delta, |\zeta| < (1 + \delta)^{-1} \}. \quad (5.110)$$

$$\mathbb{H}(\delta) := \{(z, \zeta) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1 - \delta, |\zeta| < \delta\}. \quad (5.111)$$

Обобщения рядов (5.106)–(5.108) на случай  $N$  переменных представлены в §4, см. формулы (4.88)–(4.90).

При построении аналитического продолжения функции Аппеля  $F_1$  в логарифмическом случае нам также потребуются введенные далее функции, которые представляют собой аналоги рядов  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{H}$  для "сингулярных" значений параметров этих функций.

Для функции  $\mathcal{F}(a, a'; b, c, c'; z, \zeta)$ , определяемой по формуле (5.106), сингулярными являются целые значения параметра  $c$ , а также целые неположительные значения  $c'$ . Следующие три ряда являются расширением определения (5.106) на указанные случаи параметров  $c$  и  $c'$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ln}(a, a'; b, 1 - m, c'; z, \zeta) := & \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{m+k-1} \frac{(b)_n (a)_k (a')_n}{(1-m)_{n-k} (c')_k k! n!} z^k \zeta^n + \right. \\ & \left. + \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \sum_{n=m+k}^{\infty} \frac{(b)_n (a)_k (a')_n}{(n-k-m)! (c')_k k! n!} [\mu_{k,n} - \ln(-\zeta)] z^k \zeta^n \right\}, \end{aligned} \quad (5.112)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ln}(a, a'; b, 1 + m, c'; z, \zeta) := & \\ & := \sum_{k=m}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{k-m-1} \frac{(b)_n (k-n-m-1)! (a)_k (a')_n}{(c')_k k! n!} z^k \zeta^n + \right. \\ & \left. + (-1)^m \sum_{n=k-m}^{\infty} \frac{(b)_n (a)_k (a')_n}{(n-k-m)! (c')_k k! n!} [\mu_{k,n} - \ln(-\zeta)] z^k \zeta^n \right\}, \end{aligned} \quad (5.113)$$

где  $\mu_{k,n} = h_n^-(a', b, m)$ , а  $h_n^-$  определяется из (2.11),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ln}(a, a'; b, c, 1 - m; z, \zeta) := & \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n (a)_k (a')_n}{(c)_{n-k} (1-m)_k k! n!} z^k \zeta^n + \\ & + \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n (a)_k (a')_n}{(c)_{n-k} (k-m)! k! n!} [\mu'_{k,n} - \ln(-\zeta)] z^k \zeta^n; \end{aligned} \quad (5.114)$$

здесь  $\mu'_{k,n} = \psi(1-m+k) + \psi(1+k) - \psi(1-c+k-n) - \psi(a+k)$ .

Для рядов  $\mathcal{H}(a, a'; b, c; z, \zeta)$  и  $\mathcal{G}(a, a'; b, c; z, \zeta)$ , определяемых по формулам (5.107) и (5.108), сингулярными являются целые неположительные значения параметра  $c \in \mathbb{Z}^-$ . Следующие два ряда являются расширением определений (5.107) и (5.108) на указанные случаи этого параметра:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{ln}(a, a'; b, 1-m; z, \zeta) := & \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \sum_{n=0}^{m-k-1} \frac{(b)_{k+n} (a)_k (a')_n}{(1-m)_{k+n} k! n!} z^k \zeta^n + \right. \\ & \left. + \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \sum_{n=m-k}^{\infty} \frac{(b)_{k+n} (a)_k (a')_n}{(n+k-m)! (c)_k k! n!} [\nu_{k,n} - \ln(-\zeta)] z^k \zeta^n \right\}, \end{aligned} \quad (5.115)$$

где числа  $\nu_{k,n}$  имеют вид:  $\nu_{k,n} = h_n^-(b+k, a', m)$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ln}(a, a'; b, 1-m; z, \zeta) := & \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_k (a-n)_k (a')_n}{(1-m)_k k! n!} z^k \zeta^n + \\ & + \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_k (a-n)_k (a')_n}{(k-m)! (c)_k k! n!} [\varkappa_{k,n} - \ln(-\zeta)] z^k \zeta^n; \end{aligned} \quad (5.116)$$

здесь  $\varkappa_{k,n} = \psi(1-m+k) + \psi(1+k) - \psi(b+k) - \psi(a+k+n)$ .

Напомним еще, что символ Похгаммера  $(a)_k$ , определенный равенством (1.3), при положительных значениях индекса  $k$  записывается в виде (1.4), а при отрицательных значениях  $k$  — в виде (4.36).

Используя известный подход, изложенный, например, в [169], [19], можно показать, что ряды (5.112)–(5.114) сходятся в области  $\mathbb{F}$ , заданной соотношениями (5.109), (5.110), за исключением точек множества  $\mathbb{E}_\zeta$ , определенного по формуле (5.48), а ряд (5.115) сходится в области  $\mathbb{H}$ , определенной с помощью (5.109), (5.111), за исключением того же множества (5.48), на котором указанные выше ряды формально обращаются в бесконечность благодаря наличию логарифма  $\ln(\pm\zeta)$ . Неоднозначность, обусловленная присутствием этого логарифма, устраняется очевидным образом с помощью проведения подходящих разрезов.

5.4.2<sup>o</sup>. Формулы аналитического продолжения в область  $\mathbb{W}^2$ . Применяя формулы продолжения (2.26), (2.27) к гипергеометрическим функциям

$$F(a', b+k; c-a; \zeta) \quad \text{и} \quad F(a', c-a+k; c-a; \zeta), \quad (5.117)$$

фигурирующим в (5.81), (5.82), приходим к следующему утверждению.

**Предложение 2.18.** *Пусть параметры функции Аппеля таковы, что ни одно из чисел  $(c-a-b)$  и  $(a'-b)$  не является целым. Тогда аналитическое продолжение ряда (5.1) в область  $\mathbb{W}^2$  дается формулой*

$$F_1(a, a'; b, c; z, \zeta) = \sum_{j=0}^2 A_j \mathcal{U}_j^{(1,\infty)}(a, a'; b, c; z, \zeta),$$

где функции  $\mathcal{U}_j^{(1,\infty)}$ ,  $j = 0, 1, 2$ , определяются равенствами

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0^{(1,\infty)}(a, a'; b, c; z, \zeta) &= \\ &= (-\zeta)^{-a'} \mathcal{F} \left( a, a'; 1 - c + a + a', 1 - b + a', 1 + a + b - c; z - 1, \zeta^{-1} \right), \end{aligned} \quad (5.118)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1^{(1,\infty)}(a, a'; b, c; z, \zeta) &= (1 - z)^{c-a-b} (-\zeta)^{-a'} \times \\ &\times \mathcal{G} \left( c - a - a', a'; c - b, 1 + c - a - b; 1 - z, \zeta^{-1} \right), \end{aligned} \quad (5.119)$$

$$\mathcal{U}_2^{(1,\infty)}(a, a'; b, c; z, \zeta) = (-z)^{-b} \mathcal{H} \left( a, 1 - c + a + b; b, 1 - a' + b; \frac{z - 1}{\zeta}, \frac{1}{\zeta} \right), \quad (5.120)$$

а коэффициенты  $A_j$  имеют вид

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(c - a - b) \Gamma(b - a')}{\Gamma(b) \Gamma(c - b) \Gamma(c - a - a')}, \\ A_1 &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(a + b - c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)}, \quad A_2 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(a' - b)}{\Gamma(a') \Gamma(c - b)}. \end{aligned}$$

Функции (5.118)–(5.120) являются линейно независимыми частными решениями системы (5.3). Гипергеометрические ряды  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$  определяются равенствами (5.106)–(5.108).

Ограничение  $(a' - b) \notin \mathbb{Z}$  на параметры функции Аппеля устраняет следующее предложение. Для случая  $b = a' + m$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$ , формулы аналитического продолжения, установленные в этом предложении, получаются применением к первой функции из (5.117) соотношений (2.28), а ко второй функции из (5.117) — формул (2.26), (2.27), с последующей подстановкой в

(5.81), (5.82). Аналогичные формулы для функции  $F_1$  в случае  $b = a' - m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , в представленном ниже предложении получаются применением к первой функции из (5.117) соотношений (2.29), а ко второй функции из (5.117) — формул (2.26), (2.27), с последующей подстановкой в (5.81), (5.82). Напомним, что область  $\mathbb{W}^2$  имеет вид (5.104), (5.105).

**Предложение 2.19.** *Пусть параметры функции Аппеля такие, что  $(c - a - b) \notin \mathbb{Z}$  и  $(a' - b) \in \mathbb{Z}$ . Тогда справедливы утверждения.*

1) *Если  $b = a' + m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , то аналитическое продолжение ряда (5.1) в область  $\mathbb{W}^2$  дается формулой*

$$F_1(a, a'; a' + m, c; z, \zeta) = A_0 \mathcal{U}_0^{(1, \infty)}(a, a'; a' + m, c; z, \zeta) + A_1 \mathcal{U}_1^{(1, \infty)}(a, a'; a' + m, c; z, \zeta),$$

где функции  $\mathcal{U}_j^{(1, \infty)}$ ,  $j = 0, 1$ , определяются равенствами

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0^{(1, \infty)}(a, a'; a' + m, c; z, \zeta) &= \\ &= (-\zeta)^{-a'} \mathcal{F}_{ln} (a, a'; 1 - c + a + a', 1 - m, 1 + a + a' + m - c; z - 1, \zeta^{-1}), \end{aligned} \quad (5.121)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1^{(1, \infty)}(a, a'; b, c; z, \zeta) &= (1 - z)^{c - a - a' - m} (-\zeta)^{-a'} \times \\ &\times \mathcal{G} (c - a - a', a'; c - a - a' - m, 1 + c - a - a' - m; 1 - z, \zeta^{-1}), \end{aligned} \quad (5.122)$$

а коэффициенты  $A_0$  и  $A_1$  — следующими равенствами:

$$A_0 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c - a - a' - m) (m - 1)!}{\Gamma(a' + m) \Gamma(c - a - a') \Gamma(c - a' - m)}, \quad A_1 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(a + a' - c + m)}{\Gamma(a) \Gamma(a' + m)}.$$

Функции (5.121), (5.122), а также следующая

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_2^{(1, \infty)}(a, a'; b, c; z, \zeta) &= \\ &= (-z)^{-a' - m} \mathcal{H} \left( a, 1 - c + a + a' + m; a' + m, 1 + m; \frac{z - 1}{\zeta}, \frac{1}{\zeta} \right), \end{aligned} \quad (5.123)$$

являются линейно независимыми частными решениями системы (5.3). Гипергеометрические ряды  $\mathcal{F}_{ln}$ ,  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{H}$ , фигурирующие в (5.121), (5.122), (5.123), определяются равенствами (5.112), (5.107) и (5.108).

2) Если  $b = a' - m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , то аналитическое продолжение ряда (5.1) в область  $\mathbb{W}^2$  дается формулой

$$F_1(a, a'; a' - m, c; z, \zeta) = \sum_{j=0}^2 A_j \mathcal{U}_j^{(1,\infty)}(a, a'; a' + m, c; z, \zeta)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0^{(1,\infty)}(a, a'; a' - m, c; z, \zeta) &= \\ &= (-\zeta)^{-a'} \mathcal{F}_{ln} (a, a'; 1 - c + a + a', 1 + m, 1 + a + a' - m - c; z - 1, \zeta^{-1}), \end{aligned} \quad (5.124)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1^{(1,\infty)}(a, a'; a' - m, c; z, \zeta) &= (1 - z)^{c - a - a' + m} (-\zeta)^{-a'} \times \\ &\times \mathcal{G} (c - a - a', a'; c - a' + m, 1 + c - a - a' + m; 1 - z, \zeta^{-1}), \end{aligned} \quad (5.125)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_2^{(1,\infty)}(a, a'; a' - m, c; z, \zeta) &= \\ &= (-\zeta)^{-a' + m} \mathcal{H}_{ln} (a, 1 - c + a + a' - m; a' - m, 1 - m; \frac{z - 1}{\zeta}, \frac{1}{\zeta}), \end{aligned} \quad (5.126)$$

а коэффициенты  $A_j$  имеют вид

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(c - a - a' + m)}{\Gamma(a' - m) \Gamma(c - a' + m) \Gamma(c - a - a')}, \\ A_1 &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(a + a' - c - m)}{\Gamma(a) \Gamma(a' - m)}, \quad A_2 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(m - 1)!}{\Gamma(a') \Gamma(c - a' + m)}. \end{aligned}$$

Гипергеометрические ряды  $\mathcal{F}_{ln}$ ,  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{H}_{ln}$ , фигурирующие в (5.124), (5.125) и (5.126), определяются равенствами (5.113), (5.107) и (5.115). Функции (5.118)–(5.120) являются линейно независимыми частными решениями системы (5.3).

Ограничение  $(c - a - b) \notin \mathbb{Z}$  на параметры функции Аппеля  $F_1$  устраняет приведенное далее предложение. Формулы аналитического продолжения функции  $F_1$ , устанавливаемые этим предложением для случая  $c = a + b + m$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$ , получаются, подстановкой в представление (с.44) выражений (5.73) и (5.75) для вычетов, в которых функции Гаусса аналитически продолжены с использованием соотношений (2.26), (2.27). Аналогичные формулы для функции  $F_1$  в случае  $c = a + b - m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , находятся

подстановкой в представление (с.54), стр. 274, выражений (5.77) и (5.79) для вычетов, в которых к функциям Гаусса также применены формулы аналитического продолжения (2.26), (2.27). Таким образом, получаем следующее

**Предложение 2.20.** *Пусть параметры функции Аппеля таковы, что  $(c - a - b) \in \mathbb{Z}$  и  $(a' - b) \notin \mathbb{Z}$ . Тогда справедливы утверждения:*

1) если  $c = a + b + m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , то аналитическое продолжение ряда (5.1) в область  $\mathbb{W}^2$  дается формулой

$$F_1(a, a'; b, a + b + m; z, \zeta) = A_0 \mathcal{U}_0^{(1, \infty)}(a, a'; b, a + b + m; z, \zeta) + A_2 \mathcal{U}_2^{(1, \infty)}(a, a'; b, a + b + m; z, \zeta),$$

где функции  $\mathcal{U}_j^{(1, \infty)}$ ,  $j = 0, 1$ , определяются равенствами

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0^{(1, \infty)}(a, a'; b, a + b + m; z, \zeta) &= \\ &= (-\zeta)^{-a'} \mathcal{F}_{ln} (a, a'; 1 - b + a' - m, 1 - b + a' 1 - m; z - 1, \zeta^{-1}), \end{aligned} \quad (5.127)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_2^{(1, \infty)}(a, a'; b, a + b + m; z, \zeta) &= \\ &= (-z)^{-b} \mathcal{H} \left( a, 1 - m; b, 1 - a' + b; \frac{z - 1}{\zeta}, \frac{1}{\zeta} \right), \end{aligned} \quad (5.128)$$

а коэффициенты  $A_0$  и  $A_1$  – следующими равенствами:

$$A_0 = \frac{\Gamma(a + b + m) \Gamma(b - a')(m - 1)!}{\Gamma(b) \Gamma(a + m) \Gamma(b - a' - m)}, \quad A_2 = \frac{\Gamma(a + b + m) \Gamma(a' - b)}{\Gamma(a') \Gamma(a + m)}.$$

Функции (5.127), (5.128), а также следующая

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1^{(1, \infty)}(a, a'; b, a + b + m; z, \zeta) &= (1 - z)^m (-\zeta)^{-a'} \times \\ &\times \mathcal{G} \left( b - a' + m, a'; a + m, 1 + m; 1 - z, \zeta^{-1} \right), \end{aligned} \quad (5.129)$$

являются линейно независимыми частными решениями системы (5.3). Гипергеометрические ряды  $\mathcal{F}_{ln}$ ,  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{G}$ , фигурирующие в (5.127), (5.128), (5.129), определяются равенствами (5.114), (5.108) и (5.107).

2) Если  $c = a + b - m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , то аналитическое продолжение ряда (5.1) в область  $\mathbb{W}^2$  дается формулой

$$\begin{aligned} F_1(a, a'; b, a + b - m; z, \zeta) &= \\ &= A_1 \mathcal{U}_1^{(1, \infty)}(a, a'; b, a + b - m; z, \zeta) + A_2 \mathcal{U}_2^{(1, \infty)}(a, a'; b, a + b - m; z, \zeta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1^{(1,\infty)}(a, a'; b, a+b-m; z, \zeta) &= (1-z)^{-m}(-\zeta)^{-a'} \times \\ &\times \mathcal{G}_{ln} (b-a'-m, a'; a-m, 1-m; 1-z, \zeta^{-1}), \end{aligned} \quad (5.130)$$

$$\mathcal{U}_2^{(1,\infty)}(a, a'; a'-m, c; z, \zeta) = (-\zeta)^{-b} \mathcal{H} \left( a, 1+m; b, 1-a'+b; \frac{z-1}{\zeta}, \frac{1}{\zeta} \right), \quad (5.131)$$

а коэффициенты  $A_j$  имеют вид

$$A_1 = \frac{\Gamma(a+b-m)(m-1)!}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, \quad A_2 = \frac{\Gamma(a+b-m)\Gamma(a'-b)!}{\Gamma(a')\Gamma(a-m)}.$$

Функции (5.130)–(5.131), а также следующая:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0^{(1,\infty)}(a, a'; b, a+b+m; z, \zeta) &= \\ &= (-\zeta)^{-a'} \mathcal{F} (a, a'; 1-c+a+a', 1-b+a' 1+m; z-1, \zeta^{-1}), \end{aligned} \quad (5.132)$$

являются линейно независимыми частными решениями системы (5.3).

Гипергеометрические ряды  $\mathcal{G}_{ln}$ ,  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{F}$  фигурирующие в (5.130), (5.131) и (5.132), определяются равенствами (5.116), (5.108) и (5.106).

Введенные в предложениях 2.18–2.20 функции  $\mathcal{U}_j^{(1,\infty)}$ ,  $j = 0, 1, 2$ , являются каноническими решениями системы (5.3) в области  $\mathbb{W}^2$ . Произвольное решение этой системы в  $\mathbb{W}^2$  может быть записано в виде линейной комбинации не более чем трех функций  $\mathcal{U}_j^{(1,\infty)}$ , представленных в предложениях 2.18–2.20.

Аналитическое продолжение функции Аппеля в область больших по модулю  $z$  и близких к единице  $\zeta$  получается применением к предложениям 2.18–2.20 соотношения симметрии (5.7).

## Г л а в а III

# Представление решения задачи Римана — Гильберта в виде интеграла Кристоффеля — Шварца

В настоящей главе установлено, что решение  $\mathcal{P}^+(\zeta)$  сингулярной задачи Римана — Гильберта в  $\mathbb{H}^+$  в случае, когда ее данные  $\chi(\xi)$  и  $\sigma(\xi)$  кусочно-постоянны с множеством точек разрыва  $\Xi$ , указанном в (3.1), стр. 38, может быть представлено в виде обобщенного интеграла Кристоффеля — Шварца:

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = \mathcal{K}_1 \int^{\zeta} \prod_{k=1}^N (t - \xi_k)^{\gamma_k - 1} P(t) dt + \mathcal{K}_2; \quad (0.1)$$

здесь  $P(\zeta)$  — полином с вещественными коэффициентами, для которого найдено явное выражение в терминах функции Лауричеллы, определяемой рядом (1.2), стр. 68. Степень полинома  $P(\zeta)$  в (0.1) зависит от числа точек разрыва функции  $\chi(\xi)$  и от индекса  $\varkappa$  задачи. Показатели  $\gamma_k$  — вещественные числа; их дробные части выражаются через скачки аргумента функции  $\chi(\xi)$  в точках ее разрыва, а целые части  $\gamma_k$  определяются некоторыми дополнительными условиями.

Поскольку приведенный выше интеграл Кристоффеля — Шварца, как известно [78], определяет отображение  $\mathbb{H}^+$  на (возможно, неоднолистный) многоугольник, то найденное представление придает геометрический смысл ис-комой функции  $\mathcal{P}^+$  и тем самым решает проблему Римана о ее геометрической интерпретации. Кроме того, представление (0.1) решения задачи Римана — Гильберта более удобно для численной реализации, чем традиционное через интегралы типа Коши.

В § 1 решение рассматриваемой сингулярной задачи Римана — Гильберта с кусочно-постоянными данными записано через интегралы типа Коши. В § 2 это представление преобразовано с помощью формулы типа Якоби для функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}$  к виду интеграла типа Кристоффеля — Шварца.

## §1. Задача Римана — Гильберта с кусочно-постоянными данными в $\mathbb{H}^+$ и представление ее решения в виде интеграла типа Коши

**1.1. Постановка задачи.** Обозначим через  $L_k$  интервалы вещественной оси  $\mathbb{R}$  между соседними точками множества  $\Xi$  из (3.1), стр. 38, т.е.  $L_k = (\xi_k, \xi_{k+1})$ ,  $k = \overline{0, N}$ , где, напомним,  $\xi_0 = \xi_{N+1}$  — бесконечно удаленная точка. Введем комплексную и вещественную кусочно-постоянны функции  $\chi(\xi)$  и  $\sigma(\xi)$  на оси  $\mathbb{R}$ , которые в дальнейшем играют роль данных задачи, по формулам

$$\chi(\xi) = \chi_k, \quad \sigma(\xi) = \sigma_k; \quad \xi \in L_k, \quad k = \overline{0, N}, \quad (1.1)$$

где  $\chi_k \neq 0$  и  $\sigma_k$  — некоторые постоянные величины. Кроме того, как и в главе I, зададим набор неотрицательных целых чисел:

$$\mathfrak{G} := \{n_0, n_1, \dots, n_N\}, \quad n_k \in \mathbb{Z}^+, \quad k = \overline{0, N}, \quad (1.2)$$

и поставим в соответствие каждой точке  $\xi_k \in \Xi$  число  $n_k \in \mathfrak{G}$ , которое в дальнейшем будет характеризовать целую часть показателя роста решения  $\mathcal{P}^+(\zeta)$  задачи Римана — Гильберта в этой точке.

Отметим, что аргумент  $\arg \chi(\xi)$  функции  $\chi(\xi)$  из (1.1) принимает на каждом из интервалов  $L_k$ ,  $k = \overline{0, N}$ , некоторое постоянное значение, определенное с точностью до величины  $2\pi m_k$ , где  $m_k$  — целое число (свое для каждого интервала). Зафиксируем произвольным образом величины  $m_k$ ,  $k = \overline{0, N}$ , и вычислим скачки функции  $\arg \chi(\xi)$  в точках множества  $\Xi$  по формулам

$$\delta_k := \frac{\arg \chi_k - \arg \chi_{k-1}}{\pi}, \quad k = \overline{1, N}; \quad \delta_0 := -\frac{\arg \chi_0 - \arg \chi_N}{\pi}, \quad (1.3)$$

уточняющим (3.3), (3.4), стр. 39; кроме того, вычислим дробные и целые части скачков  $\delta_k$ , определенных в (1.3):

$$[0, 1) \ni \alpha_k := \{\delta_k\}, \quad \beta_k := [\delta_k], \quad k = \overline{0, N}; \quad (1.4)$$

введем еще скачки функции  $\rho(\xi) = \sigma(\xi)/\chi(\xi)$ :

$$\rho_k = \frac{\sigma_{k+1}}{\chi_{k+1}} - \frac{\sigma_k}{\chi_k}, \quad k = \overline{0, N}.$$

Определим также величину

$$\Theta_N := \frac{\pi}{2} - \arg \chi_N. \quad (1.5)$$

Будем предполагать, что числа  $n_0$  и  $\alpha_0$ , соответствующие бесконечно удаленной точке  $\xi_0$ , одновременно не равны нулю, что с учетом  $\alpha_0 \in [0, 1)$  и  $n_0 \in \mathbb{Z}^+$  означает  $\alpha_0 + n_0 \neq 0$ , а, кроме того, среди конечных точек  $\xi_k \in \Xi$  нет таких, для которых одновременно имеют место равенства  $n_k = 0$  и  $\alpha_k = 0$ , но  $\rho_k \neq 0$ . Таким образом, считаем, что всегда удовлетворяются условия

$$1) \alpha_0 + n_0 \neq 0, \quad 2) \nexists k = \overline{1, N} : n_k = 0, \quad \alpha_k = 0, \quad \rho_k \neq 0. \quad (1.6)$$

Отметим, что эти условия обеспечивают выполнение требований (3.8), стр. 40, т.е. имеет место случай I (нелогарифмический).

Через  $\mathcal{H}^+$  по–прежнему обозначаем класс функций, аналитических в  $\mathbb{H}^+$  и непрерывных в  $\overline{\mathbb{H}^+} \setminus \Xi$ , где  $\Xi$  — множество точек (3.1), стр. 38, вещественной оси, в которых функции  $\chi(\xi)$  и  $\sigma(\xi)$  терпят разрывы.

Рассматриваемая задача Римана — Гильберта заключается в нахождении аналитической в верхней полуплоскости функции  $\mathcal{P}^+ \in \mathcal{H}^+$  по заданному на вещественной оси краевому условию

$$\operatorname{Re} [\chi(\xi) \mathcal{P}^+(\xi)] = \sigma(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \Xi, \quad (1.7)$$

где  $\chi$  и  $\sigma$  определены в (1.1); при этом предполагается, что в точках множества  $\Xi$  функция  $\mathcal{P}^+$  удовлетворяет следующим условиям роста:

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = \begin{cases} \mathcal{O}[(\zeta - \xi_k)^{\alpha_k - n_k}], & \text{если } n_k \neq 0; \\ \mathcal{O}(1), & \text{если } n_k = 0; \end{cases} \quad \zeta \rightarrow \xi_k \ (k = \overline{1, N}), \quad (1.8)$$

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{\alpha_0 + n_0}), \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (1.9)$$

Эти соотношения повторяют (3.26) и (3.27), см. стр. 43, и приведены здесь для удобства изложения.

**1.2. Представление решения через интегралы типа Коши.** Разрешимость сформулированной в предыдущем пункте задачи Римана — Гильберта и представление ее решения устанавливает следующая теорема, уточняющая теорему 1.5, I), см. стр. 65, для случая кусочно-постоянных данных  $\chi$  и  $\sigma$ .

**Теорема 3.1.** Для рассматриваемой задачи Римана — Гильберта (1.7)–(1.9) с кусочно-постоянными данными (1.1), удовлетворяющими условиям (1.6), справедливы следующие утверждения.

i) Если индекс  $\varkappa$ , определяемый по формуле

$$\varkappa := n_0 - \beta_0 + \sum_{k=1}^N (\beta_k + n_k), \quad (1.10)$$

неотрицателен, то решение  $\mathcal{P}^+ \in \mathcal{H}^+$  имеет вид

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = X^+(\zeta) [P_\varkappa(\zeta) + \mathcal{F}^+(\zeta)]; \quad (1.11)$$

здесь  $X^+(\zeta)$  — каноническая функция, определяемая по формуле

$$X^+(\zeta) = e^{i\Theta_N} \prod_{k=1}^N (\zeta - \xi_k)^{\alpha_k - n_k}, \quad (1.12)$$

где постоянная  $\Theta_N$  дается равенством (1.5),  $P_\varkappa(\zeta)$  — произвольный многочлен степени  $\varkappa$  с вещественными коэффициентами, а функция  $\mathcal{F}^+(\zeta)$  находится следующим образом:

$$\mathcal{F}^+(\zeta) = \sum_{k=0}^N \mathcal{F}_k^+(\zeta), \quad (1.13)$$

$$\mathcal{F}_k^+(\zeta) = \frac{\sigma_k}{\chi_k \pi i} \int_{L_k} \frac{dt}{X^+(t)(t - \zeta)}, \quad k = \overline{1, N-1}, \quad (1.14)$$

$$\mathcal{F}_0^+(\zeta) = \frac{\sigma_0(\zeta - \tau_*)^\varkappa}{\chi_0 \pi i} \int_{L_0} \frac{(t - \tau_*)^{-\varkappa}}{X^+(t)(t - \zeta)} dt, \quad (1.15)$$

$$\mathcal{F}_N^+(\zeta) = \frac{\sigma_N(\zeta - \tau^*)^\varkappa}{\chi_N \pi i} \int_{L_N} \frac{(t - \tau^*)^{-\varkappa}}{X^+(t)(t - \zeta)} dt;$$

здесь  $\tau_*, \tau^* \in \mathbb{R}$  — произвольные точки, принадлежащие соответственно интервалам  $(\xi_1, +\infty)$  и  $(-\infty, \xi_N)$ .

**ii)** Если  $\kappa = -1$ , то единственное решение задачи имеет вид

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = X^+(\zeta) \mathcal{F}^+(\zeta), \quad (1.16)$$

где функция  $\mathcal{F}^+(\zeta)$  определяется по формулам (1.13)–(1.15), при этом в (1.15) следует формально положить  $\kappa = 0$ .

**iii)** Если  $\kappa < -1$  и выполняются условия разрешимости

$$\sum_{m=0}^N B_{km} \frac{\sigma_m}{\chi_m} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, |\kappa| - 2; \quad B_{km} := \int_{L_m} \frac{t^k}{X^+(t)} dt, \quad (1.17)$$

то единственное решение задачи имеет вид (1.16). Если же  $\kappa < -1$  и указанные условия (1.17) не выполнены, то рассматриваемая задача Римана — Гильберта неразрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3.1, использующее те же приемы, что и в доказательстве теоремы 1.5, I), представлено в приложении D.

Предположим, что первое условие (1.6) не выполнено, т.е.  $\alpha_0 = n_0 = 0$ .

Тогда, используя равенство

$$\alpha_0 + n_0 = \kappa + \sum_{k=1}^N (\alpha_k - n_k), \quad (1.18)$$

вытекающее из (1.3), (1.4) и (1.10), нетрудно убедиться в том, что определенные в (1.13) интегралы  $\mathcal{F}_0^+(\zeta)$  и  $\mathcal{F}_N^+(\zeta)$  по бесконечным интервалам расходятся (рассматриваем случай  $\kappa \geq 0$ ). Если при этом  $\rho_0 \neq 0$ , то условие (1.9) теоремы 3.1 следует заменить на  $\mathcal{P}^+(\zeta) = \mathcal{O}(\ln \zeta)$ ,  $\zeta \rightarrow \infty$ , а в формулах (1.15) для  $\mathcal{F}_0^+(\zeta)$  и  $\mathcal{F}_N^+(\zeta)$  — положить  $(\kappa + 1)$  вместо  $\kappa$ . После этого все утверждения теоремы будут выполнены. Если же  $\alpha_0 = n_0 = 0$  и  $\rho_0 = 0$ , то в формулах (1.15) полагаем  $\tau^* = \tau_*$  и сумму  $\mathcal{F}_0^+(\zeta) + \mathcal{F}_N^+(\zeta) =: \mathcal{S}(\zeta)$  рассматриваем как интеграл в смысле главного значения, который, как нетрудно показать, существует. Функцию  $\mathcal{F}^+(\zeta)$ , фигурирующую в теореме, будем вычислять по формуле  $\mathcal{F}^+(\zeta) = \mathcal{S}(\zeta) + \sum_{k=1}^{N-1} \mathcal{F}_k^+(\zeta)$ , где  $\mathcal{F}_k^+(\zeta)$ , по-прежнему, определяются из (1.14). С учетом такой модификации функции  $\mathcal{F}^+(\zeta)$  все утверждения

теоремы 3.1 выполнены. Условие (1.9) при этом переходит в  $\mathcal{P}^+(\zeta) = \mathcal{O}(1)$ ,  $\zeta \rightarrow \infty$ . Отметим также, что если в одной из конечных точек  $\xi_k \in \Xi$  нарушается второе условие (1.6), то вид решения, приведенный в теореме 3.1 сохраняется, при этом в точке  $\xi_k$  функция  $\mathcal{P}^+(\zeta)$  будет иметь логарифмическую асимптотику, вместо степенной (1.8).

Можно показать, что если в формуле (1.13) для  $\mathcal{F}_0^+$  заменить  $\tau_*$  на  $\tilde{\tau} \neq \tau_*$  и обозначить такую функцию через  $\tilde{\mathcal{F}}_0^+$ , то разность  $\tilde{\mathcal{F}}_0^+ - \mathcal{F}_0^+$  будет некоторым полиномом степени  $(\varkappa - 1)$  с вещественными коэффициентами. Аналогичное замечание справедливо и для  $\mathcal{F}_N^+$ . Таким образом, присутствие  $\tau_*$  и  $\tau^*$  в (1.15) не влияет на общее число произвольных вещественных постоянных, равное  $(\varkappa + 1)$ , от которых зависит решение задачи Римана — Гильберта, рассматриваемой в теореме 3.1.

## §2. Построение решения задачи Римана — Гильберта в виде интеграла Кристоффеля — Шварца

**2.1. Предварительные замечания.** Перепишем решение  $\mathcal{P}^+$  задачи Римана — Гильберта (1.7)–(1.9), приведенное в теореме 3.1, так, чтобы его удобно было преобразовать к виду интеграла Кристоффеля — Шварца (0.1) с помощью частного случая формулы типа Якоби, указанного ниже в теореме 3.2. Раскрывая квадратные скобки в представлении (1.11) для решения  $\mathcal{P}^+$  при неотрицательном индексе  $\varkappa$ , получаем

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = \Psi^+(\zeta) + \mathcal{N}^+(\zeta), \quad (2.1)$$

где функция

$$\Psi^+(\zeta) := X^+(\zeta)P_\varkappa(\zeta), \quad (2.2)$$

является общим решение однородной задачи, а  $\mathcal{N}^+(\zeta)$  — частное решение неоднородной задачи, определяемое по формуле

$$\mathcal{N}^+(\zeta) = \sum_{k=0}^N \mathcal{N}_k^+(\zeta), \quad \mathcal{N}_k^+(\zeta) := X^+(\zeta)\mathcal{F}_k^+(\zeta), \quad (2.3)$$

в которой  $X^+(\zeta)$  и  $\mathcal{F}_k^+(\zeta)$  даются равенствами (1.12) и (1.13). В случае отрицательного индекса  $\varkappa$  согласно теореме 3.1 в представлении (2.1) отсутствует слагаемое  $\Psi^+(\zeta)$ , а функции  $\mathcal{F}_k^+(\zeta)$ , фигурирующие в формуле (2.3), находятся из (1.13), где для  $\mathcal{F}_0^+(\zeta)$  и  $\mathcal{F}_N^+(\zeta)$  необходимо положить  $\varkappa = 0$ .

Функция  $\Psi^+(\zeta)$  записывается в виде интеграла Кристоффеля — Шварца путем дифференцирования правой части равенства (2.2), последующих несложных преобразований и неопределенного интегрирования полученного выражения; соответствующие формулы приведены в п. 2.5.

Вывод аналогичного представления для частного решения  $\mathcal{N}^+(\zeta)$  осуществляется следующим образом. Используя замену переменных, переводящую интервал  $L_k$  в единичный  $(0, 1)$ , и применяя интегральное представление для функции Лауричеллы (1.6), выразим все слагаемые  $\mathcal{N}_k^+(\zeta)$  в (2.3) через функции  $F_D^{(N)}$  (для которых наборы параметров и переменных не совпадают при разных  $k$ ). Применяя к полученным выражениям для  $\mathcal{N}_k^+(\zeta)$  вариант формулы типа Якоби, указанный ниже в п. 2.2, преобразуем производные  $\frac{d}{d\zeta} \mathcal{N}_k^+(\zeta)$  к виду произведения биномов и некоторого явно написанного полинома  $T_k(\zeta)$ , откуда после интегрирования находим

$$\mathcal{N}_k^+(\zeta) = \int^{\zeta} \prod_{j=1}^N (t - \xi_j)^{\alpha_j - n_j - 1} T_k(t) dt. \quad (2.4)$$

Замечая, что подынтегральные выражения в (2.4) при разных  $k$  отличаются лишь видом полинома  $T_k(\zeta)$ , сложим равенства (2.4) и в соответствии с (2.3) получим искомое представление для  $\mathcal{N}^+(\zeta)$ .

Описанные преобразования функций  $\mathcal{N}_0^+$  и  $\mathcal{N}_N^+$  осуществлены соответственно в пп. 2.4.1<sup>o</sup> и 2.4.3<sup>o</sup>, а аналогичные преобразования функций  $\mathcal{N}_k^+$ ,  $k = \overline{1, N-1}$ , выполнены в п. 2.4.2<sup>o</sup>. В следующем п. 2.2 указан используемый частный случай формул типа Якоби, а в п. 2.3 введены обозначения, упрощающие вид получаемых формул.

**2.2. Используемый вариант формулы типа Якоби для функции Лауричеллы.** В теореме 2.2 главы II, см. стр. 84, были построены дифференциальные соотношения типа Якоби, обобщающие тождество (2.32), стр. 80,

на случай функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}$ . Согласно замечанию 2.3 на стр. 85 тождество с номером  $j$  существенно упрощается, если  $a_j = 1$ , и имеет вид произведения биномов и некоторого явно выписанного полинома.

Вывод представления вида (0.1) для решения задачи Римана — Гильберта основан на использовании установленной теоремой 2.2 формулы с номером  $j = N$  для функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}$ , параметр  $a_N$  которой равен единице, т.е. функции вида

$$F_D^{(N)}\left(\underbrace{a_1, \dots, a_{N-1}}_{=\mathbf{a}}, 1; b, c; \underbrace{z_1, \dots, z_{N-1}}_{=\mathbf{z}}, w\right); \quad (2.5)$$

здесь переменное  $z_N$ , соответствующее параметру  $a_N = 1$ , переобозначено через  $w$ . Такую формулу для функции (2.5) по-прежнему будем называть *формулой или соотношением типа Якоби для функции Лауричеллы*.

В дальнейшем применяется следующая векторная запись для параметров и аргументов функции (2.5):

$$\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_{N-1}), \quad \mathbf{z} := (z_1, \dots, z_{N-1}), \quad (2.6)$$

а также обозначение  $\mathbf{a}^s$  для вектора, полученного увеличением  $s$ -й компоненты  $\mathbf{a}$  на единицу:

$$\mathbf{a}^s := (a_1, \dots, a_{s-1}, a_s + 1, a_{s+1}, \dots, a_{N-1}). \quad (2.7)$$

Модуль вектора означает сумму его элементов, например, для вектора  $\mathbf{a}$  из (2.6) имеем  $|\mathbf{a}| := \sum_{s=1}^{N-1} a_s$ .

Из теоремы 2.2 главы II, стр. 84, вытекает следующее утверждение.

**Теорема 3.2.** *Для функции Лауричеллы (2.5) имеет место формула типа Якоби:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w} \left\{ \left[ \prod_{j=1}^{N-1} (w - z_j)^{a_j} \right] w^{c-|\mathbf{a}|-1} (1-w)^{1+b-c} F_D^{(N)}(\mathbf{a}, 1; b, c; \mathbf{z}, w) \right\} = \\ = \left[ \prod_{j=1}^{N-1} (w - z_j)^{a_j-1} \right] w^{c-|\mathbf{a}|-2} (1-w)^{b-c} \mathcal{R}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}, w), \end{aligned} \quad (2.8)$$

$\partial \mathcal{R}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}, w)$  — полином степени  $(N - 1)$  по переменному  $w$ , определяемый равенством

$$\mathcal{R}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}, w) = \left[ \prod_{j=1}^{N-1} (w - z_j) \right] \left( \lambda_0 + \sum_{s=1}^{N-1} \frac{\lambda_s}{w - z_s} \right); \quad (2.9)$$

здесь коэффициенты  $\lambda_s$ ,  $s = \overline{0, N-1}$ , не зависят от  $w$  и выражаются через функции Лаурителлы с числом переменных  $(N-1)$  по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &:= (c - 1) F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}; b - 1, c - 1; \mathbf{z}), \\ \lambda_s &:= a_s z_s (1 - z_s) F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}^s; b, c; \mathbf{z}), \quad s = \overline{1, N-1}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{z}$  и  $\mathbf{a}^s$  определены в (2.6) и (2.7).

Напомним, что в главе II, см. формулу (2.32) на стр. 80, было приведено известное в теории гипергеометрической функции Гаусса тождество Якоби [19], [187]. Отметим, что правая часть этого равенства, как нетрудно показать, используя формулы (4.4) на стр. 96 и (1.4), стр. 69, существенно упрощается, если параметр  $a$  равен единице, и имеет вид произведения биномов. В этом случае тождество Якоби принимает вид

$$\frac{d}{dz} \left[ z^{c-1} (1 - z)^{1+b-c} F(1, b; c; z) \right] = (c - 1) z^{c-2} (1 - z)^{b-c}. \quad (2.11)$$

Нетрудно увидеть, что установленные теоремой 3.2 формулы типа Якоби (2.8)–(2.10) для функции Лаурителлы (2.5) обобщают тождество (2.11). Действительно, пусть  $N = 1$ , т.е. функция Лаурителлы (2.5) совпадает с  $F(1, b; c; z)$ . Тогда поскольку вектор  $\mathbf{a}$  из (2.6) имеет  $(N - 1)$  элемент, полагаем  $|\mathbf{a}| = 0$  в (2.8), а произведения по  $j$  и суммы по  $s$  в (2.8), (2.9) считаем равными соответственно единице и нулю (поскольку верхний предел меньше нижнего). С учетом этого из (2.9), (2.10) получаем  $\mathcal{R} = \lambda_0 = c - 1$  и видим, что тождество (2.8) при  $N = 1$  совпадает с (2.11).

**2.3. Используемые обозначения.** Введем вектор  $\mathbf{a} := (a_0, a_1, \dots, a_N)$ , компоненты  $a_j$  которого связаны с данными задачи Римана — Гильберта (1.7)–(1.9) с помощью соотношений:

$$a_0 := \varkappa, \quad a_j := \alpha_j - n_j, \quad j = \overline{1, N}; \quad (2.12)$$

здесь, напомним,  $\varkappa$  — индекс задачи, определяемый по формуле (1.10), величины  $\alpha_j$  находятся из (1.3), (1.4), а  $n_j$  — неотрицательные целые числа из набора (1.2).

Определим векторы  $\mathbf{a}_k$ ,  $k = \overline{1, N-1}$ , получаемые из  $\mathbf{a}$  исключением элементов  $a_0$ ,  $a_k$ ,  $a_{k+1}$ , т.е.

$$\mathbf{a}_k := (a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+2}, \dots, a_N), \quad (2.13)$$

а также векторы  $\mathbf{a}_0$  и  $\mathbf{a}_N$ :

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_N := (a_0, a_2, \dots, a_{N-1}). \quad (2.14)$$

Введем векторы  $\mathbf{a}_k^s$ , получаемые увеличением на единицу компоненты  $a_s$  векторов  $\mathbf{a}_k$  (предполагается, что  $s \neq k, k+1$ , если  $k = 1, \dots, N-1$  и  $s \neq 1, N$ , если  $k = 0$  или  $k = N$ ), т.е.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k^s &:= (a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+2}, \dots, a_{s-1}, a_s + 1, a_{s+1}, \dots, a_N), \quad k = \overline{1, N-1}, \\ \mathbf{a}_0^s &= \mathbf{a}_N^s := (a_0, a_2, \dots, a_{s-1}, a_s + 1, a_{s+1}, \dots, a_{N-1}), \\ \mathbf{a}_0^0 &= \mathbf{a}_N^0 := (a_0 + 1, a_2, \dots, a_{N-1}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Определим числа  $b_k$  и  $c_k$ ,  $k = \overline{0, N}$ , с помощью соотношений

$$b_0 := |\alpha| + \varkappa - |\mathbf{n}|, \quad c_0 := |\alpha_{2,N}| + \varkappa - |\mathbf{n}_{2,N}| + 1; \quad (2.16)$$

$$b_k := 1 + n_k - \alpha_k, \quad c_k := 2 + n_k + n_{k+1} - \alpha_k - \alpha_{k+1}, \quad k = \overline{1, N-1}; \quad (2.17)$$

$$b_N := |\alpha| + \varkappa - |\mathbf{n}|, \quad c_N := |\alpha_{1,N-1}| + \varkappa - |\mathbf{n}_{1,N-1}| + 1; \quad (2.18)$$

здесь, как обычно,

$$|\alpha_{k,l}| = \sum_{j=k}^l \alpha_j, \quad |\alpha| = |\alpha_{1,N}|; \quad |\mathbf{n}_{k,l}| = \sum_{j=k}^l n_j, \quad |\mathbf{n}| = |\mathbf{n}_{1,N}|. \quad (2.19)$$

Величины  $|\beta_{k,l}|$  и  $|\beta|$ , где  $\beta := (\beta_1, \dots, \beta_N)$ , определяются аналогично. Векторы  $\mathbf{u}_k$ ,  $k = \overline{0, N}$ , имеют вид

$$\mathbf{u}_0 := (u_0^0, u_2^0, \dots, u_{N-1}^0); \quad (2.20)$$

$$\mathbf{u}_k := (u_1^k, \dots, u_{k-1}^k, u_{k+2}^k, \dots, u_N^k), \quad k = \overline{1, N-1}; \quad (2.21)$$

$$\mathbf{u}_N := (u_0^N, u_2^N, \dots, u_{N-1}^N); \quad (2.22)$$

здесь величины  $u_j^k$  определяются следующими равенствами:

$$u_0^0 := \frac{\xi_N - \tau_*}{\xi_N - \xi_1}; \quad u_j^0 := \frac{\xi_N - \xi_j}{\xi_N - \xi_1}, \quad j = \overline{2, N-1}; \quad (2.23)$$

$$u_j^k := \frac{\xi_{k+1} - \xi_k}{\xi_j - \xi_k}, \quad j = \overline{1, N} \setminus \{k, k+1\}, \quad k = \overline{1, N-1}; \quad (2.24)$$

$$u_0^N := \frac{\tau^* - \xi_1}{\xi_N - \xi_1}; \quad u_j^N := \frac{\xi_j - \xi_1}{\xi_N - \xi_1}, \quad j = \overline{2, N-1}, \quad (2.25)$$

в которых  $\tau_*$  и  $\tau^*$  имеют тот же смысл, что и в теореме 3.1, а  $\xi_j$ ,  $j = \overline{1, N}$ , — точки множества  $\Xi$  разрыва граничных данных  $\chi(\xi)$  и  $\sigma(\xi)$  задачи Римана — Гильберта (1.7)–(1.9), определенного в (3.1).

Приведем выражение для бета-функции [19]:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)},$$

используемой далее для упрощения записи формул.

#### 2.4. Приведение функции $\mathcal{N}_k^+(\zeta)$ , $k = \overline{0, N}$ , и частного решения $\mathcal{N}(\zeta)$ к виду интеграла Кристоффеля — Шварца.

2.4.1°. Представление для функции  $\mathcal{N}_0^+(\zeta)$  в виде интеграла Кристоффеля — Шварца. В соответствии с (2.3), (1.12) и (1.13) функция  $\mathcal{N}_0^+(\zeta)$  имеет следующее представление через интеграл типа Коши:

$$\mathcal{N}_0^+(\zeta) = \frac{\sigma_0}{\chi_0 \pi i} \left[ (\zeta - \tau_*)^\varkappa \prod_{j=1}^N (\zeta - \xi_j)^{\alpha_j - n_j} \right] \int_{-\infty}^{\xi_1} \frac{(t - \tau_*)^{-\varkappa} dt}{\prod_{j=1}^N (t - \xi_j)^{\alpha_j - n_j} (t - \zeta)}. \quad (2.26)$$

Выполняя замену переменных  $t$  и  $\zeta$  на новые переменные  $\tau$  и  $w$  по формулам

$$t(\tau) = \xi_N + (\xi_1 - \xi_N)\tau^{-1}, \quad \zeta(w) = \xi_N + (\xi_1 - \xi_N)w \quad (2.27)$$

и используя представление (1.6), стр. 70, для функции Лауричеллы, получаем для интеграла в (2.26) следующее выражение:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\xi_1} \frac{(t - \tau_*)^{-\varkappa} dt}{\prod_{j=1}^N (t - \xi_j)^{\alpha_j - n_j} (t - \zeta)} = & -B(b_0, c_0 - b_0) \times \\ & \times (\xi_1 - \xi_N)^{-b_0} F_D^{(N)} \left( \mathbf{a}_0, 1; b_0, c_0; \mathbf{u}_0, w \right), \end{aligned} \quad (2.28)$$

где параметры  $\mathbf{a}_0$ ,  $b_0$ ,  $c_0$  и переменное  $\mathbf{u}_0$  функции Лауричеллы определены в (2.14), (2.16) и (2.21), (2.23). С помощью замены  $\zeta(w)$ , введенной в (2.27), преобразуем произведение перед интегралом (2.26) к виду:

$$(\zeta - \tau_*)^\varkappa \prod_{j=1}^N (\zeta - \xi_j)^{\alpha_j - n_j} = (\xi_1 - \xi_N)^{b_0} w^{c_0 - |\mathbf{a}_0| - 1} (w - 1)^{1 + b_0 - c_0} \prod_{j=0}^{N-1}' (w - u_j^0)^{a_j}, \quad (2.29)$$

где учтены равенства  $\alpha_1 - n_1 = 1 + b_0 - c_0$ ,  $\alpha_N - n_N = c_0 - |\mathbf{a}_0| - 1$ , легко получаемые из формул (2.14), (2.16) для параметров  $\mathbf{a}_0$ ,  $b_0$  и  $c_0$ , а величины  $u_j^0$  определены в (2.23). Штрих над произведением в (2.29) означают, что индекс  $j \neq 1$ . Подставляя (2.28), (2.29) в (2.26), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0^+ (\zeta(w)) = & - \frac{\sigma_0}{\chi_0 \pi i} B(b_0, c_0 - b_0) \times \\ & \times w^{c_0 - |\mathbf{a}_0| - 1} (w - 1)^{1 + b_0 - c_0} \left[ \prod_{j=0}^{N-1}' (w - u_j^0)^{a_j} \right] F_D^{(N)} \left( \mathbf{a}_0, 1; b_0, c_0; \mathbf{u}_0, w \right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Дифференцируя это равенство и применяя формулу типа Якоби (2.8), (2.10), получаем выражение для производной

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} \mathcal{N}_0^+ (\zeta(w)) = & \frac{\sigma_0}{\chi_0 \pi i} B(b_0, c_0 - b_0) \times \\ & \times w^{c_0 - |\mathbf{a}_0| - 2} (w - 1)^{b_0 - c_0} \left[ \prod_{j=0}^{N-1}' (w - u_j^0)^{a_j - 1} \right] R_0(w), \end{aligned} \quad (2.31)$$

где  $R_0(w)$  — полином по переменному  $w$ , определяемый следующими равенствами:

$$R_0(w) = \left[ \prod_{j=0}^{N-1}' (w - u_j^0) \right] \left( \lambda_{-1}^0 + \sum_{s=0}^{N-1}' \frac{\lambda_s^0}{w - u_s^0} \right); \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned}\lambda_{-1}^0 &= (c_0 - 1) F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}_0; b_0 - 1, c_0 - 1; \mathbf{u}_0), \\ \lambda_s^0 &= a_s u_s^0 (1 - u_s^0) F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}_0^s; b_0, c_0; \mathbf{u}_0), \quad s = 0, 2, \dots, N - 1.\end{aligned}\quad (2.33)$$

В формуле (2.32) штрих над суммой и произведением означает, что они берутся по всем индексам за исключением соответственно  $s = 1$  и  $j = 1$ .

Выполняя в формулах (2.31), (2.32) обратную к  $\zeta(w)$  из (2.27) замену

$$w(\zeta) = \frac{\zeta - \xi_N}{\xi_1 - \xi_N}, \quad \frac{d}{d\zeta} = (\xi_1 - \xi_N)^{-1} \frac{d}{dw} \quad (2.34)$$

с учетом равенства  $-\arg \chi_0 - \pi(|\alpha| - |\mathbf{n}|) = -\arg \chi_N + \pi(|\beta| + |\mathbf{n}|)$ , вытекающего из (1.3), (1.4), (1.10), получаем

$$\frac{d}{d\zeta} \mathcal{N}_0^+(\zeta) = e^{i\Theta_N} \left[ \prod_{j=1}^N (\zeta - \xi_j)^{\alpha_j - n_j - 1} \right] \mathcal{T}_0(\zeta); \quad (2.35)$$

здесь  $\Theta_N$  — постоянная из (1.5), а  $\mathcal{T}_0(\zeta)$  — полином степени  $(N + \varkappa - 2)$ , определенный по формуле

$$\mathcal{T}_0(\zeta) = \Lambda_0 \left[ (\zeta - \tau_*)^\varkappa \prod_{j=2}^{N-1} (\zeta - \xi_j) \right] \left( \mu_{-1}^0 + \frac{\mu_0^0}{\zeta - \tau_*} + \sum_{s=0}^{N-1} \frac{\mu_s^0}{\zeta - \xi_s} \right), \quad (2.36)$$

где коэффициенты  $\Lambda_0$ ,  $\mu_{-1}^0$  и  $\mu_s^0$  имеют вид

$$\begin{aligned}\Lambda_0 &= -e^{i\pi(\beta_0 - n_0)} \frac{\sigma_0}{\pi |\chi_0|} B(b_0, c_0 - b_0) (\xi_N - \xi_1)^{-b_0}, \\ \mu_{-1}^0 &= (c_0 - 1) (\xi_1 - \xi_N) F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}_0; b_0 - 1, c_0 - 1; \mathbf{u}_0), \\ \mu_0^0 &= a_0 (\xi_N - \tau_*) (\tau_* - \xi_1) F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}_0^0; b_0, c_0; \mathbf{u}_0), \\ \mu_s^0 &= a_s (\xi_N - \xi_s) (\xi_s - \xi_1) F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}_0^s; b_0, c_0; \mathbf{u}_0), \quad s = 2, \dots, N - 1.\end{aligned}\quad (2.37)$$

Здесь, напомним, величины  $a_s$ ,  $\mathbf{a}_0$ ,  $b_0$ ,  $c_0$  и  $\mathbf{u}_0$  связаны с данными задачи Римана — Гильберта (1.7)–(1.9) равенствами (2.14), (2.16) и (2.20).

Интегрируя обе части равенства (2.35), приходим к следующему утверждению.

**Предложение 3.1.** *Функция  $\mathcal{N}_0^+(\zeta)$ , заданная формулой (2.26), представима в виде следующего интеграла Кристоффеля — Шварца:*

$$\mathcal{N}_0^+(\zeta) = e^{i\Theta_N} \int_{\zeta^*}^{\zeta} \left[ \prod_{j=1}^N (t - \xi_j)^{\alpha_j - n_j - 1} \right] \mathcal{T}_0(t) dt + \nu_0^*, \quad (2.38)$$

где  $\Theta_N$  — постоянная из (1.5), а полином  $\mathcal{T}_0(\zeta)$  степени  $(N + \varkappa - 2)$  определяется равенствами (2.36), (2.37).

В качестве нижнего предела интегрирования  $\zeta^*$  в (2.38) может быть выбрана любая точка  $\zeta^* \in \overline{\mathbb{H}^+}$ , в которой функция  $\mathcal{N}_0^+$  принимает конечное значение. При этом константа интегрирования  $\nu_0^* = \mathcal{N}_0^+(\zeta^*)$  находится из (2.26), (2.28), где  $\zeta$  необходимо заменить на  $\zeta^*$ , а переменное  $w$  функции Лауричеллы — на величину  $w(\zeta^*)$ , вычисленную с помощью первого равенства (2.34). Выражение для этой константы следующее:

$$\nu_0^* = -e^{i\Theta_N} \Lambda_0(\zeta^* - \tau_*)^\varkappa \prod_{j=1}^N (\zeta^* - \xi_j)^{a_j} F_D^{(N)} \left( \mathbf{a}_0, 1; b_0, c_0; \mathbf{u}_0, \frac{\zeta^* - \xi_N}{\xi_1 - \xi_N} \right), \quad (2.39)$$

где  $\Theta_N$  и  $\Lambda_0$  находятся соответственно из (1.5) и (2.37).

Напомним, что рассматриваемая в предложении 3.1 функция  $\mathcal{N}_0^+$  первоначально была определена по формуле (2.3), т.е. в виде  $\mathcal{N}_0^+ = X^+ \mathcal{F}_0^+$ , где  $X^+$  дается равенством (1.12),  $\mathcal{F}_0^+$  — равенством (1.13); при этом предполагалось, что индекс  $\varkappa$  задачи Римана — Гильберта неотрицателен ( $\varkappa \geq 0$ ). В случае  $\varkappa < 0$  согласно п. ii) и iii) теоремы 3.1 функция  $\mathcal{F}_0^+$  определяется из (1.13), где следует положить  $\varkappa = 0$ . Таким образом, если  $\varkappa < 0$ , то функция  $\mathcal{N}_0^+$  также записывается в виде интеграла Кристоффеля — Шварца (2.38), при этом полином  $\mathcal{T}_0(\zeta)$  определяется по формулам (2.36), (2.37), где необходимо положить  $a_0 = \varkappa = 0$ , и имеет степень  $(N - 2)$ .

2.4.2°. Представление для функций  $\mathcal{N}_k^+(\zeta)$ ,  $k = \overline{1, N-1}$ , в виде интеграла Кристоффеля — Шварца. В соответствии с (2.3), (1.12) и (1.13) для функций  $\mathcal{N}_k^+(\zeta)$ ,  $k = \overline{1, N-1}$ , справедливо следующее представление через интеграл типа Коши:

$$\mathcal{N}_k^+(\zeta) = \frac{\sigma_k}{\chi_k \pi i} \left[ \prod_{j=1}^N (\zeta - \xi_j)^{\alpha_j - n_j} \right] \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \frac{dt}{\prod_{j=1}^N (t - \xi_j)^{\alpha_j - n_j} (t - \zeta)}. \quad (2.40)$$

Для того чтобы преобразовать (2.40) к виду интеграла Кристоффеля — Шварца, прежде всего выразим фигурирующий в (2.40) интеграл типа Коши через

функцию Лауричеллы. Для этого введем вместо  $t$  и  $\zeta$  новые переменные  $\tau$  и  $w$  по формулам

$$t(\tau) = \xi_k + (\xi_{k+1} - \xi_k) \tau, \quad \zeta(w) = \xi_k + \frac{\xi_{k+1} - \xi_k}{w} \quad (2.41)$$

Выполняя в интеграле (2.40) замены (2.41) и используя представление (1.6), стр. 70, для функции Лауричеллы, получаем для интеграла в (2.26) следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \frac{dt}{\prod_{j=1}^N (t - \xi_j)^{\alpha_j - n_j} (t - \zeta)} = -e^{-i\pi a_{k+1}} B(b_k, c_k - b_k) \times \\ & \times \left[ (\xi_{k+1} - \xi_k)^{-a_k - a_{k+1}} \prod_{j=1}^N'' (\xi_k - \xi_j)^{-a_j} \right] w F_D^{(N)} \left( \mathbf{a}_k, 1; b_k, c_k; \mathbf{u}_k, w \right), \end{aligned} \quad (2.42)$$

где параметры  $\mathbf{a}_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$  и переменные  $\mathbf{u}_k$  функции Лауричеллы определены в (2.13), (2.17) и (2.21), (2.24). Применяя замену  $\zeta(w)$  из (2.41), преобразуем произведение перед интегралом (2.40) к виду:

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^N (\zeta - \xi_j)^{\alpha_j - n_j} = e^{i\pi a_{k+1}} \left[ (\xi_{k+1} - \xi_k)^{a_k + a_{k+1}} \prod_{j=1}^N'' (\xi_k - \xi_j)^{a_j} \right] \times \\ & \times w^{c_k - |\mathbf{a}_k| - 2} (w - 1)^{1 + b_k - c_k} \prod_{j=1}^N'' (w - u_j^k)^{a_j}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

где учтены равенства  $|\mathbf{n}| - |\alpha| = c_k - |\mathbf{a}_k| - 2$ ,  $\alpha_{k+1} - n_{k+1} = 1 + b_k - c_k$ , легко получаемые из формул (2.15), (2.17), а величины  $u_j^k$  определены в (2.24). Два штриха над произведением в (2.43) означают, что индекс  $j \neq k, k+1$ . Подставляя (2.42), (2.43) в (2.40), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_k^+ (\zeta(w)) = & -\frac{\sigma_k}{\chi_k \pi i} B(b_k, c_k - b_k) w^{c_k - |\mathbf{a}_k| - 1} (w - 1)^{1 + b_k - c_k} \times \\ & \times \prod_{j=1}^N'' (w - u_j^k)^{a_j} F_D^{(N-1)} \left( \mathbf{a}_k, 1; b_k, c_k; \mathbf{u}_k, w \right). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Дифференцируя это равенство и применяя формулу типа Якоби (2.8),

(2.10), получаем выражение для производной

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} \mathcal{N}_k^+(\zeta(w)) &= \frac{\sigma_k}{\chi_k \pi i} B(b_k, c_k - b_k) \times \\ &\times w^{c_k - |\mathbf{a}_k| - 2} (w - 1)^{b_k - c_k} \left[ \prod_{j=1}^N'' (w - u_j^k)^{\alpha_j - n_j - 1} \right] R_k(w), \end{aligned} \quad (2.45)$$

где  $R_k(w)$  — полином по переменному  $w$ , определяемый следующими равенствами:

$$R_k(w) = \left[ \prod_{j=1}^N'' (w - u_j^k) \right] \left( \lambda_{-1}^k + \sum_{s=1}^N'' \frac{\lambda_s^k}{w - u_s^k} \right); \quad (2.46)$$

здесь суммы и произведения берутся по всем индексам за исключением соответственно  $s = k, k + 1$  и  $j = k, k + 1$ .

$$\begin{aligned} \lambda_{-1}^k &= (c_k - 1) F_D^{(N-2)}(\mathbf{a}_k; b_k - 1, c_k - 1; \mathbf{u}_k), \\ \lambda_s^k &= a_s u_s^k (1 - u_s^k) F_D^{(N-2)}(\mathbf{a}_k^s; b_k, c_k; \mathbf{u}_k), \quad s = \overline{1, N}, \quad s \neq k, k + 1. \end{aligned}$$

Возвращаясь в формулах (2.45), (2.46) к переменному  $\zeta$  с помощью обратной к (2.41) замены  $w(\zeta)$  с помощью равенств

$$w(\zeta) = \frac{\xi_{k+1} - \xi_k}{\zeta - \xi_k}, \quad \frac{d}{d\zeta} = -\frac{\xi_{k+1} - \xi_k}{(\zeta - \xi_k)^2} \frac{d}{dw}, \quad (2.47)$$

и используя соотношение

$$-\arg \chi_k - \pi(|\alpha_{k+1,N}| - |\mathbf{n}_{k+1,N}|) = -\arg \chi_N + \pi(|\beta_{k+1,N}| + |\mathbf{n}_{k+1,N}|),$$

получаем

$$\frac{d}{d\zeta} \mathcal{N}_k^+(\zeta) = e^{i\Theta_N} \left[ \prod_{j=1}^N (\zeta - \xi_j)^{\alpha_j - n_j - 1} \right] \mathcal{T}_k(\zeta), \quad (2.48)$$

где величина  $\Theta_N$  определена в (1.5), а  $\mathcal{T}_k(\zeta)$  — полином степени  $(N - 2)$ , определяемый по формуле

$$\mathcal{T}_k(\zeta) = \Lambda_k \left[ \prod_{j=1}^N'' (\zeta - \xi_j) \right] \left[ \mu_{-1}^k + (\zeta - \xi_k) \sum_{s=1}^N'' \frac{\mu_s^k}{\zeta - \xi_s} \right]; \quad (2.49)$$

здесь коэффициенты  $\Lambda_k$ ,  $\mu_{-1}^k$  и  $\mu_s^k$  даются формулами

$$\begin{aligned} \Lambda_k &= -e^{i\pi(|\beta_{k+1,N}|+|\mathbf{n}_{k+1,N}|)} \frac{\sigma_k}{|\chi_k|\pi} \text{B}(b_k, c_k - b_k) (\xi_{k+1} - \xi_k)^{c_k-1} \prod_{j=1}^N'' |\xi_k - \xi_j|^{-a_j}, \\ \mu_{-1}^k &= (c_k - 1) F_D^{(N-2)}(\mathbf{a}_k; b_k - 1, c_k - 1; \mathbf{u}_k), \\ \mu_s^k &= a_s \frac{(\xi_s - \xi_{k+1})}{(\xi_k - \xi_s)} F_D^{(N-2)}(\mathbf{a}_k^s; b_k, c_k; \mathbf{u}_k), \quad s = \overline{1, N}, \quad s \neq k, k+1. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Напомним, что фигурирующие здесь величины  $\mathbf{a}_k$ ,  $\mathbf{a}_k^s$ ,  $b_k$ ,  $c_k$  и  $\mathbf{u}_k$  определяются через данные рассматриваемой задачи Римана — Гильберта (1.7)–(1.9) с помощью равенств (2.13), (2.15), (2.17) и (2.21); сумма и произведения в (2.49), (2.50) берутся по всем индексам за исключением соответственно  $s = k, k+1$  и  $j = k, k+1$ .

Интегрируя обе части формулы (2.48), приходим к следующему утверждению.

**Предложение 3.2.** *Функции  $\mathcal{N}_k^+(\zeta)$ ,  $k = \overline{1, N-1}$ , определенные с помощью интеграла типа Коши (2.40), представимы в виде интеграла Кристоффеля — Шварца следующего вида:*

$$\mathcal{N}_k^+(\zeta) = e^{i\Theta_N} \int_{\zeta^*}^{\zeta} \left[ \prod_{j=1}^N (\zeta - \xi_j)^{\alpha_j - n_j - 1} \right] \mathcal{T}_k(t) dt + \nu_k^*, \quad (2.51)$$

где постоянная  $\Theta_N$  находится из (1.5), а полиномы  $\mathcal{T}_k(\zeta)$ ,  $k = \overline{1, N-1}$ , имеют степень  $(N-2)$  и определяются равенствами (2.49), (2.50).

В качестве нижнего предела интегрирования  $\zeta^*$  в (2.51) может быть выбрана любая точка  $\zeta^* \in \overline{\mathbb{H}^+}$ , в которой функция  $\mathcal{N}_k^+$  принимает конечное значение. При этом константа интегрирования  $\nu_k^* = \mathcal{N}_k^+(\zeta^*)$  находится из (2.40), (2.42), где  $\zeta = \zeta^*$  и переменное  $w$  функции Лауричеллы заменено на величину  $w(\zeta^*)$ , вычисленную из первого равенства (2.47). Выражение для этой константы имеет вид

$$\nu_k^* = -e^{i\Theta_N} \frac{\Lambda_k}{\zeta^* - \xi_k} \prod_{j=1}^N (\zeta^* - \xi_j)^{-a_j} F_D^{(N)}\left(\mathbf{a}_k, 1; b_k, c_k; \mathbf{u}_k, \frac{\xi_{k+1} - \xi_k}{\zeta^* - \xi_k}\right), \quad (2.52)$$

где  $\Theta_N$  и  $\Lambda_k$  определяются соответственно из (1.5) и первого равенства (2.50).

2.4.3<sup>o</sup>. Представление для функции  $\mathcal{N}_N^+(\zeta)$  в виде интеграла Кристоффеля — Шварца. В соответствии с (2.3), (1.12) и (1.13) для функции  $\mathcal{N}_N^+(\zeta)$  справедливо следующее представление через интеграл типа Коши:

$$\mathcal{N}_N^+(\zeta) = \frac{\sigma_N}{\chi_N \pi i} \left[ (\zeta - \tau^*)^\varkappa \prod_{j=1}^N (\zeta - \xi_j)^{\alpha_j - n_j} \right] \int_{\xi_N}^{+\infty} \frac{(t - \tau^*)^{-\varkappa} dt}{\prod_{j=1}^N (t - \xi_j)^{\alpha_j - n_j} (t - \zeta)}. \quad (2.53)$$

Для того чтобы преобразовать (2.53) к виду интеграла Кристоффеля — Шварца, прежде всего выразим фигурирующий в (2.53) интеграл через функцию Лауричеллы. Для этого введем вместо  $t$  и  $\zeta$  новые переменные  $\tau$  и  $w$  по формулам

$$t(\tau) = \xi_1 + \frac{\xi_N - \xi_1}{\tau}, \quad \zeta(w) = \xi_1 + (\xi_N - \xi_1)w. \quad (2.54)$$

Выполняя в интеграле (2.53) замены (2.54) и используя интегральное представление (1.6), стр. 70, для функции Лауричеллы, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\xi_N}^{+\infty} \frac{(t - \tau^*)^{-\varkappa} dt}{\prod_{j=1}^N (t - \xi_j)^{\alpha_j - n_j} (t - \zeta)} &= B(b_N, c_N - b_N) \times \\ &\times (\xi_N - \xi_1)^{-b_N} F_D^{(N)} \left( \mathbf{a}_N, 1; b_N, c_N; \mathbf{u}_N, w \right), \end{aligned} \quad (2.55)$$

где параметры  $\mathbf{a}_N$ ,  $b_N$ ,  $c_N$  и переменные  $\mathbf{u}_N$  определены в (2.14), (2.18) и (2.22), (2.25). С помощью замены  $\zeta(w)$ , введенной в формуле (2.54), преобразуем произведение перед интегралом в (2.53) к виду:

$$\begin{aligned} (\zeta - \tau^*)^\varkappa \prod_{j=1}^N (\zeta - \xi_j)^{\alpha_j - n_j} &= (\xi_N - \xi_1)^{b_N} \times \\ &\times w^{c_N - |\mathbf{a}_N| - 1} (w - 1)^{1 + b_N - c_N} \prod_{j=0}^{N-1} (w - u_j^N)^{a_j}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

где штрих над произведением означает, что  $j \neq 1$ , и учтены соотношения  $\alpha_1 - n_1 = c_N - |\mathbf{a}_N| - 1$ ,  $\alpha_N - n_N = 1 + b_N - c_N$ , получаемые из формул (2.14), (2.18) для параметров  $\mathbf{a}_N$ ,  $b_N$  и  $c_N$ , а величины  $u_j^N$  определены в (2.25).

Подставляя (2.55), (2.56) в (2.53), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_N^+(\zeta(w)) &= \frac{\sigma_N}{\chi_N \pi i} B(b_N, c_N - b_N) w^{c_N - |\mathbf{a}_N| - 1} (w - 1)^{1 + b_N - c_N} \times \\ &\times \left[ \prod_{j=0}^{N-1}' (w - u_j^N)^{a_j} \right] F_D^{(N)}(\mathbf{a}_N, 1; b_N, c_N; \mathbf{u}_N, w). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Дифференцируя это равенство и применяя формулу типа Якоби (2.8), (2.10), получаем выражение для производной

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} \mathcal{N}_N^+(\zeta(w)) &= -\frac{\sigma_N}{\chi_N \pi i} B(b_N, c_N - b_N) \times \\ &\times w^{c_N - |\mathbf{a}_N| - 2} (w - 1)^{b_N - c_N} \left[ \prod_{j=0}^{N-1}' (w - u_j^N)^{a_j - 1} \right] R_N(w), \end{aligned} \quad (2.58)$$

где  $R_N(w)$  — полином по переменному  $w$ , определяемый следующими равенствами:

$$R_N(w) = \left[ \prod_{j=0}^{N-1}' (w - u_j^N) \right] \left( \lambda_{-1}^N + \sum_{s=0}^{N-1}' \frac{\lambda_s^N}{w - u_s^N} \right), \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{-1}^N &= (c_N - 1) F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}_N; b_N - 1, c_N - 1; \mathbf{u}_N), \\ \lambda_s^N &= a_s u_s^N (1 - u_s^N) F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}_N^s; b_N, c_N; \mathbf{u}_N), \quad s = 0, 2, \dots, N - 1; \end{aligned} \quad (2.60)$$

штрих над суммой означает, что  $s \neq 1$ . Выполняя в формулах (2.58), (2.59) обратную к  $\zeta(w)$  из (2.54) замену

$$w(\zeta) = \frac{\zeta - \xi_1}{\xi_N - \xi_1}, \quad \frac{d}{d\zeta} = (\xi_N - \xi_1)^{-1} \frac{d}{dw}, \quad (2.61)$$

получаем

$$\frac{d}{d\zeta} \mathcal{N}_N^+(\zeta) = e^{i\Theta_N} \left[ \prod_{j=1}^N (\zeta - \xi_j)^{\alpha_j - n_j - 1} \right] \mathcal{T}_N(\zeta), \quad (2.62)$$

где постоянная  $\Theta_N$  дается равенством (1.5), а  $\mathcal{T}_N(\zeta)$  — полином степени  $(N + \varkappa - 2)$ , определяемый по формуле

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_N(\zeta) &= \Lambda_N \left[ (\zeta - \tau^*)^\varkappa \prod_{j=2}^{N-1} (\zeta - \xi_j) \right] \left( \mu_{-1}^N + \frac{\mu_0^N}{\zeta - \tau^*} + \sum_{s=2}^{N-1} \frac{\mu_s^N}{\zeta - \xi_s} \right); \\ &\quad (2.63) \end{aligned}$$

здесь коэффициенты  $\Lambda_N$ ,  $\mu_{-1}^N$  и  $\mu_s^N$  имеют вид

$$\begin{aligned}\Lambda_N &= \frac{\sigma_N}{|\chi_N|\pi} B(b_N, c_N - b_N) (\xi_N - \xi_1)^{-b_N}, \\ \mu_{-1}^N &= (c_N - 1)(\xi_N - \xi_1) F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}_N; b_N - 1, c_N - 1; \mathbf{u}_N), \\ \mu_0^N &= a_0(\tau^* - \xi_1) (\xi_N - \tau^*) F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}_N^0; b_N, c_N; \mathbf{u}_N), \\ \mu_s^N &= a_s(\xi_s - \xi_1) (\xi_N - \xi_s) F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}_N^s; b_N, c_N; \mathbf{u}_N), \quad s = 2, \dots, N-1,\end{aligned}\tag{2.64}$$

где, напомним, параметры  $a_s$ ,  $\mathbf{a}_N$ ,  $\mathbf{a}_N^s$ ,  $b_N$ ,  $c_N$  и переменные  $\mathbf{u}_N$  функции Ляуричеллы связаны с данными рассматриваемой задачи Римана — Гильберта (1.7)–(1.9) с помощью равенств (2.14), (2.15), (2.18) и (2.22).

Интегрируя в формуле (2.62), приходим к следующему утверждению.

**Предложение 3.3.** *Функции  $\mathcal{N}_N^+(\zeta)$ , определенная формулой (2.26), представима в виде интеграла Кристоффеля — Шварца следующего вида:*

$$\mathcal{N}_N^+(\zeta) = e^{i\Theta_N} \int_{\zeta^*}^{\zeta} \left[ \prod_{j=1}^N (\zeta - \xi_j)^{\alpha_j - n_j - 1} \right] \mathcal{T}_N(t) dt + \nu_N^*,\tag{2.65}$$

где постоянная  $\Theta_N$  определена в (1.5), а полином  $\mathcal{T}_N(\zeta)$  степени  $(N + \varkappa - 2)$  явно задан с помощью равенств (2.63), (2.64).

В качестве нижнего предела интегрирования в (2.65) может быть выбрана любая точка  $\zeta^* \in \overline{\mathbb{H}^+}$ , в которой функция  $\mathcal{N}_N^+$  принимает конечное значение. При этом константа интегрирования  $\nu_N^* = \mathcal{N}_N^+(\zeta^*)$  находится по формулам (2.53), (2.55), где  $\zeta = \zeta^*$ , а величина  $w = w(\zeta^*)$  вычислена с помощью первого равенства (2.61). Приведем выражение для этой константы:

$$\nu_N^* = -e^{i\Theta_N} \Lambda_N (\zeta^* - \tau^*)^\varkappa \prod_{j=1}^N (\zeta^* - \xi_j)^{a_j} F_D^{(N)}\left(\mathbf{a}_N, 1; b_N, c_N; \mathbf{u}_N, \frac{\zeta^* - \xi_1}{\xi_N - \xi_1}\right),\tag{2.66}$$

где  $\Theta_N$  и  $\Lambda_N$  находятся соответственно из (1.5) и первого равенства (2.64).

Для функции  $\mathcal{N}_N^+(\zeta)$ , рассматриваемой в предложении 3.3, справедливо замечание, аналогичное приведенному на стр. 174 после предложения 3.1. Действительно, представление (2.63)–(2.65) для этой функции в виде интеграла Кристоффеля — Шварца получено в предположении неотрицательного

индекса  $\varkappa$  задачи Римана — Гильберта (1.7)–(1.9). Если  $\varkappa < 0$ , то из теоремы 3.1 и приведенных выше рассуждений следует, что формула (2.65) имеет прежний вид, а в выражения (2.63), (2.64) для полинома  $\mathcal{T}_N(\zeta)$  следует формально подставить  $a_0 = \varkappa = 0$ ; при этом  $\mathcal{T}_N(\zeta)$  имеет степень  $(N - 2)$ .

2.4.4<sup>o</sup>. Представление частного решения  $\mathcal{N}^+(\zeta)$  в виде интеграла Кристоффеля — Шварца. Пусть в некоторой точке  $\zeta^* \in \overline{\mathbb{H}^+}$  конечными являются все функции  $\mathcal{N}_k^+(\zeta)$ , определенные в (2.3), а следовательно, и частное решение  $\mathcal{N}^+(\zeta)$  задачи Римана — Гильберта (1.7)–(1.9). Складывая в соответствии с (2.3) представления (2.38), (2.51), (2.65) для  $\mathcal{N}_k^+(\zeta)$ , находим следующее представление функции  $\mathcal{N}^+(\zeta)$  в виде интеграла Кристоффеля — Шварца:

$$\mathcal{N}^+(\zeta) = e^{i\Theta_N} \int_{\zeta^*}^{\zeta} \left[ \prod_{j=1}^N (\zeta - \xi_j)^{\alpha_j - n_j - 1} \right] \mathcal{T}(t) dt + \nu^*; \quad (2.67)$$

здесь  $\Theta_N$  — константа из (1.5), а  $\mathcal{T}(\zeta)$  — полином степени  $(N + \varkappa - 2)$  с вещественными коэффициентами следующего вида:

$$\mathcal{T}(\zeta) = \sum_{k=0}^N \mathcal{T}_k(\zeta),$$

где  $\mathcal{T}_k(\zeta)$ ,  $k = \overline{0, N}$ , даются равенствами (2.36), (2.49) и (2.63), и, таким образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\zeta) = & \left[ \prod_{j=1}^N (\zeta - \xi_j) \right] \left\{ \frac{\Lambda_0(\zeta - \tau_*)^\varkappa}{(\zeta - \xi_1)(\zeta - \xi_N)} \left( \mu_{-1}^0 + \frac{\mu_0^0}{\zeta - \tau_*} + \sum_{s=2}^{N-1} \frac{\mu_s^0}{\zeta - \xi_s} \right) + \right. \\ & + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\Lambda_k}{(\zeta - \xi_k)(\zeta - \xi_{k+1})} \left[ \mu_{-1}^k + (\zeta - \xi_k) \sum_{s=1}^{N''} \frac{\mu_s^k}{\zeta - \xi_s} \right] + \quad (2.68) \\ & \left. + \frac{\Lambda_N(\zeta - \tau^*)^\varkappa}{(\zeta - \xi_1)(\zeta - \xi_N)} \left( \mu_{-1}^N + \frac{\mu_0^N}{\zeta - \tau^*} + \sum_{s=2}^{N-1} \frac{\mu_s^N}{\zeta - \xi_s} \right) \right\}, \end{aligned}$$

где  $\tau_*$  и  $\tau^*$  имеют тот же смысл, что и в теореме 3.1, величины  $\Lambda_k$  и  $\mu_s^k$  определяются из (2.37), (2.50), (2.64), а два штриха над суммой означают, что  $s \neq k, k + 1$ . В формуле (2.67) постоянная  $\nu^* = \mathcal{N}^+(\zeta^*)$  имеет вид

$$\nu^* = \sum_{k=0}^N \nu_k^*, \quad (2.69)$$

где числа  $\nu_k^*$  находятся из (2.39), (2.52) и (2.66).

Из теоремы 3.1 следует, что если индекс  $\varkappa < -1$ , то для существования частного решения (2.67) требуется выполнение условий разрешимости (1.17).

Отметим еще, что если нарушается первое условие (1.6), то согласно замечаниям, приведенным после теоремы 3.1, этот случай требует некоторых модификаций при рассмотрении функций  $\mathcal{N}_0^+$  и  $\mathcal{N}_N^+$ . В случае  $\alpha_0 = n_0 = 0$  и  $g_0 = 0$  преобразование сингулярного интеграла  $X^+(\zeta)\mathcal{S}(\zeta)$  к виду интеграла Кристоффеля — Шварца осуществляется способом, близким к примененному в пп. 2.4.1°—2.4.3°.

Полином  $\mathcal{T}(\zeta)$  может иметь более простой вид для специальных случаев данных рассматриваемой задачи Римана — Гильберта. Например, если функции  $\chi(\xi)$  и  $\sigma(\xi)$  имеют три точки разрыва, т.е.  $N = 2$ , а индекс задачи равен нулю, то  $\mathcal{T}(\zeta)$  является константой, равной  $\tilde{\mathcal{T}} = \sum_{k=0}^2 \Lambda_k \mu_{-1}^k$ , где величины  $\Lambda_k$  и  $\mu_{-1}^k$  определяются по формулам (2.37), (2.50), (2.64), модифицированным для указанного частного случая  $N = 2$  и  $\varkappa = 0$ .

**2.5. Представление решения задачи Римана — Гильберта в виде интеграла Кристоффеля — Шварца.** Согласно сказанному в п. 2.1 общее решение  $\Psi^+(\zeta)$  однородной задачи Римана — Гильберта с кусочно-постоянным коэффициентом  $\chi(\xi)$  имеет вид

$$\Psi^+(\zeta) = e^{i\Theta_N} \prod_{j=1}^N (\zeta - \xi_j)^{\alpha_j - n_j} P_\varkappa(\zeta),$$

где  $\Theta_N$  — константа из (1.5), а  $P_\varkappa(\zeta)$  — произвольный полином степени  $\varkappa$  с вещественными коэффициентами. Путем дифференцирования и неопределенного интегрирования находим

$$\Psi^+(\zeta) = e^{i\Theta_N} \int_{\zeta^*}^{\zeta} \left[ \prod_{j=1}^N (t - \xi_j)^{\alpha_j - n_j - 1} \right] \mathcal{Q}(t) dt + w_0^*, \quad (2.70)$$

где  $\mathcal{Q}(\zeta)$  — полином степени  $(N - \varkappa - 1)$ , связанный с  $P_\varkappa(\zeta)$  равенством

$$\mathcal{Q}(\zeta) = P_\varkappa(\zeta) \sum_{s=1}^N \left[ (\alpha_s - n_s) \prod_{j=1, j \neq s}^N (\zeta - \xi_j) \right] + P'_\varkappa(\zeta) \prod_{j=1}^N (\zeta - \xi_j), \quad (2.71)$$

а величина  $w_0^* = \Psi^+(\zeta^*)$  определяется по формуле

$$w_0^* = e^{i\Theta_N} \prod_{j=1}^N (\zeta^* - \xi_j)^{\alpha_j - n_j} P_\kappa(\zeta^*). \quad (2.72)$$

Нетрудно убедиться, учитывая (1.18), что при  $\alpha_0 = n_0 = 0$  старший коэффициент полинома  $\mathcal{Q}(\zeta)$  равен нулю.

Из формул (2.1), (2.67) и (2.70) находим искомое представления для  $\mathcal{P}^+(\zeta)$  в виде интеграла Кристоффеля — Шварца, чем и завершаем доказательство следующего утверждения.

**Теорема 3.3.** Для решения  $\mathcal{P}^+(\zeta)$  задачи Римана — Гильберта (1.7)–(1.9) в  $\mathbb{H}^+$  с кусочно-постоянными данными (1.1), удовлетворяющими условиям (1.6), справедливы следующие утверждения.

i) Если индекс  $\kappa$ , определенный по формуле (1.10) неотрицателен, то решение  $\mathcal{P}^+ \in \mathcal{H}^+$  представимо в виде интеграла Кристоффеля — Шварца

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = e^{i\Theta_N} \int_{\zeta^*}^{\zeta} \prod_{j=1}^N (t - \xi_j)^{\alpha_j - n_j - 1} \mathcal{R}(t) dt + w^*; \quad (2.73)$$

здесь  $\mathcal{R}(\zeta)$  — полином степени  $(N + \kappa - 1)$  с вещественными коэффициентами следующего вида:

$$\mathcal{R}(\zeta) = \mathcal{Q}(\zeta) + \mathcal{T}(\zeta), \quad (2.74)$$

где  $\mathcal{Q}(\zeta)$  — полином степени  $(N + \kappa - 1)$ , определенный по формуле (2.71) через полином  $P_\kappa(\zeta)$  степени  $\kappa$  с произвольными вещественными коэффициентами, а  $\mathcal{T}(\zeta)$  — вещественный полином (2.68), степень которого  $(N + \kappa - 2)$ . В формуле (2.73) фигурируют постоянные:  $\Theta_N$  из (1.5) и  $w^* := w_0^* + \nu^*$ , где  $w_0^*$  и  $\nu^*$  находятся из (2.72) и (2.69).

ii) Если  $\kappa = -1$ , то единственное решение задачи записывается в виде интеграла Кристоффеля — Шварца (2.73), (2.74), где в формуле (2.74) для полинома  $\mathcal{R}(\zeta)$  следует положить  $\mathcal{Q}(\zeta) \equiv 0$  и формально положить  $\kappa = 0$  в формуле (2.68) для  $\mathcal{T}(\zeta)$ .

iii) Если  $\kappa < -1$ , то для существования решения необходимо и достаточно выполнения условий (1.17). При этом, если указанные условия выполнены, то решение находится по той же формуле, что и при  $\kappa = -1$ .

Отметим, что если решение  $\mathcal{P}^+$  рассматриваемой задачи Римана — Гильберта конечно в одной из точек  $\xi_k \in \Xi$  (и, следовательно, непрерывно в пересечении некоторой окрестности  $\xi_k$  с замкнутой полуплоскостью  $\overline{\mathbb{H}^+}$ ), то в формуле (2.74) можно положить  $\zeta^* = \xi_k$ , а величину  $w^* = \mathcal{P}^+(\zeta^*)$  вычислить непосредственно из краевого условия задачи Римана — Гильберта. Действительно, продолжая по непрерывности краевое условие (1.7) в точку  $\xi_k$  слева и справа, и подставляя в него  $w^* = \mathcal{P}^+(\xi_k)$ , получаем следующую систему двух (линейных) уравнений для  $w^*$ :

$$\operatorname{Re}(\chi_{k-1} w^*) = \sigma_{k-1}, \quad \operatorname{Re}(\chi_k w^*) = \sigma_k.$$

Нетрудно убедиться в том, что ее решением является следующая величина:

$$w^* = \mathcal{P}^+(\xi_k) = i \frac{\bar{\chi}_k \sigma_{k-1} - \bar{\chi}_{k-1} \sigma_k}{\operatorname{Im}(\chi_k \bar{\chi}_{k-1})}, \quad (2.75)$$

которую и принимаем в качестве постоянной интегрирования в формуле (2.73) при  $\zeta^* = \xi_k$ ; в формуле (2.75) предполагается, что  $\operatorname{Im}(\chi_k \bar{\chi}_{k-1}) \neq 0$ .

Представление в виде интеграла Кристоффеля — Шварца (2.73) показывает, что функция  $\mathcal{P}^+(\zeta)$  осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости  $\mathbb{H}^+$  на некоторую односвязную многоугольную неоднолистную область  $\mathcal{M}$ , см., например, [78]. Внутренние точки ветвления области  $\mathcal{M}$  являются образами комплексных нулей полинома  $\mathcal{R}(\zeta)$  (лежащих в  $\mathbb{H}^+$ ) при отображении  $w = \mathcal{P}^+(\zeta)$ , а граничные угловые точки  $\mathcal{M}$  — образами точек  $\xi_k \in \Xi$ , а также вещественных нулей  $\mathcal{R}(\zeta)$  при этом отображении. Измеримый по области  $\mathcal{M}$  угол в точке  $w_k = \mathcal{P}^+(\xi_k)$ ,  $k \neq 0$ , равен  $\pi\gamma_k := \pi(\alpha_k - n_k)$ , если  $\mathcal{R}(\xi_k) \neq 0$ , и  $\pi(\gamma_k + \rho)$ , если  $\mathcal{R}(\xi_k) = 0$ , где  $\rho$  — порядок нуля полинома  $\mathcal{R}$  в  $\xi_k$ . Угол в точке  $\tilde{w} := \mathcal{P}^+(\tilde{\xi})$ , где  $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}$  и  $\mathcal{R}(\tilde{\xi}) = 0$ , но  $\tilde{\xi} \notin \Xi$ , равен  $\pi(\tilde{\rho} + 1)$ , где  $\tilde{\rho}$  — порядок нуля  $\mathcal{R}$  в точке  $\tilde{\xi}$ . Таким образом, теорема 3.3 дает ясную геометрическую интерпретацию решению  $\mathcal{P}^+(\zeta)$  рассматриваемой задачи Римана — Гильберта.

## Г л а в а IV

# Приложение к задачам астрофизики

## §1. Эффект магнитного пересоединения и используемые предположения

**1.1. Рассматриваемые задачи.** Многие взрывообразные процессы, изучаемые в физике звезд, протекают в разреженной плазме, когда магнитные силы преобладают над всеми остальными (газодинамическими, гравитационными и др.), а высвобождение значительного количества энергии происходит в результате *эффекта магнитного пересоединения*, т.е. принципиального изменения конфигурации магнитного поля [67], [101], [116], [124], [144]. При изучение таких процессов основной математической задачей часто является эффективный расчет магнитного поля для той или иной плазменной конфигурации [101], [227].

В первой части настоящей главы (см. §2–§5) решены две задачи Римана — Гильберта в сложной многоугольной области, возникающие при моделировании магнитного пересоединения в короне Солнца. Именно это явление согласно современным представлениям приводит к большим солнечным вспышкам [101], [227]. Физический смысл искомых аналитических функций в указанных задачах — магнитное поле в окрестности токовой конфигурации, состоящей из токового слоя и присоединенных ударных волн. Рассматриваемые задачи решены в аналитическом виде на основе результатов, полученных в главах I–III, в том числе с использованием нового вида представлений искомых функций в виде интеграла Кристоффеля — Шварца,

см. теорему 3.3. Выполнена эффективная численная реализация построенных решений задач Римана — Гильберта, результаты которой представлены в §6.

Во второй части главы (см. §7) решена задача со свободной границей, возникающая при моделировании магнитного пересоединения в магнитосфере нейтронной звезды, вызванного воздействием на нее ударной волны, образованной взрывом Сверхновой звезды. Это астрофизическое явление лежит в основе современных гипотез о происхождении космических всплесков гаммаизлучения большой мощности [62], [69], [117], [143], [197], [213], [233], [248].

Рассматриваемая задача со свободной границей сведена к последовательному решению двух задач Римана — Гильберта, решения которых построены в аналитическом виде с использованием результатов глав I–III. Даны численная реализация, включающая нахождение (заранее неизвестной) границы магнитосферы и вычисление магнитного поля внутри нее.

В следующем п. 1.2 приведены физические предпосылки, позволяющие рассматривать приближение *сильного магнитного поля*, и описаны рассматриваемые в работе модели указанных выше физических явлений в короне Солнца и в магнитосферах нейтронных звезд.

**1.2. Приближение сильного магнитного поля.** Плазма в космических условиях часто имеет высокую проводимость, и в ней легко возникают электрические токи и индуцируются магнитные поля. Хорошо изучены такие поля лишь для ближайшей к нам звезды — Солнца. По величине они не превышают нескольких тысяч Гаусс, но солнечная атмосфера обладает тем замечательным свойством, что, начиная с некоторой высоты (приблизительно с основания хромосферы), энергия магнитного поля значительно превышает тепловую, кинетическую и гравитационную энергию плазмы.

Вместе с тем наиболее сильными магнитными полями обладают нейтронные звезды. Величина поля для таких звезд превышает  $10^{11} - 10^{12}$  Гс, а для магнетаров (намагниченных молодых нейтронных звезд) может достигать и  $10^{15}$  Гс. Столь сильное поле является ключевым фактором, определяющим быстрые течения плазмы вблизи нейтронных звезд, включая направленные

релятивистские выбросы, и отвечает за возникновение ряда ярких наблюдаемых эффектов, таких как ускорение частиц до гигантских энергий и всплески жесткого электромагнитного излучения [143], [162], [248].

Более точно *приближение сильного магнитного поля* удобно описывать в терминах плотности различных видов энергии плазмы, так что это приближение можно записать следующим образом:

$$\frac{B_0^2}{8\pi} \gg 2n_0 k_B T_0, \quad \frac{\rho_0 v_0^2}{2}, \quad \rho_0 g_0. \quad (1.1)$$

Здесь  $B_0$ ,  $n_0$ ,  $T_0$ ,  $\rho_0$ ,  $v_0$  — характерные значения напряженности магнитного поля, концентрации и температуры плазмы, ее плотности и скорости,  $g_0$  — ускорение силы тяжести на поверхности Солнца.

Условия (1.1) характерны как для активных областей на Солнце, в которых происходят вспышки, так и для плазмы в магнитосферах нейтронных звезд. При этом для описания поведения плазмы можно использовать уравнения идеальной магнитной гидродинамики (см., например, [81], [83], [227]). В безразмерном виде эти уравнения имеют следующий вид (см., например, [226], [227]):

$$\varepsilon_m \left\{ \frac{1}{\delta} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right\} = -\varepsilon_p \frac{\nabla p}{\rho} - \frac{1}{\rho} \mathbf{B} \times \text{rot} \mathbf{B} + \varepsilon_g \mathbf{g}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \delta \text{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad \text{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \delta \text{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial t} + \delta (\mathbf{v} \cdot \nabla) s = 0, \quad p = p(\rho, s). \quad (1.4)$$

Здесь величины

$$\delta = \frac{v\tau}{L}, \quad \varepsilon_m = \frac{v^2}{V_A^2}, \quad \varepsilon_p = \frac{p_0}{\rho_0 V_A^2}, \quad \varepsilon_g = \frac{gL}{V_A^2} \quad (1.5)$$

суть безразмерные параметры, характеризующие реальную физическую ситуацию, которую мы хотим описать в той или иной задаче;  $V_A = B_0 / \sqrt{4\pi\rho_0}$  — характерное значение альвеновской скорости.

Анализ безразмерных параметров (1.5) позволяет выбрать адекватное приближение из существующих в идеальной МГД. В интересующем нас случае

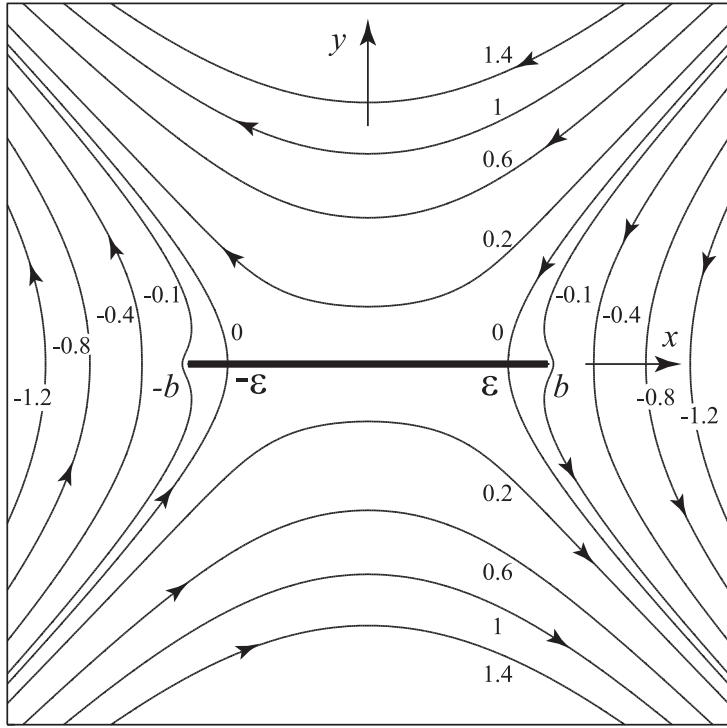


Рис. 4.1. Линии магнитного поля в окрестности токового слоя Сыроватского. Показан предельный случай: полный ток в слое равен нулю.

пересоединения в сильном магнитном поле, условия (1.1) означают, что магнитная сила превалирует над всеми остальными: градиентом газового давления, силой инерции и т.д. Действительно, условия (1.1) в терминах параметров (1.5) имеют вид

$$\varepsilon_m, \varepsilon_p, \varepsilon_g \ll 1. \quad (1.6)$$

Поэтому из уравнения движения плазмы (1.2) следует, что в нулевом порядке относительно малых параметров (1.6), поле является *бессиловым*, т.е. удовлетворяется уравнению  $\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B} = 0$ . Если, кроме того, в рассматриваемой области отсутствуют токи, то магнитное поле является просто потенциальным:  $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ . Именно этот случай изучается в настоящей работе.

**1.3. Обобщения моделей Сыроватского и Петчека магнитного пересоединения в короне Солнца.** В связи с проблемой солнечных вспышек в работах [70], [123] было показано, что в плазме высокой проводимости в окрестности нулевой линии магнитного поля формируется тонкий токовый слой. В условиях солнечной короны процесс пересоединения в таких слоях

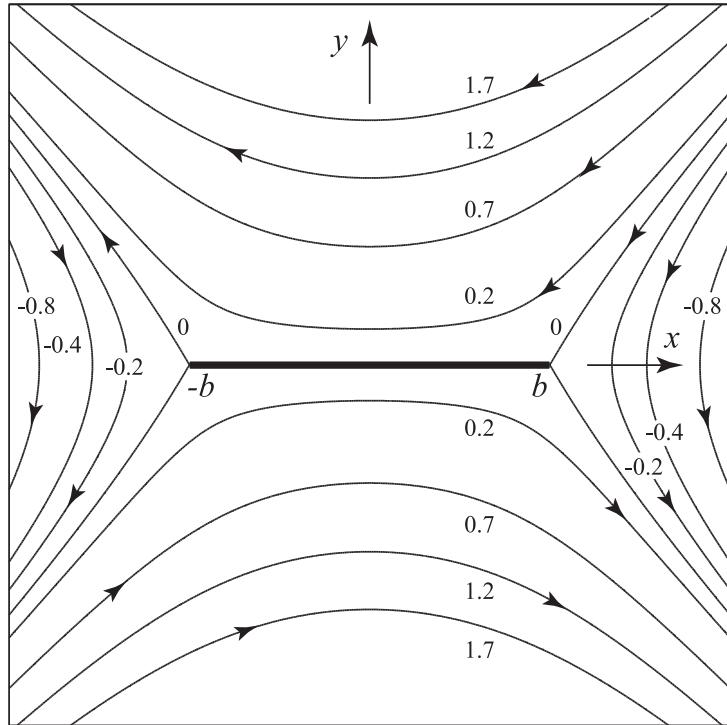


Рис. 4.2. Линии магнитного поля в окрестности токового слоя Сыроватского. Показан предельный случай: отсутствуют обратные токи.

идет очень медленно, что позволяет накопить необходимую для вспышки энергию в виде магнитного поля токового слоя, см., например, [226].

В приближении сильного магнитного поля Сыроватский [124] построил простую аналитическую модель токового слоя в виде поверхности разрыва, разделяющей поля противоположной направленности, как это показано на рис. 4.1, 4.2. Внутренняя структура этого разрыва подразумевает двумерный процесс магнитного пересоединения в нейтральном токовом слое ([123], [125]; см. также [206], [230]). Переход к токовому слою нулевой толщины в модели Сыроватского связан с тем, что в космической плазме высокой проводимости толщина слоя много меньше его ширины.

На рис. 4.1, 4.2 токовый слой Сыроватского изображен в виде разреза длины  $2b$  на комплексной плоскости  $z = x + iy$ . Магнитное поле  $B = B_x + iB_y$ , считающееся потенциальным и соленоидальным во внешности такого разреза, дается формулой

$$B_x - iB_y = -i\gamma \frac{z^2 - \varepsilon^2}{\sqrt{z^2 - b^2}}, \quad (1.7)$$

а связанный с ним соотношением  $B_x - iB_y = d\Psi/dz$  комплексный магнитный потенциал  $\Psi$  определяется равенством

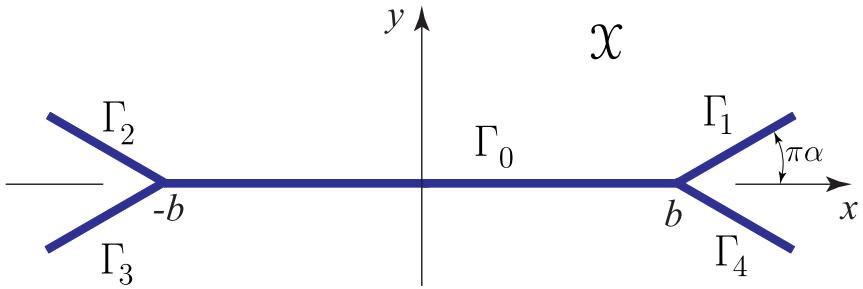
$$\Psi(z) = -\frac{i\gamma}{2} \left[ z \sqrt{z^2 - b^2} + (b^2 - 2\varepsilon^2) \ln(z + \sqrt{z^2 - b^2}) \right] + \text{const}; \quad (1.8)$$

здесь величина  $\varepsilon$  является расстоянием от начала координат до точки, где поле  $B$  обращается в нуль. На рис. 4.1, 4.2 представлены семейства магнитных силовых линий, т.е. семейства линий уровня функции  $A = \text{Im } \Psi$ . Рис. 4.1 соответствует значению параметра  $\varepsilon$  из интервала  $(0, 1)$ , а рис. 4.2 соответствует  $\varepsilon = b$ .

Другая классическая модель пересоединения называется течением Петчека [208] и обычно рассматривается в качестве альтернативы к токовому слою Сыроватского. Течение Петчека состоит из небольшой *диффузионной области* (заменяющей токовый слой Сыроватского и отличающейся от него по физическим свойствам) и четырех присоединенных к ней МГД ударных волн медленного типа.

Исходя из результатов численных экспериментов по пересоединению (в первую очередь, из расчетов [27], [152]) Б.В.Сомов и С.А.Марковский предложили двумерную модель [87], являющуюся обобщением работ Сыроватского [124] и Петчека [208]. Магнитное поле в такой модели считается потенциальным и соленоидальным во внешности токовой конфигурации, состоящей из бесконечно тонкого токового слоя, изображенного на рис. 4.3 в виде горизонтального разреза длины  $2b$ , и присоединенные к его концам наподобие усов под углом  $\pi\alpha$  четырех ударных волн. Им на рис. 4.3 соответствуют наклонные разрезы конечной длины  $r$ . В данной модели нормальная к ударной волне компонента магнитного поля предполагается равной постоянной величине  $\beta$ . Кроме того, на бесконечности предписывается условие линейного роста поля с коэффициентом пропорциональности  $\gamma$ . Тип ударной волны в отличие от [208] не задан, а должен быть найден в результате решения задачи для магнитного поля.

Описанная выше модель [87] сводится к задаче Римана – Гильберта во внешности системы разрезов, изображенных на рис. 4.3 отрезками прямых

Рис. 4.3. Область  $\mathcal{X}$  — внешность токовой конфигурации.

линий. Найденная в работе [42] асимптотика решения задачи устанавливает, что при малой длине "усов" поправка к полю без "усов", т.е. к решению Сыроватского [124] без особенностей, имеет порядок  $\sqrt{r/b}$ .

В настоящей работе дано полное решение рассматриваемой задачи Римана — Гильберта. Искомая функция построена в аналитическом виде с помощью результатов глав I–III. Она записана в виде суперпозиции конформного отображения четверти исходной области на полуплоскость и интеграла Кристоффеля — Шварца, представляющего решение соответствующей задачи Римана — Гильберта в полуплоскости. При построении решения были преодолены проблемы высокоточного вычисления конформного отображения, а именно: в явном виде обращен интеграл Кристоффеля — Шварца; дан вычислительный метод нахождения параметров этого интеграла, эффективный, в том числе и в ситуации кроудинга (т.е. "слипания" прообразов вершин, обычно вызывающего существенные трудности для стандартных подходов). Этот метод базируется на построенных асимптотиках неизвестных прообразов (по геометрическим параметрам области) и на формулах аналитического продолжения функции Аппеля, представленных в гл. II. Даны результаты численной реализации для построенного решения задачи Римана — Гильберта и проведен его детальный анализ, представляющий интерес с точки зрения рассматриваемого приложения.

Еще одно обобщение модели Сыроватского необходимо в связи с возможностью распада токового слоя на параллельные токовые ленты. Такой эффект может возникнуть в результате разрывной (тиринг) неустойчивости [172] или

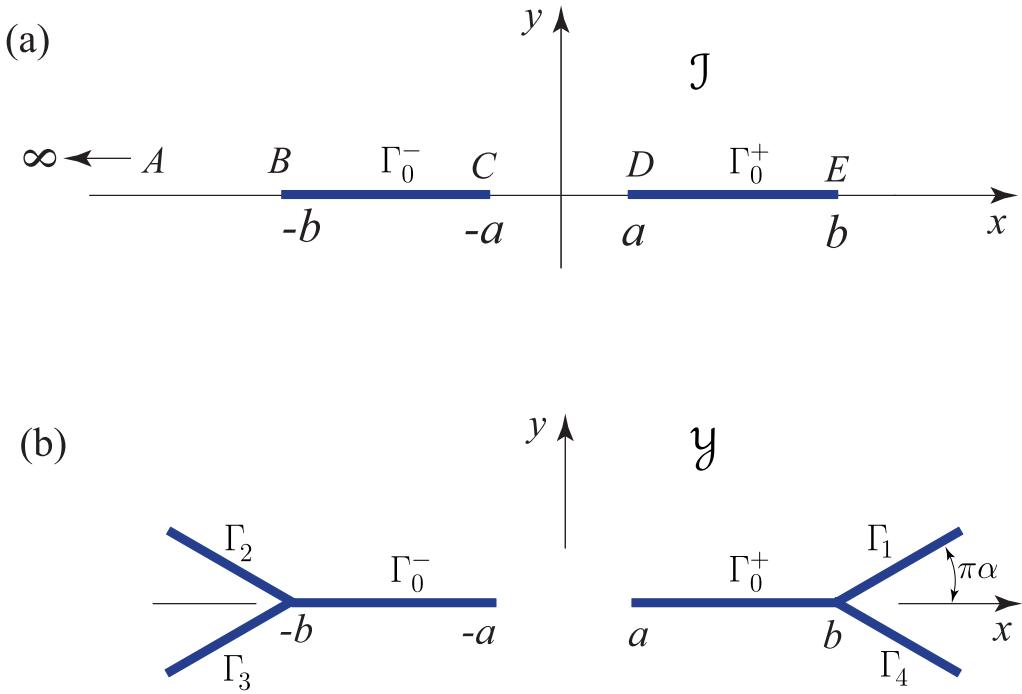


Рис. 4.4.

при появлении в слое области более высокого электрического сопротивления, например, аномального сопротивления ввиду возбуждения той или иной плазменной турбулентности [71]. В работе Сомова и Сыроватского [119] была предложена простая аналитическая модель распадающегося слоя, имеющего бесконечную ширину. На края разрыва в слое действует сила магнитных натяжений, пропорциональная величине разрыва и стремящаяся увеличить его. Внутри разрыва индуцируется электрическое поле, способное во время солнечной вспышки ускорять заряженные частицы до высоких энергий [227].

Для изучения структуры магнитного поля во внешности распадающегося токового слоя конечной ширины в [13], [14] предложены две модели, в которых токовый слой изображается в виде двух горизонтальных разрезов на плоскости, см. рис. 4.4а, б. Токовая конфигурация в первой модели не содержит ударных волн, см. рис. 4.4а, а во второй такая конфигурация включает четыре присоединенные ударные МГД волны, изображенные на рис. 4.4б в виде разрезов, наклоненных под углом  $\pi\alpha$ .

На разрезах, соответствующих токовому слою, магнитное поле не имеет нормальной к нему составляющей, а на разрезах, соответствующих ударным

волнам, как и в модели [87], нормальная компонента поля задана равной постоянной величине  $\beta$ . Магнитное поле имеет линейный рост на бесконечности и ограничено по величине в конечной части плоскости за исключением концевых точек токового слоя, свободных от ударных волн, где может иметь степенной рост порядка  $-1/2$ . Это условие роста, накладываемое на поле, как и в задаче о токовом слое Сыроватского, с физической точки зрения обусловлено тем, что толщина токового слоя формально принята равной нулю. В частном случае токового слоя Сыроватского без обратных токов, см. рис. 1b, это ограничение отсутствует, поскольку магнитное поле обращается в нуль на концах токового слоя.

В рассматриваемой модели предполагается такая ситуация, когда вне токового слоя поле обращается в нуль лишь в точке  $z = 0$ . Точка  $z = 0$  в центре области пересоединения имеет особый статус. Считается, что в процессе пересоединения плотность плазмы в окрестности этой точки может упасть (см. [227]) до столь низких значений, что пересоединение становится очень быстрым. Иными словами, не хватает плазмы, чтобы сформировать вторичный токовый слой, способный подавить распад токового слоя.

Постановки задач Римана — Гильберта для моделей с распадающимся токовым слоем, соответствующие приведенным физическим предпосылкам, даны в п. 2.3.

**1.4. Модель магнитосферы нейтронной звезды.** Нейтронные звезды обладают магнитным полем, напряженность которого достигает  $10^{12}$ – $10^{15}$  Гс. Столь сильное поле ответственно за возникновение ряда наблюдаемых ярких эффектов, таких как направленный релятивистский выброс плазмы, ускорение частиц до гигантских энергий, всплески жесткого электромагнитного излучения [143], [162], [248], [233]. Исследование магнитосфер нейтронных звезд представляет собой актуальную астрофизическую проблему.

Одним из важных вопросов в теории нейтронных звезд является исследование взаимодействия ударной волны, образованной взрывом сверхновой, с магнитным полем звезды, см. [62], [69], [117], [227], [143], [162], [197], [213],

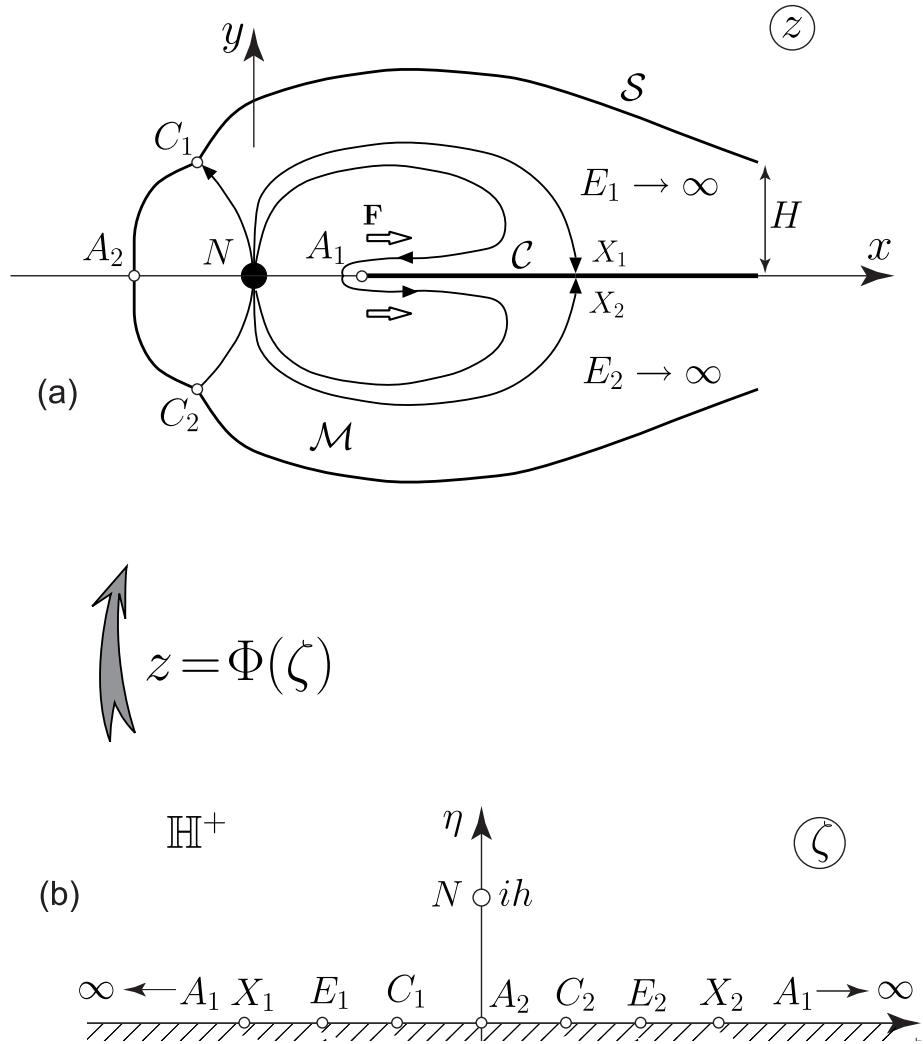


Рис. 4.5. (а) Схема магнитосферы. (б) Вспомогательная полуплоскость.

[233], [248]. Согласно современным представлениям о физике данного явления ударная волна от сверхновой осуществляет быстрое сжатие исходной невозмущенной магнитосферы в ее головной части и формирует вытянутый магнитосферный хвост с противоположной стороны. Граница магнитосферы определяется условием равенства газового давления  $p$  набегающего потока плазмы и давления  $\mathbf{B}^2/8\pi$  магнитного поля, заполняющего околозвездное пространство. В хвосте магнитосферы образуется пересоединяющий токовый слой. Магнитная сила  $\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}$  доминирует над градиентом газового давления, гравитационной и другими силами вплоть до значительных расстояний

от звезды до границы магнитосферы. В связи с этим для описания магнитогидродинамических процессов в магнитосфере хорошо применимо приближение сильного поля, см. п. 1.2.

В настоящей работе в рамках двумерной стационарной модели [117] построено аналитическое решение задачи о (заранее неизвестной) форме границы магнитосферы нейтронной звезды и дано явное представление для магнитного поля. В рассматриваемой модели магнитное поле звезды приближается точечным диполем, и предполагается, что в хвосте магнитосферы расположен плоский нейтральный токовый слой, см. рис. 4.5. Изучение подобных задач со свободной границей в связи с астрофизическими приложениями имеет давнюю историю и проводилось многими авторами, например, [3], [63], [64], [69], [98], [161], [239]. Однако решений в замкнутой аналитической форме получено не было.

## §2. Постановка задач Римана — Гильберта для моделей магнитного пересоединения в короне Солнца

**2.1. Общий подход к нахождению магнитного поля.** В изучаемых моделях пересоединения рассматривается плоское магнитное поле

$$\mathbf{B} = (B_x, B_y, 0),$$

являющееся потенциальным ( $\text{rot} \mathbf{B} = 0$ ) и соленодидальным ( $\text{div} \mathbf{B} = 0$ ) в области  $g$  — внешности токовой конфигурации  $\Gamma = \partial g$ , изображаемой в виде разреза или системы разрезов на комплексной плоскости  $z = x + iy$ . На рис. 4.3 областью  $g$  является  $\mathcal{X}$ , а на рис. 4.4a и 4.4b роль  $g$  выполняют (двусвязные) области  $\mathcal{J}$  и  $\mathcal{Y}$  соответственно.

В дальнейшем магнитное поле  $\mathbf{B}$  будем записывать в комплексном виде

$$B(z) = B_x(x, y) + iB_y(x, y). \quad (2.1)$$

В обсуждаемых моделях (см. п. 1.3 настоящей главы) на контуре  $\Gamma$  предполагается заданной нормальная компонента  $B_n$  магнитного поля. Такая компонента поля равна нулю на токовом слое, а на разрезах комплексной плоскости, соответствующих ударным волнам, равна заданной постоянной величине  $\beta$ . Нетрудно проверить, что величина  $B_n$  выражается через  $B$  по формуле

$$B_n = \operatorname{Re} [\nu(z) \bar{B}(z)], \quad z \in \Gamma, \quad (2.2)$$

где  $\nu(z)$  — комплексная единичная нормаль.

В бесконечности для функции  $B(z)$  ставится условие линейного роста, что отражает следующая асимптотика:

$$B(x, y) \sim i\gamma \bar{z}, \quad z \rightarrow \infty, \quad (2.3)$$

где  $\gamma$  — заданная вещественная постоянная, равная градиенту магнитного поля. Такое поведение поля соответствует картине линий, наблюдаемой вдали от "гиперболической нулевой точки", иначе говоря, картине "простейшего" поля, заданного формулой  $B_0(x, y) = i\gamma \bar{z}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

Для нахождения магнитного поля  $B$  удобно использовать комплексно сопряженную с ним функцию

$$\mathcal{F}(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \bar{B}(z), \quad z \in g, \quad (2.4)$$

поскольку из отмеченной выше потенциальности и соленоидальности поля вытекает, что  $\mathcal{F}(z) = \bar{B}(z)$  является аналитической функцией переменного  $z$  в области  $g$ .

Заменяя в равенстве (2.2) величину  $B$  на  $\bar{F}$  и учитывая сделанное замечание относительно значений нормальной к  $\Gamma$  компоненты магнитного поля, приходим к задаче Римана — Гильберта для аналитической функции  $\mathcal{F}(z)$ ,

$$\operatorname{Re} [\nu(z) \mathcal{F}(z)] = c(z), \quad z \in \Gamma, \quad (2.5)$$

где  $c(z)$  — известная функция. В точках токового слоя выполняется равенство  $c(z) = 0$ , т.е. краевое условие однородно, а если модель включает ударные

волны, то в точках  $\Gamma$ , изображающих ударные волны, выполняется равенство  $c(z) = \beta$ , где  $\beta$  — заданное постоянное значение компоненты  $B_n$  магнитного поля ( $\beta$  — параметр модели). Заметим также, что поскольку  $\Gamma$  состоит из прямолинейных звеньев, функция  $\nu(z)$  является кусочно-постоянной.

Из асимптотики (2.3) для поля  $B$  и определения (2.4) функции  $\mathcal{F}(z)$ , вытекает следующее условие линейного роста функции  $\mathcal{F}(z)$  на бесконечности:

$$\mathcal{F}(z) \sim -i\gamma z, \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

В изучаемых моделях предполагается, что поле  $B$  обладает симметрией, при которой его компонента  $B_x$  четна относительно оси  $y$  и нечетна относительно оси  $x$ , а компонента  $B_y$  обладает противоположными свойствами четности. Эти условия можно записать в виде следующих соотношений:

$$B(z) = \overline{B}(-\bar{z}), \quad B(z) = -\overline{B}(\bar{z}). \quad (2.7)$$

Нетрудно убедиться в том, что при отыскании магнитного поля в окрестности токового слоя без ударных волн учет условий симметрии (2.7) позволяет свести задачу (2.5) в области  $g$  к аналогичной задаче в канонической области — верхней полуплоскости  $\mathbb{H}^+ = \{\zeta : \operatorname{Im} \zeta > 0\}$ . Таким образом, решение задачи может быть выписано непосредственно через интегралы типа Коши, которые в рассматриваемых случае допускают вычисление через элементарные функции, см. далее п. 2.3.1°.

Задачу Римана — Гильберта, моделирующую магнитное поле в окрестности непрерывного токового слоя с присоединенными ударными волнами, будем называть задачей  $\mathfrak{C}$ , а ее решение обозначать  $\mathcal{F}_{\text{con}}(z)$ , используя первые буквы английского слова "continuous", чтобы подчеркнуть физический смысл задачи и ее решения. Аналогично, задачу Римана — Гильберта для магнитного поля в модели разрывного токового слоя с присоединенными ударными волнами, будем называть задачей  $\mathfrak{D}$ , а ее решение обозначать  $\mathcal{F}_{\text{dis}}(z)$ , используя первые буквы английского слова "discontinuous".

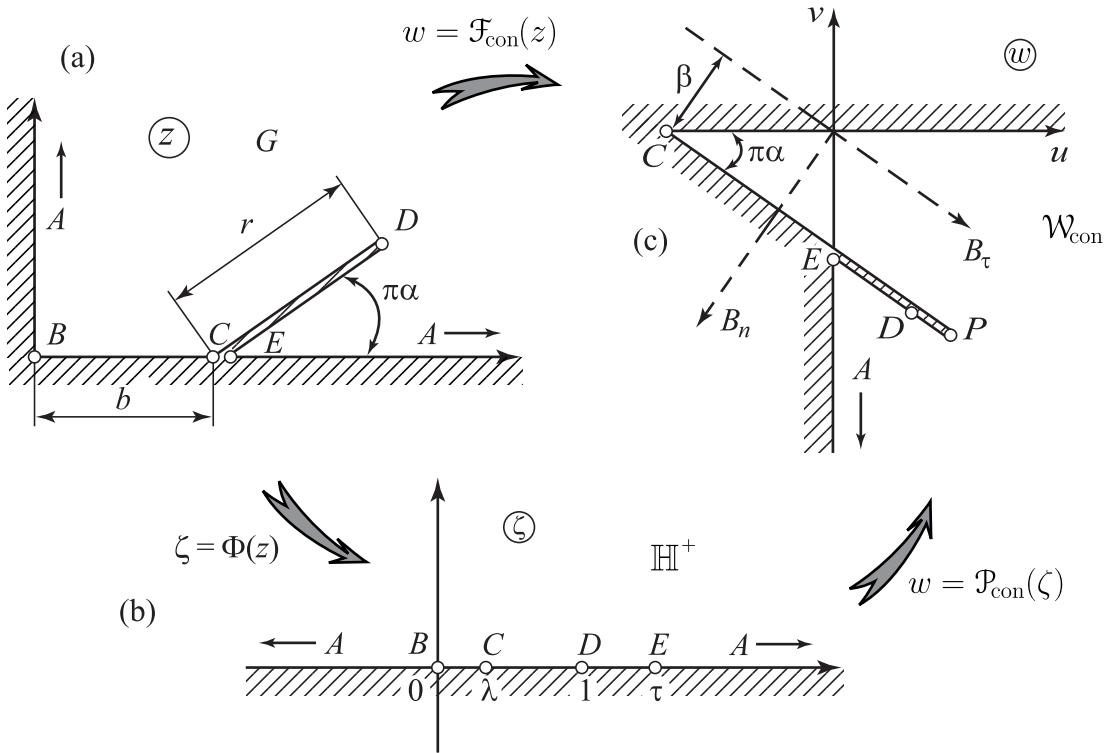


Рис. 4.6. Схема решения краевой задачи Римана — Гильберта  $\mathfrak{C}$ . (а) Исходная область  $G$  (четверть области пересоединения) в комплексной плоскости  $z$ . (б) Верхняя полуплоскость. (с) Пример области годографа магнитного поля  $\mathcal{W}_{\text{con}}$  для задачи  $\mathfrak{C}$  (с непрерывным токовым слоем).

При решении задач  $\mathfrak{C}$  и  $\mathfrak{D}$  учет симметрии поля позволяет перейти к рассмотрению аналогичных задач Римана — Гильберта в области  $G$  — четверти плоскости с разрезом, см. рис. 4.6а, 4.7а. Эта область является более простой, чем исходные  $\mathfrak{X}$  и  $\mathfrak{Y}$ , но согласно сказанному в п. 1.1 главы I, решение задачи в такой области не допускает явного аналитического решения. Поэтому для построения функций  $\mathcal{F}_{\text{con}}(z)$  и  $\mathcal{F}_{\text{dis}}(z)$  мы применяем конформное отображение  $\zeta = \Phi(z)$  области  $G$  на верхнюю полуплоскость  $\mathbb{H}^+$  и переходим к аналогичным задачам в  $\mathbb{H}^+$  для функций

$$\mathcal{P}_{\text{con}}^+(\zeta) = \mathcal{F}_{\text{con}} [\Phi^{-1}(\zeta)], \quad \mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\zeta) = \mathcal{F}_{\text{dis}} [\Phi^{-1}(\zeta)],$$

см. рис. 4.6а, 4.6б и рис. 4.7а, 4.7б.

Поскольку, как было отмечено выше, коэффициенты задачи Римана — Гильберта здесь кусочно-постоянны, то, используя результаты глав I–III, за-

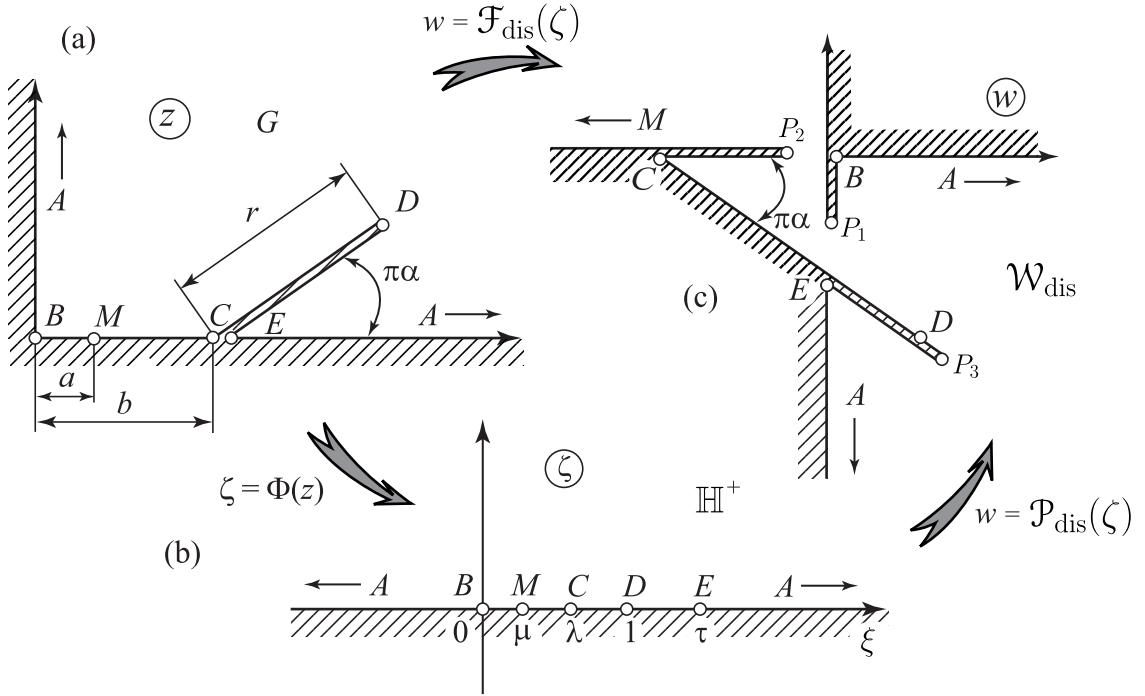


Рис. 4.7. Схема решения краевой задачи Римана — Гильберта  $\mathfrak{D}$ . (а) Исходная область  $G$  (четверть области пересоединения) в комплексной плоскости  $z$ . (б) Верхняя полуплоскость. (с) Пример области годографа  $\mathcal{W}_{\text{dis}}$  магнитного поля для задачи  $\mathfrak{D}$ , соответствующей распадающемуся токовому слою).

пишем требуемые функции  $\mathcal{P}_{\text{con}}^+(\zeta)$  и  $\mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\zeta)$  в виде обобщенного интеграла Кристоффеля — Шварца. Затем найдем функции  $\mathcal{F}_{\text{con}}$  и  $\mathcal{F}_{\text{dis}}$ , подставив  $\zeta = \Phi(z)$  соответственно в  $\mathcal{P}_{\text{con}}^+(\zeta)$  и  $\mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\zeta)$ , т.е. записывая искомые функции в виде суперпозиции

$$\mathcal{F}_{\text{con}}(z) = \mathcal{P}_{\text{con}}^+ \circ \Phi(z), \quad \mathcal{F}_{\text{dis}}(z) = \mathcal{P}_{\text{dis}}^+ \circ \Phi(z). \quad (2.8)$$

Отметим, что на рис. 4.6с и 4.7с изображены примеры *областей годографа*  $\mathcal{W}_{\text{con}}$  и  $\mathcal{W}_{\text{dis}}$ , т.е. образов исходной области  $G$  при отображениях  $w = \mathcal{F}_{\text{con}}(z)$  и  $w = \mathcal{F}_{\text{dis}}(z)$ .

Отображение  $\Phi(z)$  построено ниже в §3, а нахождению решений  $\mathcal{P}_{\text{con}}^+(\zeta)$  и  $\mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\zeta)$  задачи Римана — Гильберта в  $\mathbb{H}^+$  посвящены §4, §5.

Для изучения магнитного поля удобно воспользоваться векторным потенциалом  $\mathbf{A}$ , через который оно выражается по формуле  $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ . Поскольку рассматриваемое поле  $\mathbf{B}$  является плоским, то у вектора  $\mathbf{A}$  лишь третья

компонента отлична от нуля, т.е.  $\mathbf{A} = (0, 0, A)$ . Эта компонента восстанавливается через первообразную решения  $\mathcal{F} = \bar{B}$  задачи Римана — Гильберта по следующим формулам:

$$A(x, y) = \operatorname{Im} \Psi(z), \quad \Psi(z) = \int_0^z \mathcal{F}(t) dt; \quad (2.9)$$

функцию  $\Psi(z)$  будем называть комплексным потенциалом поля. Нетрудно убедиться в том, что магнитное поле  $\mathbf{B}$  направлено по касательной к линиям уровня функции  $A$ . Поэтому будем изображать его в виде семейства линий  $A(x, y) = \text{const}$ . На рис. 4.1, 4.2 значения этой константы указаны рядом с соответствующими линиями магнитного поля. При построении картины магнитного поля для задач  $\mathfrak{C}$  и  $\mathfrak{D}$  в формулу (2.9) следует вместо  $\mathcal{F}$  подставить соответственно функции  $\mathcal{F}_{\text{con}}$  и  $\mathcal{F}_{\text{dis}}$ .

Полный ток  $\mathcal{J}$  через токовую конфигурацию пропорционален циркуляции магнитного поля  $\mathbf{B}$  вдоль произвольного замкнутого контура, содержащего внутри себя эту конфигурацию. Учитывая равенство (2.4), выражющее поле через аналитическую функцию  $\mathcal{F}(z)$ , приходим к следующей формуле для полного тока:

$$\mathcal{J} = -2\pi \operatorname{Im} [\operatorname{res} \mathcal{F}(\infty)]; \quad (2.10)$$

здесь  $\operatorname{res} \mathcal{F}(\infty)$  означает вычет функции  $\mathcal{F}(z)$  на бесконечности, т.е. взятый со знаком “—“ коэффициент при  $z^{-1}$  в ее лорановском разложении.

Для вычисления тока в задачах  $\mathfrak{C}$  и  $\mathfrak{D}$  в формулу (2.10) вместо  $\mathcal{F}$  следует подставить соответственно функции  $\mathcal{F}_{\text{con}}$  и  $\mathcal{F}_{\text{dis}}$ .

## 2.2. Задача Римана — Гильберта, соответствующая фазе накопления энергии в области пересоединения (задача $\mathfrak{C}$ ).

2.2.1°. Постановка задачи в исходной области  $\mathcal{X}$ . Прежде чем сформулировать задачу Римана — Гильберта  $\mathfrak{C}$  в области  $\mathcal{X}$  (см. рис. 4.3, стр. 191), определим эту область более формально, чем это было сделано в п. 1.3.

Граница  $\Gamma = \partial\mathcal{X}$  представляет собой симметричную относительно осей  $x$  и  $y$  систему прямолинейных разрезов, точнее говоря, объединение

$$\Gamma = \bigcup_{j=0}^4 \Gamma_j,$$

горизонтального разреза  $\Gamma_0 := \{z : \operatorname{Re} z \in [-b, b], \operatorname{Im} z = 0\}$ , изображающего токовый слой, и наклонных разрезов

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \{z : z = b + t r e^{i\pi\alpha}, \quad t \in [0, 1]\}; \\ \Gamma_2 &= \{z : (-\bar{z}) \in \Gamma_1\}, \quad \Gamma_3 = \{z : (-z) \in \Gamma_1\}, \quad \Gamma_4 = \{z : \bar{z} \in \Gamma_1\},\end{aligned}\quad (2.11)$$

изображающих ударные волны. Таким образом,  $\mathcal{X} := \overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$  представляет собой односвязную бесконечную десятиугольную область.

Изложенная в п. 1.3 математическая модель магнитного поля в окрестности непрерывного токового слоя с присоединенными ударными волнами с учетом сказанного в п. 2.1 приводит к постановке задачи Римана — Гильберта (задачи  $\mathfrak{C}$  в области  $\mathcal{X}$ ), заключающейся в нахождении аналитической в  $\mathcal{X}$  и непрерывной в  $\overline{\mathcal{X}}$  функции  $\mathcal{F}_{\text{con}}$ , удовлетворяющей краевым условиям

$$\operatorname{Re} [\nu_j \mathcal{F}_{\text{con}}(z)] = c_j, \quad z \in \Gamma_j, \quad j = \overline{0, 4}, \quad (2.12)$$

и условию роста:

$$\mathcal{F}_{\text{con}}(z) = -i\gamma z + o(1), \quad z \rightarrow \infty, \quad (2.13)$$

где  $\nu_j, j = \overline{0, 4}$  — нормали к разрезам  $\Gamma_j$ , определяемые равенствами

$$\nu_0 = i, \quad \nu_1 = ie^{i\pi\alpha}, \quad \nu_2 = -ie^{-i\pi\alpha}, \quad \nu_3 = -ie^{i\pi\alpha}, \quad \nu_4 = ie^{-i\pi\alpha}. \quad (2.14)$$

а  $c_j$  в правой части (2.12) даются следующими равенствами:

$$c_0 = 0, \quad c_j = \beta, \quad j = \overline{1, 4}; \quad (2.15)$$

здесь  $\beta$  и  $\gamma$  — заданные числа.

Как было сказано на стр. 197, обозначение  $\mathfrak{C}$  для задачи (2.12)–(2.15) и обозначение  $\mathcal{F}_{\text{con}}$  для искомой функции выбраны для того, чтобы подчеркнуть их физический смысл. Напомним, что магнитное поле связано с решением этой задачи соотношением  $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{F}}_{\text{con}}$ .

Из постановки задачи  $\mathfrak{C}$  следует, что  $\mathcal{F}_{\text{con}}(z)$  можно записать в виде суммы

$$\mathcal{F}_{\text{con}}(z) = \beta \mathcal{F}_\beta(z) + \gamma \mathcal{F}_\gamma(z), \quad (2.16)$$

где первое слагаемое есть решение той же задачи при  $\beta = 1, \gamma = 0$ , а второе — при  $\beta = 0, \gamma = 1$ . Таким образом,  $\mathcal{F}_\beta(z)$  представляет собой регулярное (исчезающее) на бесконечности решение задачи (2.12), а  $\mathcal{F}_\gamma(z)$  — решение задачи (2.12)–(2.14), где  $c_j = 0, j = \overline{0, 4}$ .

Очевидно также, что зависимость решения  $\mathcal{F}_{\text{con}}(\beta, \gamma; z)$  от параметров  $\beta$  и  $\gamma$  может быть факторизована в следующем виде:

$$\mathcal{F}_{\text{con}}(\beta, \gamma; z) = \gamma \mathcal{F}_{\text{con}}(\beta/\gamma, 1; z). \quad (2.17)$$

2.2.2<sup>o</sup>. Сведение к области  $G$  — четверти  $\mathcal{X}$ . Нетрудно увидеть, что поставленная задача (2.12)–(2.15) и сама область  $\mathcal{X}$  обладает симметрией относительно осей  $x$  и  $y$  в смысле тождеств

$$\mathcal{F}_{\text{con}}(\bar{z}) = -\bar{\mathcal{F}}_{\text{con}}(z), \quad \mathcal{F}_{\text{con}}(-\bar{z}) = \bar{\mathcal{F}}_{\text{con}}(z); \quad (2.18)$$

поэтому достаточно перейти к рассмотрению соответствующей задачи в области  $G$ , получаемой пересечением  $\mathcal{X}$  с первым квадрантом

$$\mathcal{Q}_I = \{ z : \text{Im } z > 0, \text{Re } z > 0 \},$$

т.е. область  $G = \mathcal{X} \cap \mathcal{Q}_I$  или

$$G = \mathcal{Q}_I \setminus \Gamma_1, \quad (2.19)$$

и определяется тремя геометрическими параметрами  $b, r, \alpha$ .

Используя соотношения симметрии (2.18), сводим исходную задачу (2.12)–(2.15) к задаче Римана — Гильберта в области  $G$ : требуется найти аналитическую в  $G$  и непрерывную в  $\overline{G} \setminus (\{\infty\})$  функцию  $\mathcal{F}_{\text{con}}$ , удовлетворяющую краевому условию

$$\text{Re} [h(z) \mathcal{F}_{\text{con}}(z)] = c(z), \quad z \in \partial G, \quad (2.20)$$

в котором коэффициент  $h(z)$  и правая часть  $c(z)$  определяются по формулам

$$h(z) = \begin{cases} i & \text{на } (ABC), \\ i e^{i\pi\alpha} & \text{на } (CDE), \\ 1 & \text{на } (EA), \end{cases} \quad c(z) = \begin{cases} 0 & \text{на } (ABC) \cup (EA), \\ \beta & \text{на } (CDE), \end{cases} \quad (2.21)$$

и отвечающую следующему условию роста в бесконечно удаленной точке:

$$\mathcal{F}_{\text{con}}(z) = -i\gamma z + o(1), \quad z \rightarrow \infty; \quad (2.22)$$

отметим, что точка  $z = \infty$  теперь является не внутренней, а граничной точкой  $z = A$ .

Задачу Римана — Гильберта (2.20)–(2.22) будем называть *задачей  $\mathfrak{C}$  в области  $G$* , а ее решение обозначать  $\mathcal{F}_{\text{con}}$  по аналогии с принятыми обозначениями для задачи  $\mathfrak{C}$  в области  $\mathcal{X}$  и ее решения.

После нахождения решения  $\mathcal{F}_{\text{con}}$  задачи (2.20)–(2.22), продолжаем его с помощью соотношений симметрии (2.18) во всю область  $\mathcal{X}$  и, таким образом, находим решение исходной задачи (2.12)–(2.15). Как отмечалось в п. 2.1, численные результаты будут представлены во всей области  $\mathcal{X}$  и в наиболее репрезентативной с физической точки зрения форме, т.е. в виде семейства линий уровня  $A(x, y) = \text{const}$  магнитного потенциала, определяемого из (2.9).

### 2.3. Задача Римана — Гильберта, соответствующая фазе распада токового слоя в области пересоединения (задача $\mathfrak{D}$ ).

2.3.1°. Токовый слой без ударных волн. Распадающийся токовый слой изображается на комплексной плоскости  $z$  в виде двух прямолинейных разрезов  $(BC)$  и  $(DE)$  равной длины, расположенных на вещественной оси симметрично относительно начала координат:

$$(BC) = \{-b < x < -a, y = 0\}, \quad (DE) = \{a < x < b, y = 0\}, \quad (2.23)$$

здесь  $b$  и  $a$  — вещественные положительные числа ( $b > a$ ), являющиеся параметрами задачи. Область  $\mathcal{I}$ , где рассматривается магнитное поле (2.1) и связанная с ним аналитическая функция (2.4), представляет собой внешность разрезов  $(BC)$  и  $(DE)$ , см. рис. 4.4а.

В данной модели, как и в модели Сыроватского, предполагается, что поле  $\mathbf{B}$  обладает симметрией (2.7), из которой следует условие

$$B_x(x, 0) = 0 \quad \text{на} \quad (AB), (CD) \text{ и } (EA). \quad (2.24)$$

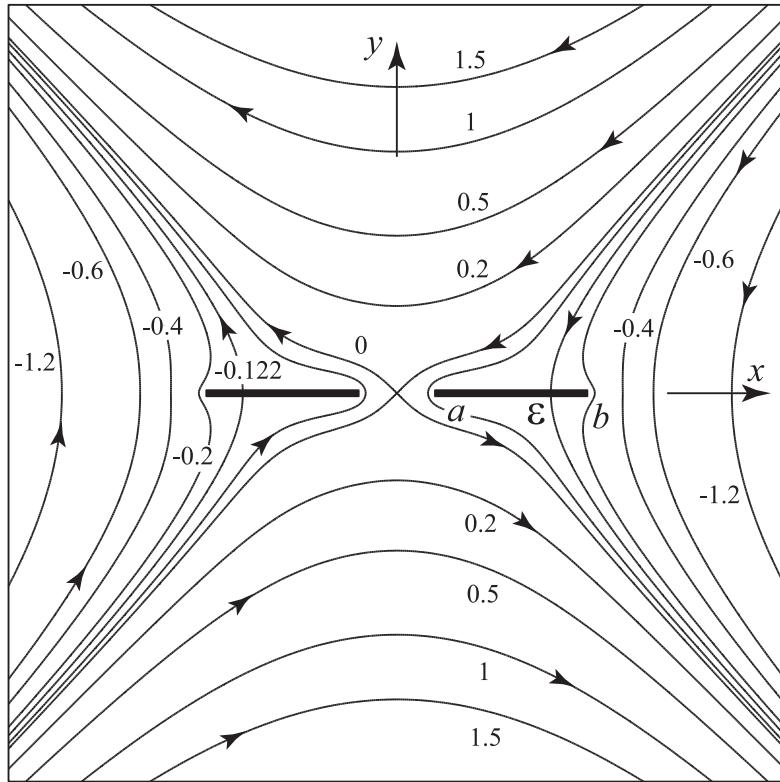


Рис. 4.8. Картина линий магнитного поля в окрестности токового слоя с разрывом, но без присоединенных ударных волн; полный ток в слое равен нулю.

Нормальная к токовому слою компонента магнитного поля совпадает с  $B_y$ , поэтому во внутренних точках разрезов  $(BC)$  и  $(DE)$  оно направлено параллельно оси  $x$ , т.е.

$$B_y(x, 0) = 0 \quad \text{на} \quad (BC) \text{ и } (DE). \quad (2.25)$$

Предполагается, что при стремлении  $z$  к концам этих разрезов поле может быть неограниченным (как и в модели токового слоя Сыроватского):

$$|\mathbf{B}(x, y)| < C |z \pm b|^{-1/2}, \quad z \rightarrow \mp b; \quad |\mathbf{B}(x, y)| < C |z \pm a|^{-1/2}, \quad z \rightarrow \mp \varepsilon, \quad (2.26)$$

где  $C > 0$  некоторая постоянная. На бесконечности по-прежнему ставится условие (2.3) линейного роста поля  $\mathbf{B}$ .

Описанная выше модель сводится к задаче Римана — Гильберта в верхней полуплоскости относительно аналитической функции  $\mathcal{F}(z)$ , связанной с магнитным полем  $\mathbf{B}$  соотношениями (2.4). При этом краевое условие на ве-

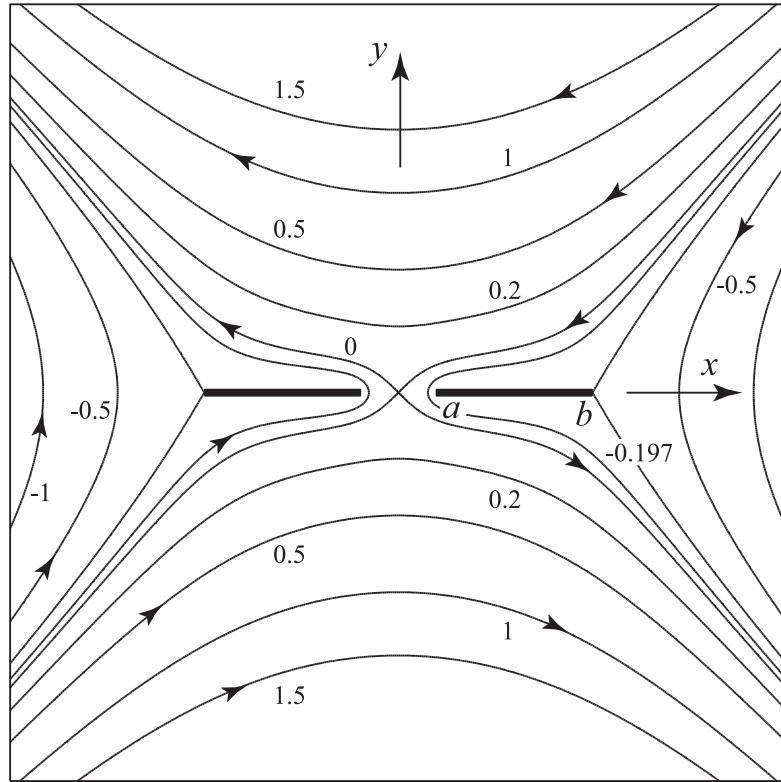


Рис. 4.9. Картина линий магнитного поля в окрестности токового слоя с разрывом, но без присоединенных ударных волн; обратные токи отсутствуют.

щественной оси имеет вид  $\operatorname{Re} [ h(x) \mathcal{F}(x) ] = 0$ , где коэффициент  $h(z)$  определяется по формуле

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in (AB) \cup (CD) \cup (EA), \\ -i, & x \in (BC) \cup (DE). \end{cases}$$

Функция  $\mathcal{F}(z)$  подчинена условию линейного роста (2.6) на бесконечности и вытекающим из (2.26) условиям роста в концевых точках отрезков  $(BC)$  и  $(DE)$ :

$$|\mathcal{F}(z)| < C |z \pm b|^{-1/2}, \quad z \rightarrow \mp b; \quad |\mathcal{F}(z)| < C |z \pm a|^{-1/2}, \quad z \rightarrow \mp a.$$

Используя результаты главы I, находим искомое решение  $\mathcal{F}(z)$  в виде

$$\mathcal{F}(z) = -i \gamma \frac{z (z^2 - \varepsilon^2)}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}}, \quad (2.27)$$

где число  $\varepsilon$  — свободный вещественный параметр, возникающий при формальном решении задачи; с физической точки зрения он определяет положение нулей магнитного поля.

Потенциал  $A(x, y)$  магнитного поля выражается через полученное решение  $\mathcal{F}$  задачи Римана — Гильберта по формулам (2.9). Подставляя выражение (2.27) для  $\mathcal{F}$  в интеграл (2.9), находим комплексный потенциал  $\Psi(z)$  в полу-плоскости  $\mathbb{H}^+$

$$\begin{aligned} \Psi(z) = & -i\gamma \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)} + \right. \\ & \left. + L \ln \left[ z^2 - \frac{(b+a)^2}{2} + \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)} \right] \right\} + \Psi_0, \\ \Psi_0 = & -\pi\gamma L - i\gamma \left[ \frac{ab}{2} - L \ln \frac{(b+a)^2}{2} \right], \quad L = (a^2 + b^2 - 2\varepsilon^2)/4; \end{aligned} \quad (2.28)$$

для продолжения этой функции в нижнюю полуплоскость необходимо воспользоваться равенствами (2.18). Полный ток в рассматриваемой модели дается вытекающей из (2.10) и (2.27) формулой:

$$\mathcal{J} = \pi\gamma (2\varepsilon^2 - a^2 - b^2). \quad (2.29)$$

Отсюда получаем, что при  $\varepsilon > \varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0 = \sqrt{(a^2 + b^2)/2}$ , полный ток положителен, т.е. прямой ток превалирует над обратным, а при  $\varepsilon = \varepsilon_0$  выполняется равенство  $\mathcal{J} = 0$ .

Параметрами рассматриваемой модели, от которых зависит поле  $B$  и его комплексный потенциал  $\Psi$ , являются градиент  $\gamma$  магнитного поля на бесконечности, величина  $\varepsilon$ , определяющая положения нулей поля, а также геометрические параметры токового слоя  $a$  и  $b$ . Заметим, что при  $a \rightarrow 0$  выражение (2.27) для сопряженного поля  $\mathcal{F}$  переходит в выражение (1.7), возникающее в модели токового слоя Сыроватского, а выражение (2.29) для тока  $\mathcal{J}$  — в соответствующее выражение (2.10). Выражения (1.8) и (2.28) для потенциалов поля в модели Сыроватского и в рассматриваемой модели совпадают при  $a = 0$  с точностью до постоянного слагаемого.

2.3.2°. Задача Римана — Гильберта для распадающегося токового слоя с присоединенными ударными волнами (задача  $\mathfrak{D}$ ). Переходим к формулировке задачи Римана — Гильберта в области  $\mathcal{Y}$  (см. рис. 4.3, стр. 191), изображающей токовую конфигурацию, которая включает распадающийся токовый

слой (два горизонтальных разреза) и присоединенные ударные волны (четыре наклонных разреза).

Прежде всего, отметим, что граница  $\Gamma = \partial \mathcal{Y}$  представляет собой объединение двух  $Y$ –образных компонент, заданных соотношениями

$$Y^+ := \Gamma_0^+ \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_4, \quad Y^- := \{z : -\bar{z} \in Y^+\}; \quad (2.30)$$

здесь компонента  $Y^+$  состоит из горизонтального разреза

$$\Gamma_0^+ = \{z : \operatorname{Re} z \in [a, b], \operatorname{Im} z = 0\}$$

и наклонных разрезов  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_4$ , определенных в (2.11), а компонента  $Y^-$  получается симметричным отражением  $Y^+$  относительно оси  $y$ . Наконец, сама (двусвязная) область  $\mathcal{Y} := \overline{\mathbb{C}} \setminus (Y^+ \cup Y^-)$  является внешностью разрезов (2.30).

Математическая модель, изложенная в п. 1.3, с учетом сказанного в п. 2.1 приводит к постановке задачи Римана – Гильберта (задачи  $\mathfrak{D}$  в области  $\mathcal{Y}$ ), заключающейся в нахождении аналитической в  $\mathcal{Y}$  и непрерывной в  $\overline{\mathcal{Y}} \setminus \{\infty, -a, a\}$  функции  $\mathcal{F}_{\text{dis}}$ , удовлетворяющей краевым условиям

$$\operatorname{Re} [\nu_j \mathcal{F}_{\text{dis}}(z)] = c_j, \quad z \in \Gamma_j, \quad j = \overline{0, 4}, \quad (2.31)$$

где  $\Gamma_0 = \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-$ , а величины  $\nu_j$ ,  $j = \overline{0, 4}$ , и правые части  $c_j$ ,  $j = \overline{0, 4}$  определены соответственно равенствами (2.14) и (2.15). Предполагается также, что функция  $\mathcal{F}$  отвечает следующим условиям роста в точках  $z \in \{\infty, -a, +a\}$ :

$$\mathcal{F}_{\text{dis}}(z) = -i\gamma z + o(1), \quad z \rightarrow \infty; \quad \mathcal{F}_{\text{dis}}(z) = \mathcal{O}[(z \pm a)^{-1/2}], \quad z \rightarrow \pm a; \quad (2.32)$$

фигурирующие в постановке задачи величины  $\beta$  (см. формулу (2.15)) и  $\gamma$  суть вещественные постоянные, являются параметрами модели.

Как было сказано на стр. 197 обозначение  $\mathfrak{D}$  (от английского "discontinuous") для задачи (2.31), (2.32) и обозначение  $\mathcal{F}_{\text{dis}}$  для искомой функции выбраны для того, чтобы подчеркнуть их физический смысл. Напомним, что магнитное поле связано с решением этой задачи соотношением  $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{F}}_{\text{dis}}$ .

2.3.3<sup>o</sup>. Сведение к задаче в четверти исходной области. Дополняя поставленную задачу условиями симметрии

$$\mathcal{F}_{\text{dis}}(\bar{z}) = -\bar{\mathcal{F}}_{\text{dis}}(z), \quad \mathcal{F}_{\text{dis}}(-\bar{z}) = \bar{\mathcal{F}}_{\text{dis}}(z), \quad (2.33)$$

сводим ее к задаче Римана — Гильберта в области  $G$ , определенной равенством (2.19), см. также рис. 4.6а, стр. 198. Формулировка задачи следующая: требуется найти аналитическую в  $G$  и непрерывную в  $\bar{G} \setminus (\{\infty, a\})$  функцию  $\mathcal{F}_{\text{dis}}$ , удовлетворяющую краевому условию

$$\operatorname{Re} [h(z)\mathcal{F}_{\text{dis}}(z)] = c(z), \quad z \in \partial G, \quad (2.34)$$

в котором коэффициенты  $h(z)$  и  $c(z)$  определяются по формулам

$$h(z) = \begin{cases} i & \text{на } (A, B) \cup (B', C), \\ 1 & \text{на } (B, B') \cup (E, A), \\ ie^{i\pi\alpha} & \text{на } (C, D, E), \end{cases} \quad (2.35)$$

$$c(z) = \begin{cases} 0 & \text{на } (A, B, B', C) \cup (E, A), \\ \beta & \text{на } (A, B, C), \end{cases}$$

и отвечающую следующим условиям роста в точках  $z_0$  и  $z_2$

$$\mathcal{F}_{\text{dis}}(z) = -i\gamma z + o(1), \quad z \rightarrow \infty; \quad \mathcal{F}_{\text{dis}}(z) = \mathcal{O}[(z-a)^{-1/2}], \quad z \rightarrow a; \quad (2.36)$$

фигурирующие здесь величины  $\beta$  и  $\gamma$  — вещественные постоянные, являющиеся параметрами модели. Геометрические величины  $b$ ,  $r$ ,  $a$  и  $\alpha$  также являются параметрами модели.

Задачу Римана — Гильберта (2.34)–(2.36) будем называть *задачей  $\mathfrak{D}$  в области  $G$* , а ее решение обозначать  $\mathcal{F}_{\text{dis}}$  по аналогии с задачей  $\mathfrak{D}$  в области  $\mathcal{Y}$ .

После нахождения решения  $\mathcal{F}_{\text{dis}}$  задачи (2.34)–(2.36), продолжаем его с помощью соотношений симметрии (2.33) во всю область  $\mathcal{Y}$  и, таким образом, находим решение исходной задачи (2.31), (2.32). Как уже отмечалось в п. 2.1, численные результаты будут представлены в полной области  $\mathcal{Y}$  в наиболее репрезентативной с физической точки зрения форме, т.е. в виде семейства линий уровня  $A(x, y) = \text{const}$ , где магнитный потенциал  $A(x, y)$  дается (2.9).

### §3. Вспомогательное конформное отображение области $G$ — четверти области пересоединения

**3.1. Представление обратного отображения  $z = \Phi^{-1}(\zeta)$  в виде интеграла Кристоффеля — Шварца.** Область  $G$ , изображенная на рис. 4.6а, стр. 198, является односвязным пятиугольником с вершинами  $A = \infty$ ,  $B = 0$ ,  $C = b$  (слева от разреза  $\Gamma_1$ ),  $D = b + re^{i\pi\alpha}$ ,  $E = b$  (справа от разреза  $\Gamma_1$ ). Отметим, что измеряемые по области  $G$  углы в этих точках равны  $\pi\alpha_j$ ,  $j \in \{A, B, C, D, E\}$ , где  $\alpha_A = -1/2$ ,  $\alpha_B = 1/2$ ,  $\alpha_C = 1 - \alpha$ ,  $\alpha_D = 2$ ,  $\alpha_E = \alpha$ .

Будем рассматривать отображение  $z = \Phi^{-1}(\zeta)$ , подчиненное следующим условиям, которые его однозначно определяют:

$$\Phi^{-1}(\infty) = \infty, \quad \Phi^{-1}(0) = 0, \quad \Phi^{-1}(1) = b + re^{i\pi\alpha}, \quad (3.1)$$

т.е. положим, что вершинам  $A$ ,  $B$  и  $D$  многоугольника  $G$  соответствуют, точки  $\zeta = \infty$ ,  $\zeta = 0$  и  $\zeta = 1$  на границе полуплоскости (ср. рис. 4.6а и 4.6б). Обозначая через  $\lambda$  и  $\tau$  неизвестные прообразы вершин  $C$  и  $E$ , записываем  $z = \Phi^{-1}(\zeta)$  в виде интеграла Кристоффеля — Шварца [78], [82], [88]:

$$\Phi^{-1}(\zeta) = \mathcal{K} \int_0^\zeta t^{-1/2} (t - \lambda)^{-\alpha} (t - 1) (t - \tau)^{\alpha-1} dt, \quad (3.2)$$

где предынтегральный множитель  $\mathcal{K}$ , в чем нетрудно убедиться, вещественный и положительный ( $\mathcal{K} > 0$ ).

Для нахождения неизвестных параметров  $\lambda$ ,  $\tau$  и  $\mathcal{K}$  этого интеграла известным способом (см., например, [78]) формируем систему нелинейных трансцендентных уравнений, приравнивая три заданных расстояния между вершинами многоугольной границы  $\partial G$  соответствующим их выражениям, вычисленным с помощью формулы (3.2). Например, интегрируя в (3.2) по отрезку  $[\lambda, \tau]$  должно дать 0, поскольку расстояние между вершинами  $C$  и  $E$  равно нулю (см. 4.6а, 4.6б), что приводит к первому уравнению:

$$\mathcal{K} \int_\lambda^\tau t^{-1/2} (t - \lambda)^{-\alpha} (1 - t) (\tau - t)^{\alpha-1} dt = 0.$$

После интегрирования в (3.2) по отрезкам  $[0, \lambda]$  и  $[\lambda, 1]$  аналогично записываем еще два уравнения и, таким образом, приходим к следующей системе уравнений:

$$\mathcal{K} I_1(\lambda, \tau) = b, \quad \mathcal{K} I_2(\lambda, \tau) = r, \quad \mathcal{K} I_3(\lambda, \tau) = 0, \quad (3.3)$$

где через  $I_j(\lambda, \tau)$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , обозначены следующие интегралы:

$$I_1(\lambda, \tau) = \int_0^\lambda t^{-1/2} (\lambda - t)^{-\alpha} (1 - t) (\tau - t)^{\alpha-1} dt, \quad (3.4)$$

$$I_2(\lambda, \tau) = \int_\lambda^1 t^{-1/2} (t - \lambda)^{-\alpha} (1 - t) (\tau - t)^{\alpha-1} dt, \quad (3.5)$$

$$I_3(\lambda, \tau) = \int_\lambda^\tau t^{-1/2} (t - \lambda)^{-\alpha} (t - 1) (\tau - t)^{\alpha-1} dt. \quad (3.6)$$

Выполняя в этих интегралах замены переменного так, чтобы интегрирование велось по отрезку  $[0, 1]$ , и используя представление (5.2) для функции Аппеля  $F_1$ , выражаем их через эту функцию по формулам

$$I_1(\lambda, \tau) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1 - \alpha)}{\Gamma(3/2 - \alpha)} \lambda^{1/2 - \alpha} \tau^{\alpha-1} F_1\left(-1, 1 - \alpha; \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \alpha; \lambda, \frac{\lambda}{\tau}\right), \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} I_2(\lambda, \tau) &= [(1 - \alpha)(2 - \alpha)]^{-1} \lambda^{-1/2} (1 - \lambda)^{2 - \alpha} (\tau - \lambda)^{\alpha-1} \times \\ &\quad \times F_1\left(\frac{1}{2}, 1 - \alpha; 1 - \alpha, 3 - \alpha; \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \frac{1 - \lambda}{\tau - \lambda}\right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$I_3(\lambda, \tau) = -\frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \lambda^{-1/2} (1 - \lambda) F_1\left(\frac{1}{2}, -1; 1 - \alpha, 1; -\frac{\tau - \lambda}{\lambda}, \frac{\tau - \lambda}{1 - \lambda}\right). \quad (3.9)$$

Разделив второе уравнение из (3.3) на первое, исключим  $\mathcal{K}$  и сведем, таким образом, проблему нахождения неизвестных параметров в формуле Кристоффеля — Шварца (3.2) к системе двух уравнений только для прообразов  $\lambda$  и  $\tau$ :

$$I_{2,1}(\lambda, \tau) = \rho, \quad I_3(\lambda, \tau) = 0, \quad (3.10)$$

где через  $\rho$  обозначена относительная длина "уса" (т.е. разреза  $CDE$ , см. рис. 4.6а), а через  $I_{2,1}$  — отношение интегралов:

$$\rho = \frac{r}{b}, \quad I_{2,1}(\lambda, \tau) = \frac{I_2(\lambda, \tau)}{I_1(\lambda, \tau)}. \quad (3.11)$$

В формулах (3.10), (3.11) предполагается, что интегралы  $I_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , вычисляются из (3.7)–(3.9).

После решения системы (3.10) предынтегральный множитель  $\mathcal{K}$  — находится из первого уравнения (3.3) по формуле

$$\mathcal{K} = \frac{b}{I_1(\lambda, \tau)}. \quad (3.12)$$

Заметим еще, что, как следует из системы уравнений (3.10) и вида входящих в нее интегралов (3.4)–(3.6), искомые прообразы зависят только от двух геометрических параметров задачи: от  $\alpha$  и  $\rho$ , т.е.  $\lambda = \lambda(\alpha, \rho)$  и  $\tau = \tau(\alpha, \rho)$ .

**3.2. Вычисление параметров  $\lambda$ ,  $\tau$  и  $\mathcal{K}$  интеграла Кристоффеля — Шварца.** Системы нелинейных уравнений, подобные рассмотренной в предыдущем п. 3.1 системе относительно  $\lambda$ ,  $\tau$  и  $\mathcal{K}$ , известны и для произвольного многоугольника [72], [78], [176], но аналитическое решение они допускают лишь в немногих частных случаях [37], [38], [41], [78]. Поэтому для решения таких систем необходимо использовать численные алгоритмы [32], [78], основанные на сочетании метода Ньютона [5], [72], [234], [249] и, возможно, метода продолжения по параметру [72], [132]. Главные трудности, возникающие при этом, связаны с построением качественного начального приближения для неизвестных прообразов и разработкой алгоритмов высокоточного вычисления интегралов, аналогичных введенным выше  $I_j$ , фигурирующих системах такого типа.

Как было подчеркнуто в [176], [193], [236], [249], эти трудности значительно возрастают в том случае, когда для рассматриваемого отображения возникает эффект кроудинга. Этот эффект заключается в резко неравномерном расположении прообразов вершин на вещественной оси. Наименование "кроудинг", происходящее от английского *to crowd* (толпиться), было предложено в [200]. Изучению этого эффекта и поиску способов преодоления порождаемых им трудностей привлекает большое внимание исследователей [164], [176], [181], [193], [200], [235], [236], [249].

В работе [16] установлено, что элементы системы уравнений для неизвестных параметров интеграла Кристоффеля — Шварца могут быть приведены к виду интегралов (2.1), т.е. записаны через функцию Лауричеллы  $F_D^{(N)}$ . Таким образом, в [16] показано, что высокоточное вычисление функции  $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$  во всем диапазоне ее переменных является одним из ключевых аспектов в решении известной трудной *проблемы кроудинга* [176], [237] параметров интеграла Кристоффеля — Шварца. Если  $\mathbf{z} \in \mathbb{U}^N$ , то для эффективного вычисления (2.1) может быть применен ряд (1.2), который в  $\mathbb{U}^N$  сходится экспоненциально. Для вычисления функции  $F_D^{(N)}$  вне  $\mathbb{U}^N$  необходимо использовать формулы ее аналитического продолжения, установленные в главе II диссертации. В частности, для вычисления интегралов (3.7)–(3.9), фигурирующих в системе (3.10), (3.11), используются результаты об аналитическом продолжении функции Аппеля, представленные в §5 главы II.

Начальные приближения строятся на основании асимптотик для неизвестных параметров  $\lambda$  и  $\tau$  отображения  $\Phi^{-1}$ , которые устанавливает следующая теорема.

**Теорема 4.1.** *Пусть  $\lambda$  и  $\tau$  — прообразы точек  $C$  и  $E$  при отображении  $\Phi^{-1} : \mathbb{H}^+ \xrightarrow{\text{conf}} G(\rho)$ . Тогда*

(I) *для "малых"  $\rho$  справедливы асимптотики*

$$\lambda = 1 - c_\lambda^{(1)} \rho - c_\lambda^{(2)} \rho^2 - \mathcal{O}(\rho^3), \quad \rho \rightarrow 0, \quad (3.13)$$

$$\tau = 1 + c_\tau^{(1)} \rho + c_\tau^{(2)} \rho^2 + \mathcal{O}(\rho^3), \quad \rho \rightarrow 0, \quad (3.14)$$

*коэффициенты в которых определяются формулами*

$$c_\lambda^{(1)} = \frac{2}{\sigma_0 (1 - \alpha)^{1-\alpha}}, \quad c_\lambda^{(2)} = \frac{-2 + 5\alpha - \alpha^2}{\sigma_0^2 (1 - \alpha)^{3-2\alpha}} + \frac{4(\alpha \sigma_1 - \mu_0)}{\sigma_0^3 (1 - \alpha)^{2-2\alpha}}, \quad (3.15)$$

$$c_\tau^{(1)} = \frac{2\alpha}{\sigma_0 (1 - \alpha)^{2-\alpha}}, \quad c_\tau^{(2)} = \frac{\alpha (-1 + 5\alpha - \alpha^2)}{\sigma_0^2 (1 - \alpha)^{4-2\alpha}} + \frac{4\alpha (\alpha \sigma_1 - \mu_0)}{\sigma_0^3 (1 - \alpha)^{3-2\alpha}}; \quad (3.16)$$

*здесь*

$$\sigma_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - \alpha)_k (1 - \alpha)^k}{k! (k + 1 - \alpha) (k + 2 - \alpha)}, \quad \sigma_1 = \sigma_0 + \frac{1}{(1 - \alpha) (2 - \alpha)}, \quad (3.17)$$

$$\mu_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_k (1-\alpha)^k}{k! (k+1-\alpha) (k+2-\alpha) (k+3-\alpha)}. \quad (3.18)$$

(II) при  $\alpha \in (0, 1/2)$  для "больших"  $\rho$  справедливы асимптотики

$$\lambda = \rho^{-2/(1-2\alpha)} C_{\lambda}^{(0)} \left[ 1 + C_{\lambda}^{(1)} \rho^{-1} + \mathcal{O}(\rho^{-2/(1-2\alpha)}) \right], \quad (3.19)$$

$$\tau = C_{\tau}^{(0)} + C_{\tau}^{(1)} \rho^{-1} + \mathcal{O}(\rho^{-2}), \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (3.20)$$

коэффициенты которых определяются формулами

$$C_{\lambda}^{(0)} = \left[ \frac{\sigma^{(0)}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(3/2 - \alpha)}{\Gamma(1 - \alpha)} \right]^{2/(1-2\alpha)},$$

$$C_{\lambda}^{(1)} = -\frac{2}{(1 - 2\alpha) \cos \pi \alpha} - \frac{\sigma^{(1)} (1 - 2\alpha)^{1/2 - \alpha} \Gamma(\alpha - 1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha)} \quad (3.21)$$

$$C_{\tau}^{(0)} = \frac{1}{1 - 2\alpha}, \quad C_{\tau}^{(1)} = \frac{(1 - 2\alpha)^{1/2 - \alpha}}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\alpha - 1/2)}{\Gamma(\alpha)} \sigma^0; \quad (3.22)$$

здесь

$$\sigma^{(0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_k (1-2\alpha)^k}{k! (k-\alpha+1/2) (k-\alpha+3/2)},$$

$$\sigma^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_k k (1-2\alpha)^k}{k! (k-\alpha+1/2) (k-\alpha+3/2)}. \quad (3.23)$$

Доказательство [18] асимптотик (3.13), (3.14) и (3.19), (3.20) строится с помощью теории конформного отображения сингулярно деформируемых областей [37]. Выражения для коэффициентов (3.15)–(3.18) и (3.21)–(3.23) находятся путем подстановки соответственно формул (3.13), (3.14) и (3.19), (3.20) в уравнения (3.10), (3.11).

Для решения системы (3.10) будем применять метод Ньютона [5]. В качестве начальных приближений для  $\lambda$  и  $\tau$  при "малых"  $\rho \in (0, \rho_*)$  используем главные члены асимптотик (3.13), (3.14), а при "больших"  $\rho \in (\rho^*, \infty)$  – соответствующие главные члены из (3.19), (3.20). Указанные величины  $\rho_*$  и  $\rho^*$ , обозначающие границу применения начальных приближений, построенных на основе асимптотик, находятся путем численного эксперимента.

При ”средних“ значениях относительной длины ”уса“, т.е. при  $\rho \in (\rho_*, \rho^*)$ , не удается найти явный и простой способ построения хороших начальных приближений для прообразов. В этом случае для отыскания решения системы (3.10) используется метод продолжения этого решения по параметру  $\eta \in [0, 1]$  от некоторого

$$\rho_0 \in (0, \rho_*] \cup [\rho^*, \infty) \quad (3.24)$$

до заданного  $\rho$ . Соответствующий вычислительный алгоритм, являющийся аналогом известных (см. [132], и приведенную там библиографию), состоит в следующем. Введем семейство областей  $G(\eta)$ , у которых относительная длина ”уса“ ( $CDE$ ) зависит от  $\eta$  следующим образом:

$$\rho(\eta) = \rho_0 + (\rho - \rho_0) \eta, \quad \eta \in [0, 1], \quad (3.25)$$

где  $\rho_0$  выбрано в соответствии с (3.24), а параметр  $\alpha$  зафиксирован. Очевидно, что при  $\eta = 1$  относительная длина ”уса“ равна требуемому  $\rho$  для рассматриваемой области, а величины  $\lambda(1)$  и  $\tau(1)$  совпадают с искомыми прообразами  $\lambda$  и  $\tau$ . Разбиваем весь диапазон  $[0, 1]$  изменения  $\eta$  на  $N$  частей:

$$0 = \eta_0 < \dots < \eta_{k-1}, \eta_k < \dots < \eta_N = 1. \quad (3.26)$$

На  $k$ -м шаге продолжения величины  $\lambda(\eta_k)$  и  $\tau(\eta_k)$  находятся при помощи метода Ньютона из системы (3.10) с  $\rho = \rho(\eta_k)$ , а в качестве начального приближения используются значения  $\lambda(\eta_{k-1})$  и  $\tau(\eta_{k-1})$  с предыдущего шага продолжения. На нулевом же шаге, т.е. при  $\eta = 0$ , значения функций  $\lambda(\eta)$  и  $\tau(\eta)$  эффективно находятся из системы (3.10), поскольку  $\rho(0) = \rho_0$ , а для  $\rho_0$  известны хорошие начальные приближения для прообразов  $\lambda$  и  $\tau$ .

Опираясь на работы [72], [132], можно показать, что при достаточно мелком разбиении (3.26) отрезка изменения  $\eta$  и достаточно точном вычислении интегралов (3.4)–(3.6) гипергеометрического типа описанный метод обеспечивает сходимость к искомым значениям прообразов  $\lambda$  и  $\tau$ .

Напомним, что после вычисления прообразов  $\lambda$  и  $\tau$  предынтегральный множитель  $\mathcal{K}$  находится из (3.12). Эти завершается построение отображения  $\Phi^{-1}(\zeta)$  из (3.2).

Проведенные вычислительные эксперименты показали высокую эффективность изложенного выше метода решения рассматриваемой задачи вычисления параметров интеграла Кристоффеля — Шварца. Так, время расчета одного варианта на компьютере невысокой производительности составило менее 1 с. При этом для параметров  $\lambda$ ,  $\tau$ ,  $\mathcal{K}$  отображения (3.2) была достигнута относительная точность не ниже  $10^{-11}$ . Высокая точность вычисления при малом времени расчета обеспечивалась, прежде всего, благодаря аналитическому методу вычисления интегралов гипергеометрического типа по формулам (3.7)–(3.9) и использованию аналитического продолжения функции Аппеля  $F_1$ . Отметим, что, как показали сравнительные эксперименты, этот метод на порядки превышает по точности и быстродействию обычно применяемые методы квадратур Гаусса и Гаусса — Якоби.

Приведем некоторые численные результаты для прообразов.

**Таблица 1**

$\rho$	$\lambda$			$\tau$		
	Численный результат	$\lambda_\infty$	$\lambda_0$	Численный результат	$\tau_\infty$	$\tau_0$
0.05	0.87795711206		0.871122	1.0424456291		1.04491
0.1	0.78517522024		0.747823	1.1502313641		1.09184
0.2	0.60462027734		0.517431	1.1538390136		1.19165
0.4	0.38254549302		0.122582	1.2711080174		1.41564
1.	0.12167880954			1.4890827629		
10	$2.3156472001 \times 10^{-4}$	$1.73712 \times 10^{-4}$		1.9039571069	1.89212	
20	$1.8579327220 \times 10^{-5}$	$1.75601 \times 10^{-5}$		1.9492146682	1.94611	
50	$5.5700274258 \times 10^{-7}$	$5.52493 \times 10^{-7}$		1.9789498685	1.97846	
100	$3.6747910009 \times 10^{-8}$	$3.66754 \times 10^{-8}$		1.9893456608	1.98921	

После того как параметры  $\lambda$ ,  $\tau$  и  $\mathcal{K}$  найдены и отображение  $z = \Phi^{-1}(\zeta)$ , имеющее вид интеграла Кристоффеля — Шварца (3.2), полностью определено, возникает необходимость в его обращении, так как в представлении  $\mathcal{F} = \mathcal{P} \circ \Phi$  для решения задачи Римана — Гильберта фигурирует обратное

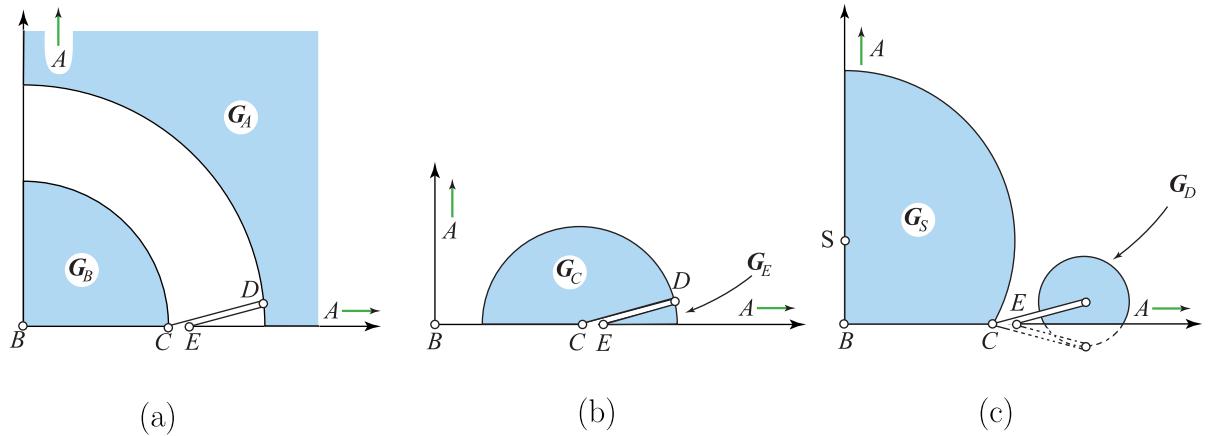


Рис. 4.10. Области сходимости разложений для отображения  $\zeta = \Phi(z)$ .

отображение  $\zeta = \Phi(z)$ . Обычно такое обращение осуществляют поточечно при помощи численных процедур [164], [181], [234], [235]; при этом также возникает необходимость вычисления интегралов гипергеометрического типа, осложняемая ситуацией кроудинга, т.е. возникают трудности, сходные с упомянутыми выше.

В следующем п. 3.3 изложен аналитический метод обращения интеграла Кристоффеля — Шварца в виде набора разложений (степенных рядов) с явно выписанными коэффициентами; этот метод, основан на теории, изложенной в [37], [37]. Множества сходимости упомянутых разложений, для нашего случая изображенные на рис. 4.10, покрывают в совокупности замыкание (за исключением бесконечности) отображаемой области  $G$ . Более того, для любой точки  $z \in \overline{G} \setminus \{\infty\}$  существует по меньшей мере одно разложение из этого набора, которое сходится в данной точке  $z$  с экспоненциальной скоростью. Таким образом, совокупность этих разложений дает удобный и эффективный инструмент для вычисления и исследования отображения  $\zeta = \Phi(z)$ .

Решение задач (2.20)–(2.22) и (2.34)–(2.36) дано ниже в §4 и §5 соответственно. С помощью результатов главы III искомые функции приведены к весьма удобному виду интеграла Кристоффеля — Шварца. Это позволило выразить каждую из них в виде совокупности разложений, аналогичных разложениям для  $\Phi(z)$ , о которых говорилось выше, обладающих теми же свой-

ствами, в том числе высокой вычислительной эффективностью. Использование этих разложений для обеих функций,  $\mathcal{P}^+$  и  $\Phi$ , входящих в представление (2.8), дает эффективный инструмент для исследования решения  $\mathcal{F}$  исходных задач задач (2.20)–(2.22) и (2.34)–(2.36) и соответствующей численной реализации, которой посвящен §6.

Отметим еще, что аналитическая функция  $w = \mathcal{F}(z)$  осуществляет конформное отображение исходной области  $G$  на некоторую область  $\mathcal{W}$ , которую в соответствии с [82] будем называть областью годографа магнитного поля. Из представления  $\mathcal{P}^+(\zeta)$  в виде интеграла Кристоффеля — Шварца вытекает, что область годографа  $\mathcal{W}$  является многоугольником. Этот факт придает геометрическую наглядность решению рассматриваемой задачи и облегчает его анализ.

### 3.3. Построение требуемого отображения $\zeta = \Phi(z)$ области $G$ .

3.3.1°. Предварительные замечания. Конформное отображение  $\zeta = \Phi(z)$  области  $G$  на  $\mathbb{H}^+$  строится в настоящем разделе путем обращения отображения  $z = \Phi^{-1}(\zeta)$ , представленного в виде интеграла Кристоффеля — Шварца (3.2). Излагаемый ниже метод обращения этого интеграла дает для  $\Phi(z)$  представление в виде набора степенных разложений вблизи вершин  $A, B, C, D, E$  многоугольной области  $G$  (рис. 4.10а), а также вблизи некоторой регулярной точки  $S$  ее границы (рис. 4.10в), которую также будем считать вершиной с углом, равным  $\pi$ . Для коэффициентов этих разложений получены явные формулы.

Отмеченные вершины будем обозначать также через  $z_{\mathfrak{P}}$ , где

$$\mathfrak{P} \in \{A, B, C, D, E, S\},$$

например,  $z_A = A$ , а углы при них, измеряемые по области  $G$  — через  $\pi\beta_{\mathfrak{P}}$ . Обозначим через  $G_{\mathfrak{P}}$  множество, на котором разложение вблизи вершины  $z_{\mathfrak{P}}$  сходится и представляет отображение  $\Phi(z)$ . Как показано ниже, множества  $G_{\mathfrak{P}}$  имеют вид, изображенный на рис. 4.10, и покрывают в совокупности

всё замыкание отображаемой области (с исключенной бесконечностью), т.е.  $\bigcup_{\mathfrak{P}} G_{\mathfrak{P}} = \overline{G} \setminus \{\infty\}$ .

3.3.2°. Обращение интеграла Кристоффеля — Шварца. Образы точек  $z_{\mathfrak{P}}$  при отображении  $\zeta = \Phi(z)$  обозначим через  $\xi_{\mathfrak{P}}$ , так что  $\xi_A = \infty$ ,  $\xi_B = 0$ ,  $\xi_C = \lambda$ ,  $\xi_D = 1$ ,  $\xi_E = \tau$ .

Для того чтобы найти искомое представление функции  $\Phi(z)$  вблизи любой из отмеченных вершин  $z_{\mathfrak{P}}$ , получим сперва разложение интеграла (3.2) вблизи ее прообраза  $\xi_{\mathfrak{P}}$ , а затем обратим это разложение, следуя [37]. Отметим, что представления для конечной и бесконечно удаленной вершин имеют принципиально различный вид.

Получим вначале представления для функции  $\Phi(z)$  вблизи конечных вершин  $z_{\mathfrak{P}}$ , т.е. для  $\mathfrak{P} \in \{B, C, D, E, S\}$ . При выбранном  $\mathfrak{P}$  запишем интеграл Кристоффеля — Шварца (3.2) в виде ряда по степеням  $(\zeta - \xi_{\mathfrak{P}})^{\beta_{\mathfrak{P}}+k}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Для этого все фигурирующие в (3.2) биномы  $(\zeta - \xi_n)^{\beta_n}$  при  $n \neq \mathfrak{P}$  разложим в ряды Тейлора по степеням  $(\zeta - \xi_{\mathfrak{P}})$ ; отметим, что для этой цели отмеченные биномы удобно переписать в форме

$$(\xi_n - \xi_{\mathfrak{P}})^{\beta_n-1} \left[ 1 - (\zeta - \xi_{\mathfrak{P}})/(\xi_n - \xi_{\mathfrak{P}}) \right]^{\beta_n-1}.$$

Перемножая полученные ряды и почленно интегрируя результат, получаем искомый ряд по степеням  $(\zeta - \xi_{\mathfrak{P}})^{\beta_{\mathfrak{P}}+k}$ . Принимая во внимание, что ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{\alpha+k}$ ,  $c_0 \neq 0$ , легко преобразуется к виду  $\left( \sum_{k=1}^{\infty} \hat{c}_k x^k \right)^{\alpha}$ , находим представление для  $\Phi^{-1}$  вблизи  $\xi_{\mathfrak{P}}$ :

$$\Phi^{-1}(\zeta) = z_{\mathfrak{P}} + e^{i\pi\delta_{\mathfrak{P}}} \mathcal{K}_{\mathfrak{P}} \left[ (\zeta - \xi_{\mathfrak{P}}) + \sum_{k=2}^{\infty} b_k^{(\mathfrak{P})} r_{\mathfrak{P}}^{1-k} (\zeta - \xi_{\mathfrak{P}})^k \right]^{\beta_{\mathfrak{P}}},$$

$$\mathcal{K}_{\mathfrak{P}} = \frac{\mathcal{K}}{\beta_{\mathfrak{P}}} \prod_{k=1}^4' \left| \xi_{\mathfrak{P}} - \xi_k \right|^{\beta_k-1}, \quad (3.27)$$

где  $r_{\mathfrak{P}}$  — радиус сходимости разложения в (3.27), являющийся расстоянием от  $\xi_{\mathfrak{P}}$  до ближайшей особой точки  $\xi_n$ ; штрих при символе произведения означает, что оно берется по всем означенным  $k$ , кроме  $k = \mathfrak{P}$ .

Используя [26], обращаем представление (3.27) при различных  $\mathfrak{P} \in \{B, C, D, E, S\}$  и находим разложения, сходящиеся и представляющие функцию  $\Phi(z)$  на множествах  $G_{\mathfrak{P}}$ , соответствующих точкам  $z_{\mathfrak{P}}$ . Эти (замкнутые) множества изображены на рис. 4.10 (стр. 216), а указанные разложения могут быть записаны в виде:

$$\Phi(z) = \xi_{\mathfrak{P}} + \left( \frac{R_{\mathfrak{P}}}{\mathcal{K}_{\mathfrak{P}}} \right)^{1/\beta_{\mathfrak{P}}} \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(\mathfrak{P})} [V_{\mathfrak{P}}(z)]^k, \quad V_{\mathfrak{P}}(z) = \left( e^{-i\pi\delta_{\mathfrak{P}}} \frac{z - z_{\mathfrak{P}}}{R_{\mathfrak{P}}} \right)^{1/\beta_{\mathfrak{P}}}; \quad (3.28)$$

здесь  $R_{\mathfrak{P}}$  — расстояние от  $z_{\mathfrak{P}}$  до ближайшей особой точки;  $\delta_{\mathfrak{P}}$  определяются по формулам

$$\delta_B = 0, \quad \delta_C = \alpha, \quad \delta_D = \alpha - 1, \quad \delta_E = 0, \quad \delta_S = -1/2,$$

а в соответствии с формулой из [37] коэффициенты  $B_k^{(\mathfrak{P})}$  связаны с коэффициентами  $b_k^{(\mathfrak{P})}$  из представления (3.27) равенством:

$$B_k^{(\mathfrak{P})} = \frac{1}{k \mathcal{K}_{\mathfrak{P}}^{k/\beta_{\mathfrak{P}}}} \left[ \frac{R_{\mathfrak{P}}^{1/\beta_{\mathfrak{P}}}}{r_{\mathfrak{P}}} \right]^{k-1} \sum_{n=1}^{k-1} \binom{-k}{n} \sum_{s_1 + \dots + s_n = k-1} \prod_{j=1}^n b_{s_j+1}^{(\mathfrak{P})}. \quad (3.29)$$

Отметим, что разложение (3.28) сходится в любой точке  $z$ , находящейся на расстоянии  $\rho$  от  $z_{\mathfrak{P}}$  ( $\rho < R_{\mathfrak{P}}$ ), со скоростью геометрической прогрессии, имеющей знаменатель  $\rho/R_{\mathfrak{P}}$ .

Получим теперь представление для  $\Phi(z)$  вблизи бесконечной вершины  $z_A$ . Для этого, действуя аналогично случаю конечной вершины, запишем интеграл Кристоффеля — Шварца (3.2) в виде ряда по степеням  $\zeta^{1/2-k}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Далее, принимая во внимание, что ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{1/2-k}$ ,  $c_0 \neq 0$ , легко преобразуется к виду  $\left( \widehat{c}_{-1} x + \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{c}_k x^{-k} \right)^{1/2}$ , находим представление для  $\Phi^{-1}$  вблизи  $\xi_A$ :

$$\Phi^{-1}(\zeta) = 2\mathcal{K} \left( \zeta + \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(A)} \tau^{k+1} \zeta^{-k} \right)^{1/2}, \quad (3.30)$$

где ряд сходится и представляет отображение  $\Phi^{-1}(\zeta)$  на множестве  $\overline{\mathbb{K}}_+(\tau)$ ; здесь  $\mathbb{K}_+(\tau) := \mathbb{H}^+ \cup \{|\zeta| > \tau\}$ . Используя [37], обращаем представление

(3.30) и находим разложение для  $\Phi(z)$ , сходящееся и представляющее функцию  $\Phi(z)$  на (замкнутом) множестве  $G_A$ , имеющем вид, изображенный на рис. 4.10:

$$\Phi(z) = \left( \frac{R_A}{2\mathcal{K}_{\mathfrak{P}}} \right)^2 \left\{ V_A + \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(A)} \left[ V_A(z) \right]^{-k} \right\}, \quad V_A(z) = \left( \frac{z}{R_A} \right)^2; \quad (3.31)$$

здесь  $R_A$  — расстояние от начала координат  $z = 0$  до точки  $D$ , а в соответствии с формулой [37] коэффициенты  $B_k^{(A)}$  связаны с  $b_k^{(A)}$  из (3.30) равенством:

$$B_k^{(A)} = -\frac{(4\mathcal{K}_{\mathfrak{P}}^2)^k}{k} \left[ \frac{\tau}{R_A^2} \right]^{k+1} \sum_{n=1}^k \binom{k}{n} \sum_{s_1 + \dots + s_n = k+1} \prod_{j=1}^n b_{s_j+1}^{(A)}. \quad (3.32)$$

Отметим, что разложение (3.31) сходится в любой точке  $z$ , находящейся на расстоянии  $\rho$  от  $z = 0$  ( $\rho > R_A$ ) со скоростью геометрической прогрессии, имеющей знаменатель  $R_A/\rho$ .

Принимая во внимание вид множеств сходимости  $G_{\mathfrak{P}}$ , изображенных на рис. 3, а также отмеченный характер сходимости представлений (3.28), (3.31), убеждаемся в справедливости следующего утверждения: для любой точки  $z \in \overline{G} \setminus \{\infty\}$  можно указать по крайней мере одно из разложений (3.28), (3.31), сходящееся в данной точке с экспоненциальной скоростью. Таким образом, набор разложений (3.28) при различных  $\mathfrak{P} \in \{B, C, D, E, S\}$  вместе с разложением (3.31), соответствующим вершине  $A$ , действительно можно рассматривать как общее представление отображения  $\zeta = \Phi(z)$  во всём замыкании отображаемой области с исключенной бесконечностью.

3.3.3°. Пример разложения  $\Phi$  вблизи вершин. Более детальное описание рассмотренных выше разложений функции  $\zeta = \Phi(z)$  дадим на примерах вершин  $A$  и  $C$ . Коэффициенты  $b_k^{(C)}$  и  $b_k^{(A)}$  даются формулами:

$$b_{k+1}^{(C)} = r_C^k \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^n \left( 1/(\alpha - 1) \right)_n}{n!} E_{n,k}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (3.33)$$

$$E_{1,k} = \mathcal{Q}_k^C, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$E_{n,k} = \sum_{l=n-1}^{k-1} E_{1,k-l} E_{n-1,l}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad k = n, n+1, \dots; \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0^C &= 1, \quad \mathcal{Q}_k^C = \frac{1-\alpha}{k+1-\alpha} \left[ \varphi_k^C - \varphi_{k-1}^C / (1-\lambda) \right]; \\ \varphi_k^C &= \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n (1/2)_n (1-\alpha)_{k-n}}{n! (k-n)! \lambda^n (\tau-\lambda)^{k-n}}, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$b_k^{(A)} = \tau^{-k-1} \sum_{l=0}^{k+1} \mathcal{Q}_l^A \mathcal{Q}_{k-l+1}^A, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0^A &= 1, \quad \mathcal{Q}_l^A = \left( \varphi_l^A - \varphi_{l-1}^A \right) / (1-2l); \\ \varphi_l^A &= \sum_{n=0}^l \frac{(\alpha)_{l-n} (1-\alpha)_n \lambda^{l-n} \tau^n}{n! (l-n)!}, \quad l = 0, 1, \dots. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Тогда коэффициенты  $B_k^C$  и  $B_k^A$  находятся по формулам (3.29), (3.32); тем самым, разложения (3.28), (3.32) для  $\Phi$  вблизи  $z_C$  и  $z_A$  полностью определены.

## §4. Решение задачи Римана — Гильберта, моделирующей магнитное поле при накоплении энергии в области пересоединения

**4.1. Постановка задачи в полу плоскости.** Исходную краевую задачу (2.20)–(2.22) для аналитической функции  $\mathcal{F}_{\text{con}}(z) = u(z) + iv(z)$  в области  $G$  сводим с помощью отображения  $z = \Phi^{-1}(\zeta)$  к аналогичной задаче в верхней полу плоскости  $\mathbb{H}^+$  относительно функции

$$w = \mathcal{P}_{\text{con}}^+(\zeta) = \mathcal{F}_{\text{con}} \circ \Phi^{-1}(\zeta).$$

Постановка задачи Римана — Гильберта для  $\mathcal{P}_{\text{con}}^+(\zeta)$  следующая: требуется найти аналитическую в  $\mathbb{H}^+$  и непрерывную в  $\overline{\mathbb{H}^+} \setminus \{\infty\}$  функцию  $\mathcal{P}_{\text{con}}^+(\zeta)$ , удовлетворяющую на вещественной оси  $\partial\mathbb{H}^+$  краевому условию

$$\operatorname{Re} [\chi(\xi) \mathcal{P}_{\text{con}}^+(\xi)] = \sigma(\xi), \quad \xi \in \partial\mathbb{H}^+, \quad (4.1)$$

где  $\chi(\xi)$  и  $\sigma(\xi)$  — комплексная и вещественная кусочно-постоянные функции, определяемые по формулам

$$\chi(\xi) = \begin{cases} e^{-i\pi/2}, & \xi \in ABC, \\ -ie^{i\pi\alpha}, & \xi \in CDE, \\ e^{i\pi}, & \xi \in EA; \end{cases}, \quad \sigma(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \in ABC, \\ -\beta, & \xi \in CDE, \\ 0, & \xi \in EA; \end{cases} \quad (4.2)$$

на бесконечности предписывается условие линейного роста с заданным коэффициентом  $\gamma$ :

$$\mathcal{P}_{\text{con}}^+(\zeta) = -2i\gamma\mathcal{K}\sqrt{\zeta} + o(1), \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad (4.3)$$

где  $\mathcal{K}$  — предынтегральный множитель в (3.2), который считается известным после нахождения  $\Phi^{-1}$ .

Сформулированная задача (4.1)–(4.3) является частым случаем рассмотренной в главе III задачи Римана — Гильберта с кусочно-постоянными коэффициентами. При этом точками  $\{\xi_k\}$  разрыва коэффициентов являются три точки вещественной оси:  $\xi_0 = \infty$ ,  $\lambda$  и  $\tau$ . Вычисляя величины  $\alpha_k$  и индекс  $\varkappa$  задачи по формулам (3.3)–(3.5), (5.17) главы I, находим

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} - \alpha, \quad \varkappa = 0. \quad (4.4)$$

Из теоремы 3.1 гл. III, равенства  $\varkappa = 0$  и того, что коэффициент  $\gamma$  в формуле (4.3) задан, вытекает однозначная разрешимость задачи (4.1)–(4.3). Этот факт с учетом единственности отображения  $\Phi(z)$  также приводит к выводу об однозначной разрешимости задачи (2.20)–(2.22) в области  $G$ .

**4.2. Решение задачи Римана — Гильберта в полуплоскости.** Учитывая, что индекс задачи (4.1)–(4.3) равен нулю и применяя теорему 1.5, записываем ее решение в следующем виде:

$$\mathcal{P}_{\text{con}}^+(\zeta) = \frac{(\zeta - \lambda)^\alpha e^{-i\pi/2}}{(\zeta - \tau)^{\alpha - 1/2}} \left\{ a_0 - \frac{\beta}{\pi} \int_\lambda^\tau \frac{(\tau - t)^{\alpha - 1/2}}{(t - \lambda)^\alpha (t - \zeta)} dt \right\}, \quad (4.5)$$

где  $a_0$  — вещественная постоянная, которую находим из асимптотики (4.3), через параметр задачи  $\gamma$  и параметр конформного отображения  $\mathcal{K}$  в виде

$$a_0 = 2\gamma\mathcal{K}. \quad (4.6)$$

Отметим также, что каноническое решение задачи (4.1)–(4.3) имеет вид

$$X_{\text{con}}^+(\zeta) = e^{-i\pi/2} (\zeta - \lambda)^\alpha (\zeta - \tau)^{1/2 - \alpha}.$$

Учитывая в (4.5) выражение (4.6) для  $a_0$  получаем искомое решение задачи Римана — Гильберта (4.1)–(4.3), записанное через интеграл типа Коши:

$$\mathcal{P}_{\text{con}}^+(\zeta) = -\frac{i(\zeta - \lambda)^\alpha}{(\zeta - \tau)^{\alpha-1/2}} \left\{ 2\gamma \mathcal{K} - \frac{\beta}{\pi} \int_\lambda^\tau \frac{(\tau - t)^{\alpha-1/2} dt}{(t - \lambda)^\alpha (t - \zeta)} \right\}, \quad (4.7)$$

который далее в соответствии с результатами главы III преобразуем к виду интеграла Кристоффеля — Шварца.

Применяя результат теоремы 3.3 и вычисляя в соответствии с (2.75) значение функции  $\mathcal{P}_{\text{con}}^+$  в точке  $\zeta = \lambda$ :

$$\mathcal{P}_{\text{con}}^+(\lambda) = \frac{-\beta}{\sin \pi \alpha}, \quad (4.8)$$

получаем искомое представление для  $\mathcal{P}^+(\zeta)$  в виде интеграла Кристоффеля — Шварца:

$$\mathcal{P}_{\text{con}}^+(\zeta) = -i\gamma \mathcal{K} \int_\lambda^\zeta \frac{(t - \lambda)^{\alpha-1}}{(t - \tau)^{\alpha+1/2}} (t - p) dt - \frac{\beta}{\sin \pi \alpha}, \quad (4.9)$$

$$p = \frac{\beta}{\gamma} \frac{\sqrt{\tau - \lambda}}{\pi^{3/2} \mathcal{K}} \Gamma(1 - \alpha) \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) + 2\alpha(\tau - \lambda) + \lambda. \quad (4.10)$$

Из формулы (4.9) вытекает, что зависимость решения  $\mathcal{P}_{\text{con}}^+(\beta, \gamma; \zeta)$  от параметров  $\beta$  и  $\gamma$ , входящих в условия задачи (4.2), (4.3), может быть факторизована в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{con}}^+(\beta, \gamma; \zeta) &= \gamma \widehat{\mathcal{P}}\left(\beta / \gamma; \zeta\right), \\ \widehat{\mathcal{P}}\left(\beta / \gamma; \zeta\right) &= -i\mathcal{K} \int_\lambda^\zeta \frac{(t - \lambda)^{\alpha-1}}{(t - \tau)^{\alpha+1/2}} (t - p) dt - \frac{\beta}{\gamma \sin \pi \alpha}, \end{aligned}$$

что соответствует факторизации (2.17) для функции  $\mathcal{F}_{\text{con}}$ . Следовательно, для понимания этой зависимости при  $\gamma \neq 0$  достаточно исследовать зависимость решения  $\mathcal{P}_{\text{con}}^+$  только от  $\beta$  при  $\gamma = 1$ .

**Замечание 4.1.** Можно показать, что решение  $\mathcal{F}_{\text{con}}(\zeta)$  исходной задачи (2.12), (2.13), описывающее магнитное поле в области пересоединения, при стремлении длины  $r$  ударной волны к нулю и согласованном стремлении величины  $\beta \rightarrow \infty$  (и фиксированных других параметрах задачи) переходит в

выражение (1.7) для магнитного поля в модели Сыроватского. Доказательство строится с помощью формул (2.8), (2.18), (4.9), (4.10), (3.2) и асимптотик (3.13), (3.14).

**4.3. Представление решения  $\mathcal{P}_{\text{con}}^+(\zeta)$  в виде рядов.** Решение  $\mathcal{P}_{\text{con}}^+(\zeta)$  задачи Римана — Гильберта в  $\mathbb{H}^+$ , полученное в форме интеграла (4.9), представим в виде набора степенных разложений вблизи отмеченных выше прообразов вершин области  $\mathcal{W}_{\text{con}}$ , а также вблизи прообразов некоторых регулярных точек  $T_1, T_2$  этой области и ее границы (см. рис. 4.6b, 4.6c). Эти разложения, аналогичные представлениям (3.27), (3.30) для интеграла (3.2), весьма удобны и эффективны при практическом вычислении функции  $\mathcal{P}_{\text{con}}^+(\zeta)$ .

Все названные прообразы будем обозначать через  $\xi_{\mathbf{k}}$ , где

$$\mathfrak{D} \in \{A, C, P, E, T_1, T_2\},$$

соответствующие им вершины области  $\mathcal{W}$  — через  $w_{\mathbf{k}}$ , а углы при этих вершинах — через  $\pi \alpha_{\mathbf{k}}$  (рис. 4.6c). При этом будем формально полагать, что  $\alpha_{T_1} = \alpha_{T_2} = 1$ .

Действуя тем же путем, что и при выводе представления (3.27) для  $\Phi^{-1}$ , получаем аналогичное представление для  $\mathcal{P}_{\text{con}}^+$  вблизи конечных прообразов, т.е. для  $\xi_{\mathbf{k}}$ ,  $\mathbf{k} \in \{C, P, E, T_1, T_2\}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{con}}^+(\zeta) &= w_{\mathbf{k}} + e^{i\pi\gamma_{\mathbf{k}}} \mathcal{C}_{\mathbf{k}} \left[ (\zeta - \xi_{\mathbf{k}}) + \sum_{k=2}^{\infty} b_k^{(\mathbf{k})} \rho_{\mathbf{k}}^{1-k} (\zeta - \xi_{\mathbf{k}})^k \right]^{\alpha_{\mathbf{k}}}, \\ \mathcal{C}_{\mathbf{k}} &= \gamma \frac{\mathcal{K}}{\alpha_{\mathbf{k}}} \prod_{k=1}^3' \left| \xi_{\mathbf{k}} - \xi_k \right|^{\alpha_k - 1}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где  $\rho_{\mathbf{k}}$  — радиус сходимости ряда в (4.11), являющийся расстоянием от  $\xi_{\mathbf{k}}$  до ближайшей особой точки  $\xi_n$ ,  $n \neq \mathbf{k}$ ; показатели  $\gamma_{\mathbf{k}}$  определяются следующим образом:  $\gamma_C = -\alpha$ ,  $\gamma_P = -\alpha - 1$ ,  $\gamma_E = -1/2$ ,  $\gamma_{T_1} = 1$ , а показатель  $\gamma_{T_2}$  — деленный на  $\pi$  аргумент подынтегральной функции в (4.9).

Аналогично устанавливается представление для  $\mathcal{P}_{\text{con}}^+$  вблизи  $\xi_A = \infty$ :

$$\mathcal{P}_{\text{con}}^+(\zeta) = -2i\gamma \mathcal{K} \left( \zeta + \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(A)} \tau^{k+1} \zeta^{-k} \right)^{1/2}, \quad (4.12)$$

сходящееся и представляющее функцию  $\mathcal{P}_{\text{con}}^+$  в  $\overline{\mathbb{K}}_+(\tau)$ . Для данного разложения приведем явное выражение для коэффициентов:

$$\begin{aligned} b_k^{(A)} &= \tau^{-k-1} \sum_{n=0}^{k+1} Q_n^A Q_{k-n+1}^A, & Q_0^A &= 1, & Q_n^A &= \frac{\varphi_n - p \varphi_{n-1}}{1 - 2n}, \\ \varphi_n &= \sum_{l=0}^n \frac{(1-\alpha)_{n-l} (\alpha + 1/2)_l \tau^l}{(n-l)! l! \lambda^{l-n}}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где  $n = 0, 1, \dots$

Можно убедиться, что при надлежащем выборе  $T_1$  и  $T_2$  множества сходимости представлений (4.11), (4.12) покрывают в совокупности замкнутую полуплоскость  $\overline{\mathbb{H}^+}$ . Отсюда, принимая во внимание характер сходимости разложений, фигурирующих в (4.11), (4.12) в скобках, приходим к выводу, что для любой точки  $\zeta \in \overline{\mathbb{H}^+} \setminus \{\infty\}$  найдется хотя бы одно из этих представлений, сходящееся в этой точке с экспоненциальной скоростью.

**4.4. Область годографа магнитного поля  $\mathcal{W}_{\text{con}}$ .** В соответствии с п. 2.4 область  $\mathcal{W}_{\text{con}}$ , на которую аналитическая функция  $w = \mathcal{F}_{\text{con}}(z)$  отображает исходную область  $G$ , называем областью годографа магнитного поля. Очевидно, что  $\mathcal{W}_{\text{con}}$  является конформным образом полуплоскости  $\mathbb{H}^+$  при отображении  $w = \mathcal{P}_{\text{con}}^+(\zeta)$ . Тогда из представления (4.9) вытекает, что  $\mathcal{W}_{\text{con}}$  представляет собой четырехугольную область с вершинами  $A, C, P, E$ , где комплексная координата точки  $C$  равна  $\mathcal{P}_{\text{con}}^+(\lambda)$  и дается формулой (4.8). Углы в указанных вершинах соответственно равны

$$\pi\delta_A = -\frac{\pi}{2}, \quad \pi\delta_C = \pi\alpha, \quad \pi\delta_P = 2\pi, \quad \pi\delta_E = \pi\left(\frac{1}{2} - \alpha\right),$$

см. рис. 4.6с на стр. 198), а прообразами этих вершин служат точки

$$\xi_A = \infty, \quad \xi_C = \lambda, \quad \xi_P = p, \quad \xi_E = \tau,$$

см. рис. 4.6b.

При изменении параметра  $\beta$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  и фиксированных остальных параметрах задачи (в том числе  $\gamma$ , равном 1) в соответствии с (4.10) изменяется величина  $p = p(\beta)$  — прообраз вершины  $P$ , а вместе с ним сильно

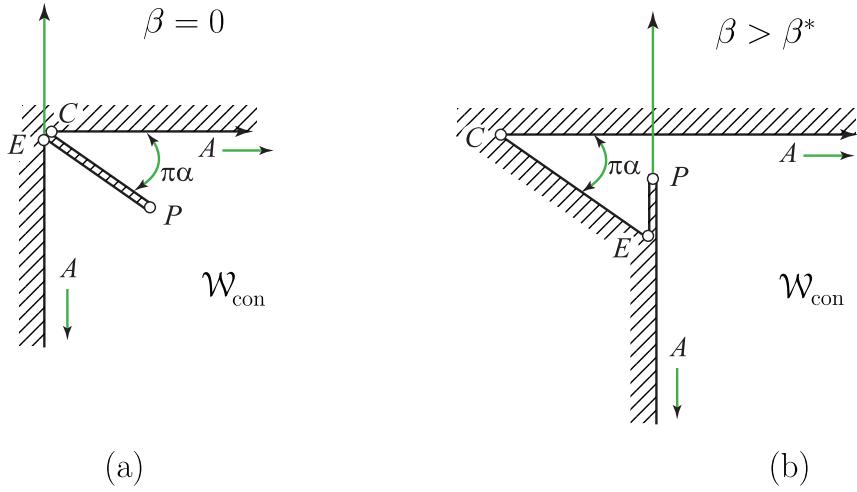


Рис. 4.11. Вид области годографа  $\mathcal{W}_{\text{con}}$ : (а) при  $\beta = 0$ , (б) при  $\beta > \beta^*$ .

меняется и вид области  $\mathcal{W}_{\text{con}}$ . Критическими значениями  $\beta$ , при которых такое изменение носит принципиальный характер, являются  $\beta = \beta_*$ ,  $0$ ,  $\beta^*$ , где величины  $\beta_*$  и  $\beta^*$ , определяемые условиями  $p(\beta_*) = \lambda$  (т.е. совпадают вершины  $P$  и  $C$ , см. рис. 4.6с), и  $p(\beta^*) = \tau$  (т.е. совпадают вершины  $P$  и  $E$ , см. рис. 4.6с) имеют вид

$$\begin{aligned}\beta_* &= -\frac{2\pi\sqrt{\pi}\alpha}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha+1/2)} \mathcal{K} \sqrt{\tau-\lambda} < 0, \\ \beta^* &= \frac{\pi\sqrt{\pi}(1-2\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha+1/2)} \mathcal{K} \sqrt{\tau-\lambda} > 0,\end{aligned}\quad (4.14)$$

легко следующий из (4.10). Вид области годографа магнитного поля при  $\beta = 0$  изображен на рис. 4.11а, для некоторого  $\beta \in (0, \beta^*)$  — на рис. 4.6с, стр. 198), а для некоторого  $\beta \in (\beta^*, \infty)$  — на рис. 4.11б. При  $\beta = 0$  точки  $C$  и  $E$  сливаются друг с другом и с началом координат. При изменении  $\beta$  в диапазоне  $(0, \beta^*)$  область  $\mathcal{W}_{\text{con}}$  приобретает вид, изображенный на рис. 4.6с, и длина разреза  $EP$  сокращается с ростом  $\beta$ , а при  $\beta = \beta^*$  точки  $P$  и  $E$  сливаются. При дальнейшем росте параметра  $\beta$  в диапазоне  $\beta \in (\beta^*, +\infty)$  область  $\mathcal{W}_{\text{con}}$  приобретает вид, изображенный на рис. 4.11б; с ростом  $\beta$  длина разреза  $EP$  увеличивается, причем при  $\beta \rightarrow +\infty$  точки  $C$  и  $E$  стремятся к бесконечности, а точка  $P$  — к началу координат, так что в пределе разрез

$EP$  рассекает область  $\mathcal{W}_{\text{con}}$  на две области без общих точек, которые, как нетрудно убедиться, представляют собой третий и четвертый квадранты.

Необходимо отметить, что физический смысл имеют те значения параметра  $\beta$ , при которых магнитное поле не обращается в нуль внутри области  $g$ , или, что тоже самое,

$$\mathcal{P}_{\text{con}}^+(\zeta) \neq 0, \quad \zeta \in \overline{\mathbb{H}^+} \setminus [0, \tau].$$

Нетрудно увидеть, что необходимым и достаточным для этого является выполнение следующего требования:  $\beta \in [0, \beta_0]$ , где  $\beta_0$  определяется из условия  $\mathcal{P}_{\text{con}}^+(0) = 0$  и дается формулой, вытекающей непосредственно из (4.9), (4.10):

$$\beta_0 = -\mathcal{P}_\gamma/\mathcal{P}_\beta; \quad (4.15)$$

здесь числа  $\mathcal{P}_\beta$  и  $\mathcal{P}_\gamma$  находятся с помощью равенств

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\beta = & -\frac{1}{\sin \pi \alpha} + \frac{\lambda^\alpha \sqrt{\tau - \lambda}}{\pi \sqrt{\pi} \alpha \tau^{1/2+\alpha}} \Gamma(1 - \alpha) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) \times \\ & \times F\left(\frac{1}{2} + \alpha, 1; 1 + \alpha; \frac{\lambda}{\tau}\right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\gamma = & \frac{\mathcal{K} \lambda^\alpha}{\tau^{1/2+\alpha}} \left[ 2(\tau - \lambda) F\left(\frac{1}{2} + \alpha, 1; 1 + \alpha; \frac{\lambda}{\tau}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{\lambda}{1 + \alpha} F\left(\frac{1}{2} + \alpha, 1; 2 + \alpha; \frac{\lambda}{\tau}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

где  $F$  — гипергеометрическая функция Гаусса.

## §5. Решение задачи Римана — Гильберта, моделирующей магнитное поле при распаде токового слоя

### 5.1. Постановка задачи Римана — Гильберта в полу плоскости.

Перейдем к рассмотрению задачи, моделирующей распадающийся токовый слой с присоединенными ударными волнами, т.е. задачи  $(\mathfrak{D})$ . Исходную краевую задачу (2.34)–(2.36) для аналитической функции  $\mathcal{F}_{\text{dis}}(z) = u(z) + iv(z)$  в

области  $G$  сводим с помощью отображения  $z = \Phi^{-1}(\zeta)$  к аналогичной задаче в верхней полуплоскости  $\mathbb{H}^+$  относительно функции

$$w = \mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\zeta) = \mathcal{F}_{\text{dis}} \circ \Phi^{-1}(\zeta),$$

см. рис. 4.7.

Постановка задачи Римана — Гильберта для  $\mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\zeta)$  следующая: требуется найти аналитическую в  $\mathbb{H}^+$  и непрерывную в  $\overline{\mathbb{H}^+} \setminus \{\infty, a\}$  функцию  $\mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\zeta)$ , удовлетворяющую на вещественной оси  $\partial\mathbb{H}^+$  краевому условию

$$\operatorname{Re} [\chi(\xi) \mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\xi)] = \sigma(\xi), \quad \xi \in \partial\mathbb{H}^+, \quad (5.1)$$

где  $\chi(\xi)$  и  $\sigma(\xi)$  — комплексная и вещественная кусочно-постоянные функции, определяемые по формулам

$$\chi(z) = \begin{cases} i, & \xi \in (AB) \cup (B'C), \\ 1, & \xi \in (BB') \cup (EA), \\ ie^{i\pi\alpha}, & \xi \in (CDE), \end{cases} \quad \sigma(z) = \begin{cases} 0, & \xi \in (ABB'C) \cup (EA), \\ \beta, & \xi \in (ABC), \end{cases} \quad (5.2)$$

в точках  $\zeta = \infty$  и  $\zeta = \mu$  предписываются следующие условия роста:

$$\mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\zeta) = -2i\gamma\mathcal{K}\sqrt{\zeta} + o(1), \quad \zeta \rightarrow \infty; \quad \mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\zeta) = \mathcal{O}[(\zeta - \mu)^{-1/2}], \quad \zeta \rightarrow \mu; \quad (5.3)$$

здесь коэффициент  $\gamma$  считается заданным (параметр модели), величина  $\mathcal{K}$  — предынтегральный множитель в (3.2), который вычисляется при нахождении  $\Phi^{-1}$ , а через  $\mu$  обозначен прообраз точки  $B'$ , т.е.  $\mu$  вычисляется по формуле

$$\mu = \Phi(a),$$

где алгоритм вычисления  $\Phi$  дан в п. 3.3.

Сформулированная задача (4.1)–(4.3) является частым случаем рассмотренной в главе III задачи Римана — Гильберта с кусочно-постоянными коэффициентами. При этом точками  $\{\xi_k\}$  разрыва коэффициентов являются три

точки вещественной оси:  $\xi_0 = \infty, 0, \mu, \lambda$  и  $\tau$ . Вычисляя величины  $\alpha_k$  и индекс  $\varkappa$  задачи по формулам (3.3)–(3.5), (5.17) главы I, находим

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_3 = \alpha, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2} - \alpha, \quad \varkappa = 0.$$

Из теоремы 3.1 гл. III, равенства  $\varkappa = 0$  и того, что коэффициент  $\gamma$  в формуле (4.3) задан, вытекает однозначная разрешимость задачи (5.1)–(5.3). Этот факт с учетом единственности отображения  $\Phi(z)$  также приводит к выводу об однозначной разрешимости задачи (2.34)–(2.36) в области  $G$ .

**5.2. Решение задачи Римана — Гильберта в полуплоскости.** Учитывая, что индекс задачи (4.1)–(4.3) равен нулю и применяя теорему (1.5), записываем ее решение в следующем виде:

$$\mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\zeta) = X_{\text{dis}}^+(\zeta) \left[ a_0 + \frac{\beta}{\pi} \int_{\lambda}^{\tau} \frac{t^{-1/2}(t - \mu)^{1/2}(t - \lambda)^{-\alpha}(\tau - t)^{\alpha-1/2}}{t - \zeta} dt \right], \quad (5.4)$$

где  $X_{\text{dis}}^+$  — каноническое решение задачи однородной задачи, определяемое формулой

$$X_{\text{dis}}^+(\zeta) = e^{-i\pi/2} \zeta^{1/2} (\zeta - \mu)^{-1/2} (\zeta - \lambda)^\alpha (\zeta - \tau)^{1/2-\alpha}, \quad (5.5)$$

а постоянная  $a_0$  находится из первой асимптотики (5.3), через параметр задачи  $\gamma$  и параметр конформного отображения  $\mathcal{K}$  в виде

$$a_0 = 2\gamma\mathcal{K}. \quad (5.6)$$

Учитывая в (5.4) выражение (5.6) для  $a_0$  получаем искомое решение задачи Римана — Гильберта (4.1)–(4.3) в виде интеграла типа Коши:

$$\mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\zeta) = X_{\text{dis}}^+(\zeta) \left[ 2\gamma\mathcal{K} + \frac{\beta}{\pi} \int_{\lambda}^{\tau} \frac{t^{-1/2}(t - \mu)^{1/2}(t - \lambda)^{-\alpha}(\tau - t)^{\alpha-1/2}}{t - \zeta} dt \right], \quad (5.7)$$

который далее в соответствии с результатами главы III преобразуем к виду интеграла Кристоффеля — Шварца.

Применяя результат теоремы 3.3 и вычисляя в соответствии с (2.75) значение функции  $\mathcal{P}_{\text{dis}}^+$  в точке  $\zeta = 0$ :

$$\mathcal{P}_{\text{dis}}^+(0) = 0,$$

получаем искомое представление для  $\mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\zeta)$  в виде интеграла Кристоффеля — Шварца:

$$\mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\zeta) = -i\gamma\mathcal{K} \int_0^\zeta t^{-1/2} (t-\mu)^{-3/2} (t-\lambda)^{\alpha-1} (t-\tau)^{-1/2-\alpha} R_3(t) dt, \quad (5.8)$$

где  $R_3(\zeta)$  — полином третьей степени следующего вида:

$$\begin{aligned} R_3(\zeta) = & (\zeta-\mu)(\zeta-\lambda)(\zeta-\tau) - \zeta(\zeta-\lambda)(\zeta-\tau) + \\ & + 2\alpha\zeta(\zeta-\mu)(\zeta-\tau) + (1-2\alpha)\zeta(\zeta-\mu)(\zeta-\lambda) + \\ & + \frac{\beta}{\gamma} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha+1/2)}{\pi\sqrt{\pi}\mathcal{K}} \lambda^{-3/2} (\lambda-\mu)^{-1/2} (\tau-\lambda)^{1/2} \times \\ & \times [A_0\lambda(\lambda-\mu)\zeta(\zeta-\mu) - A_1\tau(\lambda-\mu)(\zeta-\mu)(\zeta-\lambda) + \\ & + A_2\lambda(\tau-\mu)\zeta(\zeta-\lambda)]; \end{aligned} \quad (5.9)$$

здесь числа  $A_0$ ,  $A_1$  и  $A_2$  выражаются через функцию Лауричеллы  $F_D^{(2)}$ , зависящую от двух переменных, по формулам

$$\begin{aligned} A_0 &= F_D^{(2)}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; -\alpha, \frac{1}{2}; w_1, w_2\right), & A_1 &= F_D^{(2)}\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}; 1-\alpha, \frac{3}{2}; w_1, w_2\right), \\ A_2 &= F_D^{(2)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1-\alpha, \frac{3}{2}; w_1, w_2\right), & w_1 &= -\frac{\tau-\lambda}{\lambda}, \quad w_2 = -\frac{\tau-\lambda}{\lambda-\mu}. \end{aligned}$$

Используя (2.75), нетрудно также убедиться в справедливости следующих равенств:

$$\mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\lambda) = \frac{-\beta}{\sin \pi\alpha}, \quad \mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\tau) = \frac{-i\beta}{\cos \pi\alpha}. \quad (5.10)$$

Из формулы (5.8) вытекает, что зависимость решения  $\mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\beta, \gamma; \zeta)$  от параметров  $\beta$  и  $\gamma$ , входящих в условия задачи (4.2), (4.3), может быть факторизована в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\beta, \gamma; \zeta) &= \gamma \widehat{\mathcal{P}}_{\text{dis}}\left(\frac{\beta}{\gamma}; \zeta\right), \\ \widehat{\mathcal{P}}_{\text{dis}}\left(\frac{\beta}{\gamma}; \zeta\right) &= -i\mathcal{K} \int_0^\zeta t^{-1/2} (t-\mu)^{-3/2} (t-\lambda)^{\alpha-1} (t-\tau)^{-1/2-\alpha} R_3(t) dt, \end{aligned}$$

что соответствует факторизации (2.17) для функции  $\mathcal{F}_{\text{dis}}$ . Следовательно, для понимания этой зависимости при  $\gamma \neq 0$  достаточно исследовать зависимость решения  $\mathcal{P}_{\text{dis}}^+$  только от  $\beta$  при  $\gamma = 1$ .

**Замечание 4.2.** Можно показать, что при  $\mu \rightarrow 0$  формулы (5.8), (5.9) для  $\mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\zeta)$  переходят в соотношения (4.9), (4.10) для функции  $\mathcal{P}_{\text{con}}^+(\zeta)$ , соответствующей модели без распада токового слоя.

**5.3. Область годографа магнитного поля  $\mathcal{W}_{\text{dis}}$ .** В соответствии с п. 2.4 область  $\mathcal{W}_{\text{dis}}$ , на которую аналитическая функция  $w = \mathcal{F}_{\text{dis}}(z)$  отображает исходную область  $G$ , называем областью годографа магнитного поля. Если данные задачи Римана — Гильберта таковы, что все корни полинома  $P_3(\zeta)$ , определяемого по формуле (5.9), вещественны, то из представления (5.8) для отображения  $w = \mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\zeta)$  вытекает, что  $\mathcal{W}_{\text{dis}}$  является восьмиугольной областью с вершинами  $A, B, P_1, M, P_2, C, P_3, E$ , где комплексные координаты точек  $C$  и  $E$  равны соответственно  $\mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\lambda)$  и  $\mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\tau)$  и даются формулами (5.10). Углы в указанных вершинах соответственно равны

$$\begin{aligned}\pi\delta_A &= -\frac{\pi}{2}, & \pi\delta_B &= \frac{\pi}{2}, & \pi\delta_{P_1} &= 2\pi, & \pi\delta_M &= -\frac{\pi}{2}, \\ \pi\delta_{P_2} &= 2\pi, & \pi\delta_C &= \pi\alpha, & \pi\delta_{P_3} &= 2\pi, & \pi\delta_E &= \pi\left(\frac{1}{2} - \alpha\right),\end{aligned}$$

см. рис. 4.7c на стр. 199), а прообразами этих вершин служат точки

$$\begin{aligned}\xi_A &= \infty, & \xi_B &= 0, & \xi_{P_1} &= p_1, & \xi_M &= \mu, \\ \xi_{P_2} &= p_2, & \xi_C &= \lambda, & \xi_{P_3} &= p_3, & \xi_E &= \tau,\end{aligned}$$

см. рис. 4.7b, стр. 199.

Для вычисления решения  $\mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\zeta)$  задачи Римана — Гильберта в  $\mathbb{H}^+$ , полученного в форме интеграла Кристоффеля — Шварца (5.9), представим в виде набора степенных разложений вблизи отмеченных выше прообразов вершин области  $\mathcal{W}_{\text{dis}}$ , а также вблизи прообразов некоторых регулярных точек этой области и ее границы. Эти разложения, аналогичные представлениям (3.27), (3.30) для интеграла (3.2), весьма удобны и эффективны при практическом вычислении функции  $\mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\zeta)$ . Указанных разложения строятся тем же способом, что и аналогичные разложения для функции  $\mathcal{P}_{\text{con}}^+(\zeta)$ , полученные в п. 4.3, стр. 224.

## §6. Численная реализация для задач Римана — Гильберта $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$

### 6.1. Алгоритм нахождения решений $\mathcal{F}_{\text{con}}$ и $\mathcal{F}_{\text{dis}}$ задач $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$ .

В соответствии со сказанным в п. 2.1 алгоритм решения задач  $\mathfrak{C}$  и  $\mathfrak{D}$  включает следующие четыре этапа.

Во–первых, находятся параметры  $\lambda$ ,  $\tau$  и  $\mathcal{K}$  конформного отображения  $z = \Phi^{-1}(\zeta)$ , определяемого в виде (3.2), с помощью метода из §3, стр. 209. При этом интегралы гипергеометрического типа, входящие в систему (3.3) выражаются через функцию Аппеля  $F_1$  по формулам (3.7)–(3.9) и для их вычисления используются представленные в главе II результаты об аналитическом продолжении этой функции. Способ построения начальных приближений для искомых параметров указан в п. 3.2.

Во–вторых, находится конформное отображение  $\zeta = \Phi(z)$  в виде набора разложений (3.28), (3.31), коэффициенты  $B_k^{(\mathfrak{P})}$  которых выражаются по формулам (3.29), (3.32) через величины  $b_k^{(\mathfrak{P})}$ . Метод нахождения коэффициентов изложен в 3.3.

В–третьих, строятся решения  $\mathcal{P}_{\text{con}}^+$  и  $\mathcal{P}_{\text{dis}}^+$  задачи Римана – Гильберта в полуплоскости  $\mathbb{H}^+$  в виде разложений, аналогичных тем, которые были применены для вычисления конформного отображения  $\Phi$ . Для функции  $\mathcal{P}_{\text{con}}^+$  такие разложения приведены в п. 4.3. Разложения функции  $\mathcal{P}_{\text{dis}}^+$  строятся вполне аналогичным способом и не приводятся здесь по причине достаточной громоздкости.

В–четвертых, решения  $\mathcal{F}_{\text{con}}(z)$  и  $\mathcal{F}_{\text{dis}}(z)$  задач  $\mathfrak{C}$  и  $\mathfrak{D}$  находятся по формулам (2.8) через построенные функции  $\zeta = \Phi(z)$ ,  $\mathcal{P}_{\text{con}}^+(\zeta)$  и  $\mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\zeta)$ .

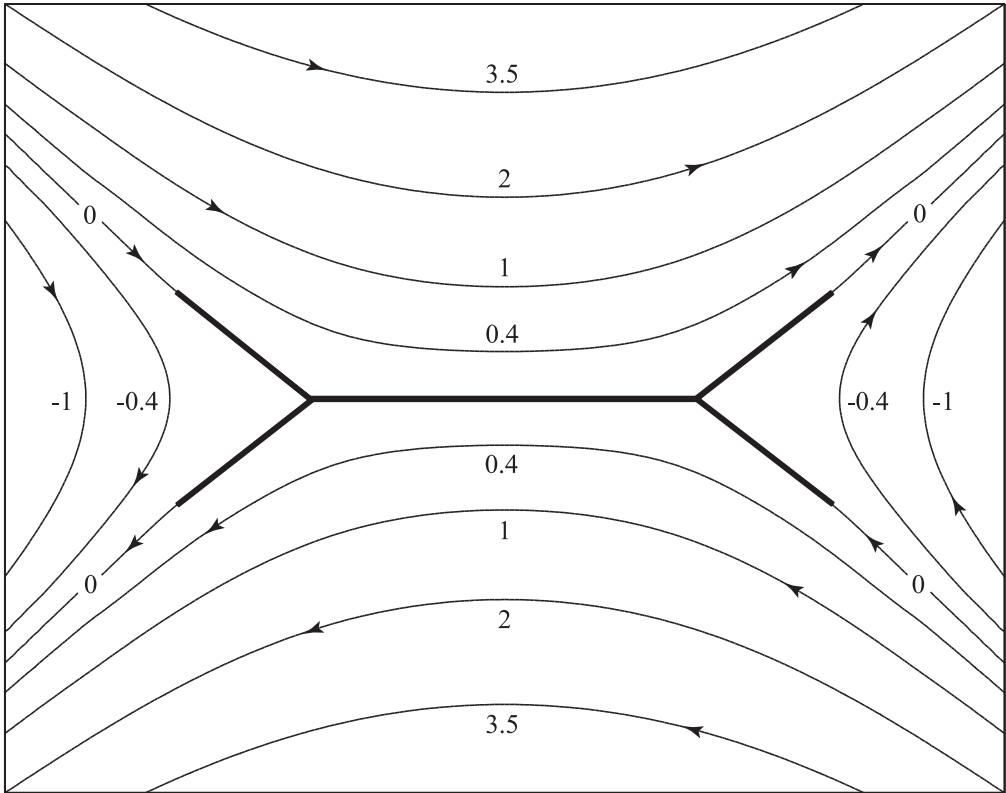
Проведенные вычислительные эксперименты позволяют сказать, что используемые для вычисления функций  $\Phi(z)$ ,  $\mathcal{P}_{\text{con}}^+(\zeta)$  и  $\mathcal{P}_{\text{dis}}^+(\zeta)$  разложения (коэффициенты которых вычисляются по достаточно простым формулам) представляют собой весьма эффективный и удобный вычислительный аппарат, обеспечивающий высокую относительную точность (порядка  $10^{-6}$  в норме

$C(\bar{\mathcal{X}} \setminus \{\infty\})$  или  $C(\bar{\mathcal{Y}} \setminus \{\infty, \pm a\})$  при малом времени вычислений (порядка 0.1 с). Для достижении такой точности для функций  $\mathcal{F}_{\text{con}}^+(z)$  и  $\mathcal{F}_{\text{dis}}^+(z)$  в упомянутых разложениях достаточно было удерживать обычно более 40 членов. Отметим еще простоту вычисления коэффициентов этих разложений.

**6.2. Картина магнитного поля в области пересоединения при наличии непрерывного или распадающегося токового слоя.** Численная реализация решений задач  $\mathfrak{C}$  и  $\mathfrak{D}$  была проведена для широкого набора свободных параметров соответствующих моделей магнитного пересоединения. Полученные результаты представлены в первую очередь в виде картин распределения линий магнитного поля. Такие картины отражают глобальное устройство поля в области пересоединения, а также его структуру вблизи токового слоя и ударных волн. Как показали численные эксперименты, картина поля в данных моделях существенно зависит от параметров задачи. Для того чтобы это продемонстрировать удобно зафиксировать геометрические параметры, а также параметр  $\gamma$ , и наблюдать за динамикой картины поля при изменении только одного параметра  $\beta$ . В задаче  $\mathfrak{C}$  полагаем  $b = 1 = r$ ,  $\alpha = 1/4$ ,  $\gamma = 1$ .

Прежде чем представить результаты для задачи  $\mathfrak{C}$ , вернемся к модели Сыроватского без ударных волн. На рис. 4.1 показаны семейства линий магнитного поля в окрестности токового слоя Сыроватского. Эти линии являются линиями уровня функции  $\mathcal{A}(z) = \text{Im } \Psi(z)$  — векторного потенциала магнитного поля; для изображенных на рис. 4.2 семейств линий поля  $\Psi$  определяется формулой (1.8). Рис. 4.1 соответствует значению  $\varepsilon$ , лежащему в диапазоне  $(0, b)$ , а рис. 4.2 — значению  $\varepsilon = b$ . Если выполняется условие  $0 \leq \varepsilon \leq b$ , то вне токового слоя нет точек, где поле обращается в нуль. Согласно работе Сыроватского [124], такая ситуация не требует введения дополнительных разрезов, соответствующих вторичным токовым слоям, и имеет физический смысл.

Переходя к обсуждения численных результатов для картины магнитного поля в задаче  $\mathfrak{C}$ , отметим, прежде всего, что для условия отсутствия нулей

Рис. 4.12. Картина магнитного поля в области  $X$  при  $\beta = 0$ .

поля в  $\overline{\mathbb{C}} \setminus X$  выполняется при  $\beta \in [0, \beta_0]$ , где предельное значение  $\beta_0$  находится из (4.15)–(4.17). При  $b = 1 = r$ ,  $\alpha = 1/4$  по формулам (4.15)–(4.17) вычисляем  $\beta_0 = 1.531023$ .

На рис. 4.12 представлена картина поля для предельного случая  $\beta = 0$ , а на рис. 4.13 — для предельного случая  $\beta = \beta_0$ . При  $\beta \in [0, \beta_0]$  токовый слой пересекают две симметрично расположенные силовые линии, отделяющие участки, где ток течет в противоположных направлениях. При этом замкнутые силовые линии и нулевые точки поля внутри области отсутствуют. Типичной для этого диапазона является картина поля, соответствующая  $\beta = 1$ , которая представлена на рис. 4.14.

При  $\beta \in (-\infty, 0)$  силовые линии не пересекают токовый слой, некоторые из них образуют замкнутые контуры с циркуляцией против часовой стрелки, а внутри области  $X$  возникают две нулевые точки поля, симметрично расположенные на вещественной оси. При  $\beta \in (\beta_0, +\infty)$  силовые линии также не пересекают токовый слой, некоторые из них образуют замкнутые контуры с циркуляцией поля по часовой стрелке, а внутри области  $X$  возникают две

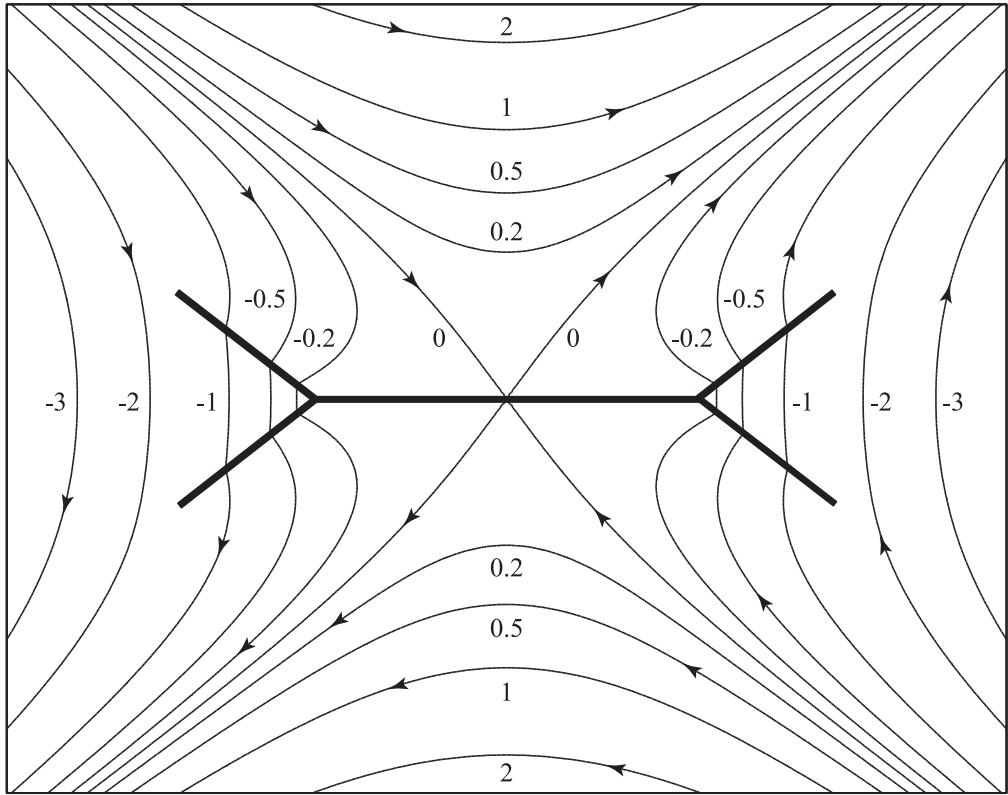


Рис. 4.13. Картина магнитного поля в области  $\mathcal{X}$  при  $\beta = \beta_0$ .

нулевые точки поля, симметрично расположенные на мнимой оси. (Мы не приводим численные результаты для этих диапазонов значений параметров, поскольку получаемые картины поля не соответствуют физическим предположениям модели.)

Прежде чем представить результаты для задачи  $\mathfrak{D}$ , вернемся к модели токового слоя без ударных волн. На рис. 4.8, 4.9 изображены семейства линий магнитного поля в окрестности распадающегося токового слоя. Эти линии являются линиями уровня функции  $\mathcal{A}(z) = \text{Im}\Psi(z)$ , где комплексный потенциал  $\Psi$  определяется формулой (2.28). На рис. 4.8 приведена картина поля при  $\varepsilon = b$ , когда магнитное поле обращается в ноль на внешних краях токового слоя. Рис. 4.9 соответствует значению  $\varepsilon$ , лежащему в диапазоне  $(a, b)$ . Если выполняется условие  $a \leq \varepsilon \leq b$ , то вне токового слоя не возникает точек (за исключением  $z = 0$ , имеющей особый статус), где поле обращается в нуль. Поэтому, согласно работе [124], такой диапазон изменения параметра  $\varepsilon$  имеет физический смысл. Дополнительно к этому ограничению мы будем предполагать, что обратный (компенсирующий) ток не может быть больше

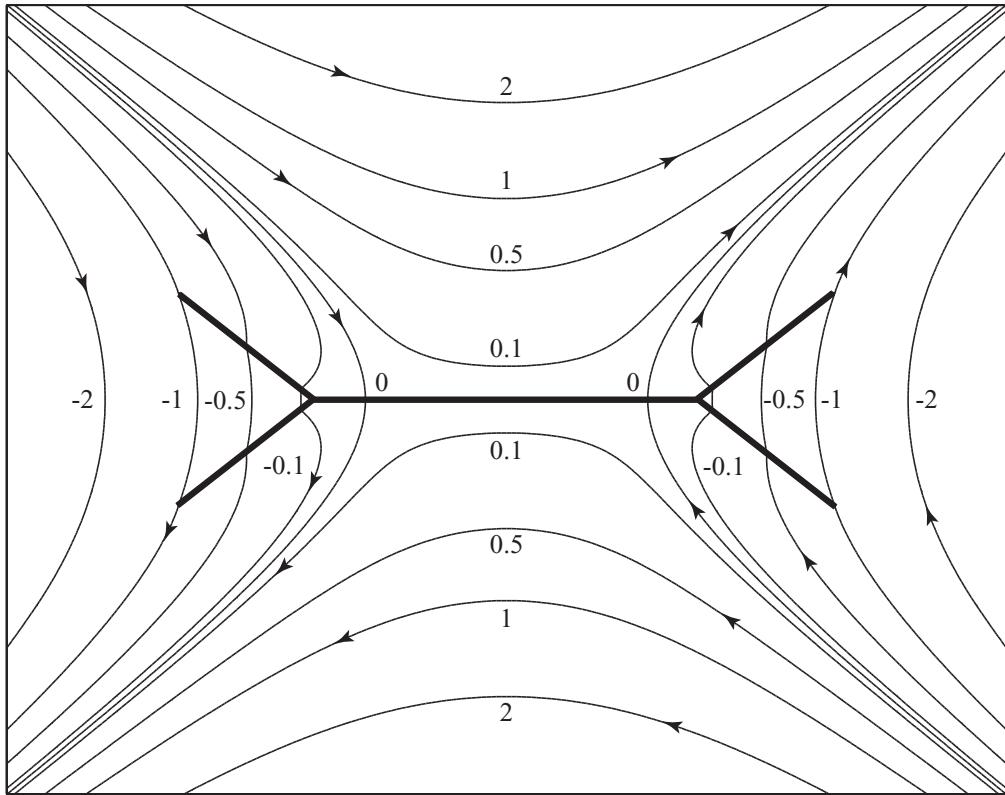


Рис. 4.14. Картина магнитного поля в области  $X$  при  $\beta = 1 \in (0, \beta_0)$ .

первичного прямого тока, обуславливающего процесс магнитного пересоединения в токовом слое.

На рис. 4.15–4.17 приведены картины магнитного поля для модели с распадающимся токовым слоем при наличии присоединенных ударных волн. На рисунках 4.16 и 4.17, соответствующих  $\beta = 0.3$  и  $\beta = 0.5$ , видны области прямого и обратного токов в токовом слое и преломление линий магнитного поля на присоединенных ударных волнах. На рис. 4.15, соответствующем  $\beta = 0$ , в токовом слое отсутствуют области обратного тока, а линии магнитного поля не пересекают ударные волны.

**6.3. Поведение поля вблизи ударной волны.** Изучим характер преломления магнитного поля на ударных волнах, т.е. на разрезах  $\Gamma_j$ . В силу условий симметрии поля (2.18) и (2.33) достаточно провести все рассмотрения только для разреза  $\Gamma_1$ .

Обозначим через  $\theta_1$  и  $\theta_2$  углы отклонения вектора магнитного поля (или что то же самое — силовой линии) от внутренних по отношению к области

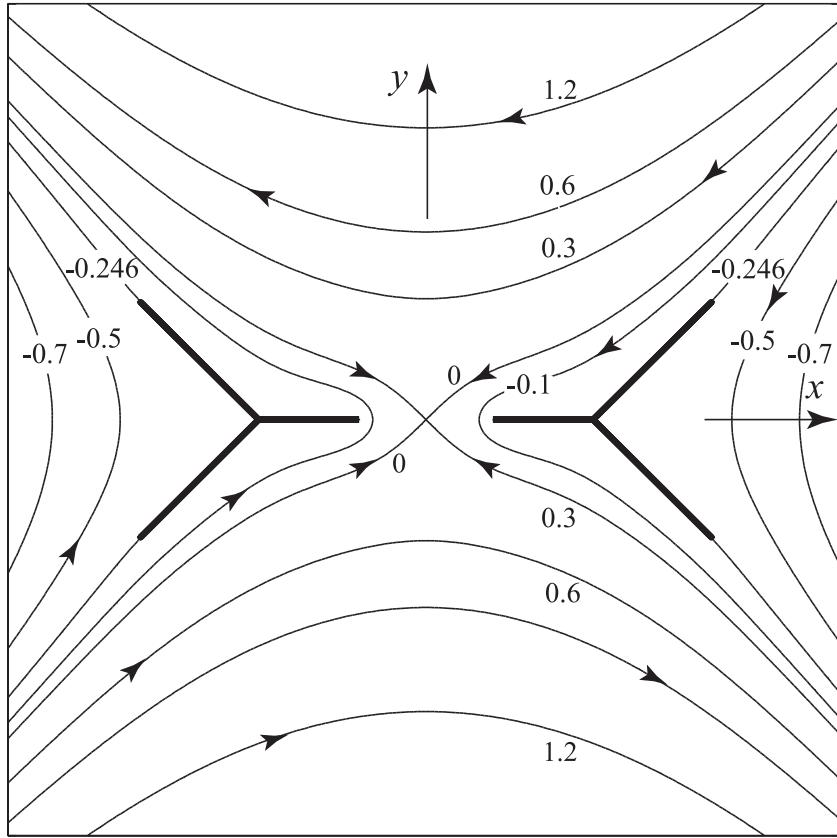


Рис. 4.15. Картина магнитного поля в области  $\mathcal{Y}$  при  $\beta = 0$ .

$G$  нормалей соответственно к участкам  $CD$  и  $DE$  ее границы, см. 4.6. Соотношение между этими углами определяет тип ударной волны, см., например, [227]. Если углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  положительны, то при выполнении соотношения  $\theta_2 > \theta_1$  ударная волна является медленной, а в случае обратного неравенства  $\theta_1 > \theta_2$  – быстрой МГД ударной волной. Если же на некоторой части фронта ударной волны выполняется неравенство  $\theta_1 < 0$ , то такая ситуация соответствует транс-альвеновской волне. Углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  могут быть вычислены через решения  $\mathcal{F}_{\text{con}}$  и  $\mathcal{F}_{\text{dis}}$  задач  $\mathfrak{C}$  и  $\mathfrak{D}$  следующим способом.

Введем на дуге  $(CDE)$  границы области  $G$  натуральный параметр  $s$ , т.е. текущую длину дуги, которую будем отсчитывать от вершины разреза в направлении обхода граничного контура, при котором область остается слева:

$$z(s) = b + r(1 - s \operatorname{sign} s) e^{i\pi\alpha}, \quad s \in [-1, 1], \quad \text{на } (CDE);$$

при этом подразумевается, что когда  $s$  возрастает от  $-1$  до  $0$ , то точка  $z(s)$  пробегает берег  $(CD)$ , а когда  $s$  возрастает от  $0$  до  $1$ , то точка  $z(s)$  пробегает берег  $(DE)$  наклонного разреза на рис. 4.6а.

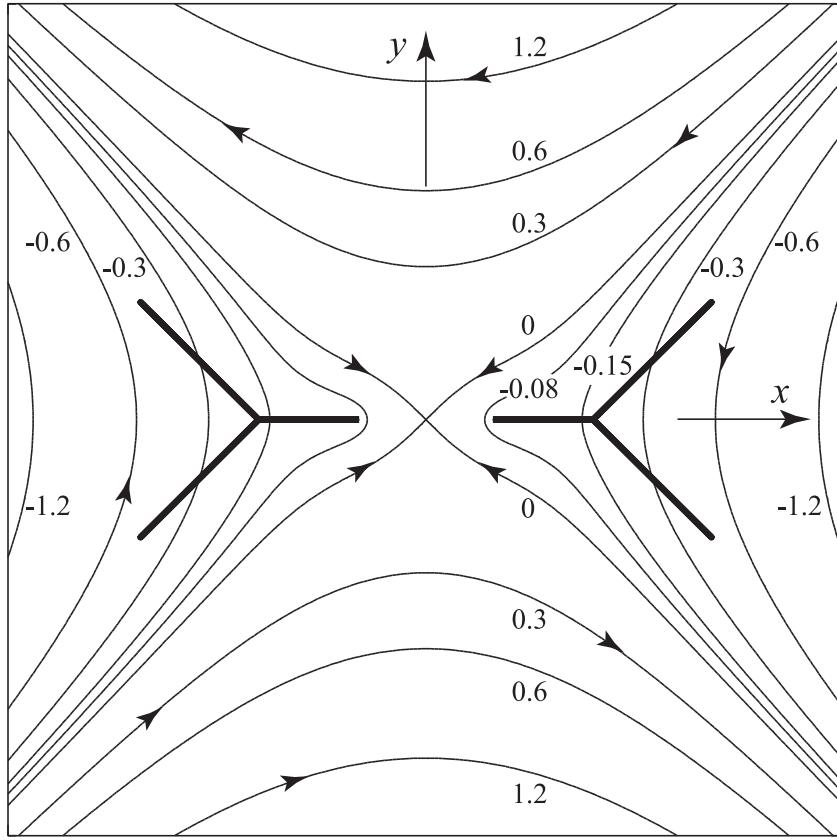


Рис. 4.16. Картина магнитного поля в области  $\mathcal{Y}$  при  $\beta = 0.3$ .

Образом точки  $z(s)$  при отображении  $\mathcal{F}_{\text{con}}$  будет точка  $w = \mathcal{F}_{\text{con}}(z(s))$  прямолинейного участка границы области  $\mathcal{W}_{\text{con}}$  на рис. 4.6с, представимая формулой

$$\mathcal{F}_{\text{con}}(\zeta(s)) = -\beta (\sin \pi \alpha)^{-1} + e^{-i\pi\alpha} \sigma_{\text{con}}(s), \quad s \in [-1, 1]. \quad (6.1)$$

Здесь вещественная величина  $\sigma_{\text{con}}(s)$  есть расстояние на плоскости годографа от точки  $C$  до  $\mathcal{F}_{\text{con}}(\zeta(s))$ . Следовательно, функция  $\sigma_{\text{con}}(s)$  находится из выражения

$$\sigma_{\text{con}}(s) = e^{i\pi\alpha} \{ \mathcal{F}_{\text{con}}[z(s)] + \beta (\sin \pi \alpha)^{-1} \}. \quad (6.2)$$

Нетрудно убедиться, что зависимость  $\theta(s)$  угла между линией поля и нормалью к наклонному разрезу от параметра  $s$  выражается через  $\sigma(s)$  следующим образом:

$$\theta(s) = \arctg [\beta^{-1} \sigma_{\text{con}}(s) - \operatorname{ctg} \pi \alpha], \quad (6.3)$$

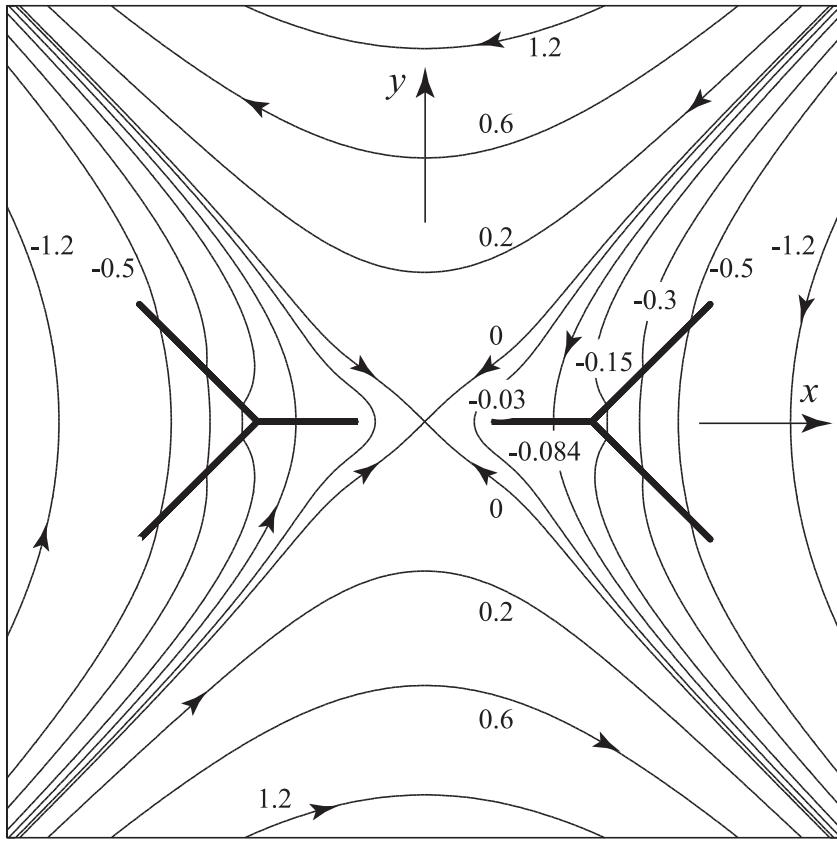


Рис. 4.17. Картина магнитного поля в области  $\mathcal{Y}$  при  $\beta = 0.5$ .

а величины  $\theta_1$  и  $\theta_2$  связаны с  $\theta$  соотношениями

$$\theta_1(s) = \theta(s), \quad s \in [-1, 0]; \quad \theta_2(s) = \theta(s), \quad s \in [0, 1].$$

Аналогичные формулы для углов  $\theta_1$  и  $\theta_2$  в задаче  $\mathfrak{D}$ , очевидно, получаются заменой  $\mathcal{F}_{\text{con}}$  на  $\mathcal{F}_{\text{dis}}$  в формулах (6.1)–(6.3).

Продолжим рассмотрение задачи  $\mathfrak{C}$ . Для того, чтобы сделать некоторые качественные выводы о влиянии параметров модели на соотношение между  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , удобно обратиться к области годографа  $\mathcal{W}_{\text{con}}$  магнитного поля, пример которой изображен на рис. 4.6. Ударной волне соответствует участок (*CPE*) границы области  $\mathcal{W}_{\text{con}}$ . Штриховой линией показаны оси, на которых откладываются значения нормальной  $B_n$  и касательной  $B_\tau$  по отношению к ударной волне компонент магнитного поля. Положим  $\tan \theta = B_\tau / B_n$ , где значения  $B_\tau$  и  $B_n$  вычислены в точке  $w_*$  участка (*CPE*) границы  $\mathcal{W}$ . Если прообраз  $z_* = \mathcal{F}^{-1}(w_*)$  точки  $w_*$  лежит на участке (*CD*) границы области  $G$  (рис. 4.6а), то  $\theta = \theta_1$ , а если на участке (*DE*) ее границы, то  $\theta = \theta_2$ .

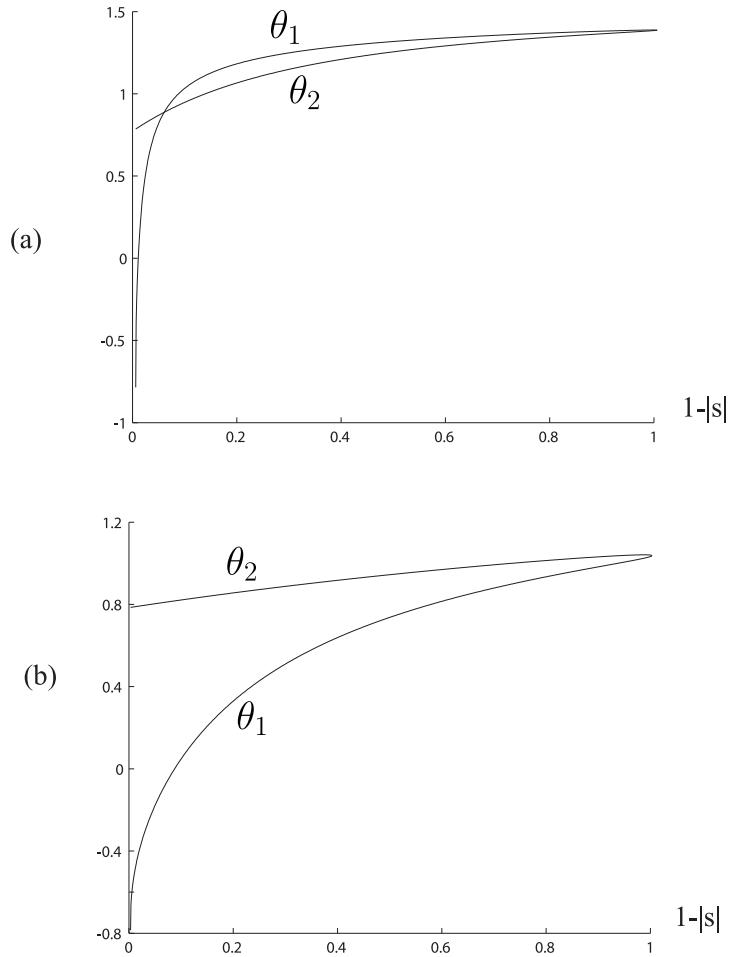


Рис. 4.18. Углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  между магнитным полем и нормалью к ударной волне.

Анализируя рис. 4с, нетрудно увидеть, что на всем участке (*CPE*) величина  $B_n$  постоянна и равна  $\beta$ . Это наглядно демонстрирует исходное предположение модели. Из рис. 4.6а, 4.6с видно, что вблизи точки *C* границы области годографа (а, следовательно, и вблизи точки *C* границы исходной области *G*) существует участок границы, где  $B_\tau < 0$ . Между тем, вблизи точки *E* существует участок границы, где  $B_\tau > 0$ . Отсюда вытекает, что у основания ударной волны (т.е. вблизи точки присоединения ее к токовому слою), при любых параметрах модели существует отрезок  $\gamma_{\text{ta}}$  ударной волны, где угол  $\theta_1$  отрицателен, а угол  $\theta_2$  положителен. Как уже отмечалось выше, такая ситуация соответствует транс-альвеновской МГД ударной волне.

Если для параметра  $p$  в представлении (4.9) выполняется неравенство  $0 < p < 1$ , то вблизи точки *D*, являющейся внешним концом ударной волны,

выполняется соотношение  $\theta_1 > \theta_2$ , что соответствует медленной МГД ударной волне. Поскольку  $\theta_1$  непрерывно увеличивается от отрицательных значений до положительных, то при  $0 < p < 1$  должен существовать участок  $\gamma_{fast}$  дуги  $(CDE)$ , на котором выполняется неравенство  $\theta_2 > \theta_1$ , что соответствует быстрой ударной волне. Область годографа  $\mathcal{W}_{con}$ , изображенная на рис. 4.6с, соответствует описанной ситуации.

Если  $p > \tau$ , то область годографа отличается от изображенной на рис. 4.6с. В этом случае величина  $B_\tau$  на дуге  $(CD)$  всегда больше этой величины на дуге  $(DE)$  границы области  $\mathcal{W}_{con}$  (а, следовательно, и  $G$ ). Это означает, что соотношение  $\theta_2 > \theta_1$  выполняется на всей дуге  $(CDE)$ , т.е. участок транс-альвеновской волны сменяется участком быстрой волны, а последующий переход к медленной МГД ударной волне отсутствует.

Используя выражение (4.10) для величины  $p$ , перепишем в терминах параметров модели условие  $p < 1$ , которое является достаточным для одновременного существования участков на дуге  $(CDE)$  границы области  $G$ , соответствующих быстрой и медленной ударным волнам:

$$\frac{\beta}{\gamma} < \pi^{3/2} \mathcal{K} \frac{1 - 2\alpha(\tau - \lambda) - \lambda}{\sqrt{\tau - \lambda} \Gamma(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + 1/2)}.$$

Аналогичным образом перепишем условие  $p > \tau$ , при котором отсутствует переход от быстрой волны к медленной:

$$\frac{\beta}{h} > \pi^{3/2} \mathcal{K} \frac{\tau - 2\alpha(\tau - \lambda) - \lambda}{\sqrt{\tau - \lambda} \Gamma(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + 1/2)}.$$

Как показывает вычислительный эксперимент, эти неравенства достаточны, но не являются необходимыми для существования или несуществования указанной смены типа ударной волны, и при выполнении условия  $1 < p < \tau$  возможны обе указанные структуры ударной волны. На рис. 4.18 приведены графики углов  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , вычисленные соответственно при  $\beta = 0.3$ ,  $\gamma = 1$  и при  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ . Для таких значений параметров выполняется соотношение  $1 < p < \tau$ . Видно, что рис. 4.18а соответствует тому, что ударная волна делится на три зоны, соответствующие транс-альвеновской, быстрой и медленной волнам; на рис. 4.18б есть зоны транс-альвеновской и быстрой волн, а зона медленной волны отсутствует.

## §7. Решение задачи со свободной границей, возникающей при моделировании магнитосферы нейтронной звезды

**7.1. Постановка задачи со свободной границей.** Математическая постановка задачи заключается в следующем. В рассматриваемой модели [117] магнитосфера звезды представляет собой симметричную односвязную область  $G$  на комплексной плоскости  $z = x + iy$ , см. рис. 4.5а.

Магнитное поле  $\mathbf{B} = (B_x(x, y), B_y(x, y), 0)$  считается потенциальным в области  $G$  за исключением начала координат  $z = 0$ , где расположен точечный магнитный диполь, моделирующий поле звезды; направление диполя совпадает с направлением оси  $y$ , а его величина равна  $\mu$ . Это означает, что функция  $\bar{\mathcal{B}}(z)$ , сопряженная с "комплексным" магнитным полем  $\mathcal{B}(z) = B_x(x, y) + iB_y(x, y)$ , является аналитической в  $G \setminus \{0\}$ , и выполняется асимптотическое соотношение

$$\bar{\mathcal{B}}(z) = i \frac{\mu}{z^2} + \mathcal{O}(1), \quad z \rightarrow 0. \quad (7.1)$$

Граница области  $G$  состоит из двух дуг  $\Gamma$  и  $\gamma$ , см. рис. 4.5а. Форма кривой  $\Gamma$ , изображающей магнитопаузу, заранее неизвестна и определяется равенством внешнего газового давления  $p$  потока плазмы и давления магнитного поля  $\mathcal{B}$ :

$$\frac{|\mathcal{B}|^2}{8\pi} = p, \quad z \in \Gamma; \quad (7.2)$$

величина  $p$  считается постоянной. Бесконечный прямолинейный разрез  $\gamma$  вдоль вещественной оси представляет собой сечение токового слоя, перпендикулярного плоскости  $z$ . Координата  $z = \varepsilon$  концевой точки  $B$  и полуширина  $H$  хвоста магнитосферы на бесконечности заданы.

Предполагается, что магнитное поле не проникает через  $\Gamma$  и  $\gamma$ , т.е. выполняются соотношения

$$(\mathbf{B}, \mathbf{n}) = 0, \quad z \in (\Gamma \cup \gamma), \quad (7.3)$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к  $\Gamma$  или  $\gamma$ .

Для описания поля  $\mathcal{B}(z)$  введем комплексный потенциал, представляющий собой аналитическую функцию  $\mathcal{F}(z)$ , связанную с  $\mathcal{B}(z)$  соотношением

$$i\mathcal{F}'(z) = \overline{\mathcal{B}}(z). \quad (7.4)$$

Потенциал  $\mathcal{F}(z)$  считается непрерывным в  $\overline{G} \setminus \{N, E_1, E_2\}$ . Условие (7.3) с учетом такой непрерывности означает, что на дугах  $\Gamma$  и  $\gamma$  границы области  $G$  вещественная часть  $\mathcal{F}(z)$  принимает постоянные значения, которые полагаем равными соответственно 0 и  $-\pi Q$ .

Из соотношений (7.1), (7.3) получаем следующие условия для потенциала

$$\mathcal{F}(z) = -\frac{\mu}{z} + \mathcal{O}(1), \quad z \rightarrow 0, \quad (7.5)$$

$$\operatorname{Re} \mathcal{F} = -\pi Q, \quad z \in \gamma; \quad \operatorname{Re} \mathcal{F} = 0, \quad z \in \Gamma. \quad (7.6)$$

Условие (7.2), определяющее форму кривой  $\Gamma$ , приобретает вид

$$|\mathcal{F}'(z)|^2 = 8\pi p, \quad z \in \Gamma. \quad (7.7)$$

Параметрами модели являются величины  $p$ ,  $\mu$ ,  $\varepsilon$  и  $H$ . Задача заключается в том, чтобы по заданным значениям этих параметров и соотношениям (7.5)–(7.7) найти форму границы магнитосферы (кривую  $\Gamma$ ) и вычислить магнитное поле  $\mathcal{B}(z)$  в области  $G$ .

## 7.2. Сведение задачи со свободной границей к двум задачам

**Римана — Гильберта.** Обратимся к решению сформулированной задачи. Отметим, что близкие методы решения задач со свободной границе рассматривались в [59]. Введем конформное отображение  $z = \Phi(\zeta)$  верхней полуплоскости  $\mathbb{H}^+ = \{\zeta : \operatorname{Im} \zeta > 0\}$  на область  $G$  с неизвестной граничной дугой  $\Gamma$ . Магнитный потенциал  $\mathcal{F}(z)$ , определенный в области  $G$ , при таком отображении перейдет в функцию

$$\mathcal{P}(\zeta) := \mathcal{F} \circ \Phi(\zeta), \quad (7.8)$$

для которой в  $\mathbb{H}^+$  возникнет задача, аналогичная (7.5), (7.6). После построения  $\Phi$  и  $\mathcal{P}$  кривая  $\Gamma$  и магнитный потенциал  $\mathcal{F}$  будут найдены по формулам

$$\Gamma = \{z : z = \Phi(\zeta), \operatorname{Re} \zeta \in (-1, 1), \operatorname{Im} \zeta = 0\}, \quad \mathcal{F}(z) = \mathcal{P} \circ \Phi^{-1}(z), \quad (7.9)$$

где  $\zeta = \Phi^{-1}(z)$  — отображение  $G$  на  $\mathbb{H}^+$ , обратное к  $\Phi$ .

Искомое конформное отображение  $z = \Phi(\zeta)$  подчиним следующим условиям, которые его однозначно определяют:

$$\Phi(-1) = E_1, \quad \Phi(1) = E_2, \quad \Phi(\infty) = B. \quad (7.10)$$

Точки на плоскостях  $z$  и  $\zeta$ , соответствующие друг другу при отображении  $\Phi$ , будем обозначать одинаковыми буквами, см. рис. 4.5a, 4.5b. В силу симметрии областей  $G$ ,  $\mathbb{H}^+$  и выбранных условий (7.10) прообразом точки  $N$  плоскости  $z$ , где располагается магнитный диполь, будет точка на мнимой оси плоскости  $\zeta$  с комплексной координатой, обозначаемой  $ih$ .

Функция  $\mathcal{P}(\zeta)$ , определяемая формулой (7.8), удовлетворяет на вещественной оси следующим условиям Римана — Гильберта и условию роста, вытекающим из (7.5), (7.6):

$$\operatorname{Re}\mathcal{P}(\zeta) = -\pi Q, \quad \zeta \in (BE_1) \cup (E_2B); \quad \operatorname{Re}\mathcal{P}(\zeta) = 0, \quad \zeta \in (E_1E_2); \quad (7.11)$$

$$\mathcal{P}(\zeta) = -\frac{iM}{\zeta - ih} + \mathcal{O}(1), \quad \zeta \rightarrow ih, \quad (7.12)$$

где  $M = \mu|\Phi'(ih)|^{-1}$ . Кроме этих условий, задачу для  $\mathcal{P}(\zeta)$  дополним еще следующими асимптотиками при  $\zeta \rightarrow \pm 1$ , согласующимися с условиями (7.11) разрыва вещественной части аналитической функции  $\mathcal{P}(\zeta)$ , и асимптотикой на бесконечности, согласующейся с (7.12):

$$\mathcal{P}(\zeta) = \mathcal{O}(\ln(\zeta \pm 1)), \quad \zeta \rightarrow \pm 1; \quad \mathcal{P}(\zeta) = \mathcal{O}(1), \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (7.13)$$

Нетрудно убедиться в том, что аналитическая в  $\mathbb{H}^+$  за исключением  $\zeta = ih$  и непрерывная в  $\overline{\mathbb{H}^+} \setminus \{E_1, E_2, N\}$  функция  $\mathcal{P}$ , удовлетворяющая условиям (7.11)–(7.13), единственна и имеет следующий вид:

$$\mathcal{P}(\zeta) = iQ \ln \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} + \frac{M}{2h} \left( \frac{\zeta - ih}{\zeta + ih} - \frac{\zeta + ih}{\zeta - ih} \right). \quad (7.14)$$

Физический смысл задачи (7.5)–(7.7) предполагает существование двух точек заострения на кривой  $\Gamma$  и наличие обратного тока в токовом слое. Для этого достаточно предположить (см. пп. 5, 6), что все четыре нуля  $\zeta = \pm\sigma, \pm\tau$

производной  $\mathcal{P}'(\zeta)$  потенциала (7.14) вещественны и выполняются неравенства  $\sigma < 1$ ,  $\tau > 1$ . Отсюда получаем следующее обеспечивающее указанные эффекты соотношение для параметров модели:

$$0 < \frac{Q}{M} < \min \{ 1, h^{-2} \}. \quad (7.15)$$

С учетом сказанного, из (7.14) находим производную  $\mathcal{P}'(\zeta)$  в виде

$$\mathcal{P}'(\zeta) = 2i(Q - M)\mathcal{C}(\zeta), \quad \mathcal{C}(\zeta) = \frac{(\zeta^2 - \sigma^2)(\zeta^2 - \tau^2)}{(1 - \zeta^2)(\zeta^2 + h^2)^2}, \quad (7.16)$$

где числа  $\sigma$  и  $\tau$  даются равенствами

$$\sigma = \frac{b - \sqrt{D}}{2a}, \quad \tau = \frac{b + \sqrt{D}}{2a}, \quad (7.17)$$

в которых

$$a = M - Q, \quad b = 2h^2Q + (1 + h^2)M, \quad D = [8h^2(1 + h^2)Q + (1 - h^2)^2M]M.$$

На рис. 4.5а, 4.5б, стр. 194, точки, соответствующие нулям  $\zeta = \pm\sigma$ , обозначены через  $C_1, C_2$ , а соответствующие нулям  $\zeta = \pm\tau$  — через  $X_1, X_2$ .

**7.3. Построение конформного отображения  $z = \Phi(\zeta)$ .** Перейдем к построению конформного отображения  $z = \Phi(\zeta)$ . Прежде всего отметим, что условие (7.7) на  $\Gamma$  при отображении  $G$  на  $\mathbb{H}^+$  преобразуется с учетом (7.8) в следующее соотношение на интервале  $(E_1E_2)$  вещественной оси для производной  $\Phi'(\zeta)$

$$|\Phi'(\zeta)| = (8\pi p)^{-1/2} |\mathcal{P}'(\zeta)|, \quad \zeta \in (E_1E_2), \quad (7.18)$$

где  $\mathcal{P}'(\zeta)$  определяется из (7.16).

Для того чтобы сформулировать условие для  $\Phi'(\zeta)$  на остальной части  $\mathbb{R}$ , заметим, что луч  $(BE_1)$  преобразуется отображением  $\Phi$  в верхний берег разреза  $\gamma$ , а  $(E_2B)$  — в нижний берег этого разреза. Отсюда, используя геометрический смысл аргумента производной конформного отображения, находим

$$\arg \Phi'(\zeta) = 0, \quad \zeta \in (BE_1); \quad \arg \Phi'(\zeta) = \pi, \quad \zeta \in (E_2B). \quad (7.19)$$

Вводя аналитическую функцию

$$\Psi(\zeta) := \ln \Phi'(\zeta), \quad (7.20)$$

и переписывая с ее помощью равенства (7.18) и (7.19), приходим к следующему краевому условию задачи Римана — Гильберта относительно  $\Psi(\zeta)$ :

$$\operatorname{Re} [\nu(\zeta) \Psi(\zeta)] = c(\zeta), \quad (7.21)$$

где коэффициент  $\nu(\zeta)$  и правая часть  $c(\zeta)$  даются равенствами

$$\nu(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta \in (E_1 E_2); \\ i, & \zeta \in (B E_1) \cup (E_2 B); \end{cases} \quad (7.22)$$

$$c(\zeta) = \begin{cases} \ln p_0 + \ln |\mathcal{C}(\zeta)|, & \zeta \in (E_1 E_2); \\ 0, & \zeta \in (B E_1); \\ \pi, & \zeta \in (E_2 B), \end{cases}$$

$$p_0 = (M - Q)/\sqrt{2\pi p}, \quad (7.23)$$

где  $\mathcal{C}(\zeta)$  дается вторым равенством (7.16). Дополним задачу для  $\Psi(\zeta)$  следующими асимптотиками при  $\zeta \rightarrow \pm 1$  и  $\zeta \rightarrow \infty$ :

$$\Psi(\zeta) = \mathcal{O}(\ln(\zeta \pm 1)), \quad \zeta \rightarrow \pm 1; \quad \Psi(\zeta) = \mathcal{O}(\ln \zeta), \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad (7.24)$$

согласующимися с тем, что коэффициент  $\nu(\zeta)$  и правая часть  $c(\zeta)$  краевого условия (7.21) разрывны, а также с предполагаемым видом области  $G$ , см. рис. 1а, и тем, что функция  $\Psi(\zeta)$  связана с производной конформного отображения  $\mathbb{H}^+$  на  $G$  формулой (7.20).

Опираясь на результаты главы I, можно показать, что решение задачи Римана — Гильберта, заключающейся в нахождении аналитической в  $\mathbb{H}^+$  и непрерывной в  $\overline{\mathbb{H}^+} \setminus \{E_1, E_2, B\}$  функции  $\Psi(\zeta)$ , удовлетворяющей условиям (7.21)–(7.24), существует, единственно и имеет следующее представление в виде интеграла типа Коши:

$$\Psi(\zeta) = \frac{\mathcal{X}(\zeta)}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{c(t) dt}{\mathcal{X}(t) \nu(t)(t - \zeta)}, \quad (7.25)$$

где  $\mathcal{X}(\zeta) = \sqrt{\zeta^2 - 1}$  — каноническое решение однородной задачи Римана — Гильберта.

**7.4. Представление для конформного отображения в виде интеграла типа Кристоффеля — Шварца.** Вычисляя интеграл (7.25) с использованием геометрического подхода к задаче Римана — Гильберта, развиваемого в главе III и формулы типа Якоби для функции Аппеля  $F_1$ , получаем следующее выражение для  $\Psi(\zeta)$ :

$$\Psi(\zeta) = \ln \frac{p_0(\zeta^2 - \sigma^2) \left[ 1 - (\tau\zeta + \sqrt{\tau^2 - 1}\sqrt{\zeta^2 - 1})^2 \right]}{(\zeta^2 - 1)(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \left[ 1 + (h\zeta + \sqrt{h^2 + 1}\sqrt{\zeta^2 - 1})^2 \right]^2}, \quad (7.26)$$

где постоянная  $p_0$  определяется формулой (7.23).

Из равенств (7.20) и (7.26) находим выражение для производной  $\Phi'(\zeta)$  искомого конформного отображения  $z = \Phi(\zeta)$ . Интегрируя это выражение, получаем следующее представление для отображающей функции  $\Phi(\zeta)$  в виде интеграла

$$\Phi(\zeta) = -2p_0 \lambda^{-2} \delta^4 \int_{\mathcal{Z}(ih)}^{\mathcal{Z}(\zeta)} \frac{(t^2 - 2\sigma t + 1)(t^2 + 2\sigma t + 1)(t^2 - \lambda^2)^2}{t(t^2 - 1)(t^2 + \delta^2)^4} dt, \quad (7.27)$$

где  $\mathcal{Z}(\zeta) = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$  — обратная функция Жуковского, а  $\delta$  и  $\lambda$  выражаются через  $h$  и  $\tau$  по формулам

$$\delta = \sqrt{h^2 + 1} - h, \quad \lambda = \tau - \sqrt{\tau^2 - 1}. \quad (7.28)$$

Вычисляя интеграл (7.27) путем разложения подынтегральной функции на простые дроби, получаем  $\Phi(\zeta)$  в виде конечной комбинации логарифмов и степеней обратной функции Жуковского:

$$\Phi(\zeta) = \mathcal{K} [\tilde{\Phi}(ih) - \tilde{\Phi}(\zeta)], \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\zeta) = \varkappa_1 \ln \mathcal{Z}(\zeta) + \varkappa_2 \ln [\mathcal{Z}^2(\zeta) - 1] + \varkappa_3 \ln [\mathcal{Z}^2(\zeta) + \delta^2] + \\ + \sum_{k=1}^3 c_k [\mathcal{Z}^2(\zeta) + \delta^2]^{-k}, \end{aligned} \quad (7.30)$$

$$\begin{aligned} \varkappa_1 = -\frac{2\lambda^4}{\delta^8}, \quad \varkappa_2 = \frac{4(1 - \sigma^2)(1 - \lambda^2)^2}{(1 + \delta^2)^4}, \\ \varkappa_3 = \frac{\lambda^4}{\delta^8} - \frac{4(1 - \sigma^2)(1 - \lambda^2)^2}{(1 + \delta^2)^4}, \end{aligned} \quad (7.31)$$

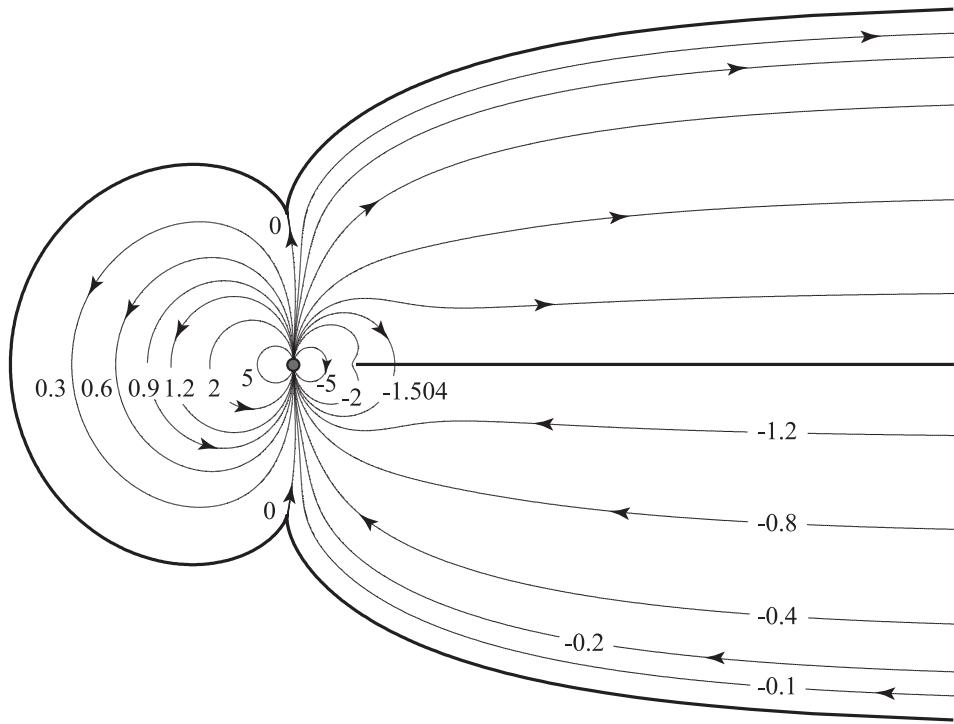


Рис. 4.19. Форма границы магнитосферы и картина магнитного поля, соответствующие  $p = 1$ ,  $\mu = 0.15$ ,  $\varepsilon = 0.05$  и  $H = 0.3$ .

$$c_1 = -1 + \frac{\lambda^4}{\delta^6} + \frac{4(1 - \sigma^2)(1 - \lambda^2)^2}{(1 + \delta^2)^3}, \quad (7.32)$$

$$c_2 = -\frac{3}{2} + 2\sigma^2 + \lambda^2 + \delta^2 - \frac{\lambda^4}{2\delta^4} + \frac{2(1 - \sigma^2)(1 - \lambda^2)^2}{(1 + \delta^2)^2},$$

$$c_3 = -\frac{[\delta^4 - 2(1 - \sigma^2)\delta^2 + 1](\delta^2 + \lambda^2)^2}{3\delta^2(\delta^2 + 1)}, \quad \mathcal{K} = \frac{(M - Q)\delta^4}{\sqrt{2\pi p} \lambda^2}. \quad (7.33)$$

Здесь  $\sigma$  и  $\tau$  даются формулами (7.17), а  $\lambda$  и  $\tau$  — формулами (7.28).

Зависимость величин  $M$ ,  $Q$  и  $h$  от параметров  $p$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  и  $H$  модели выражается следующими соотношениями:

$$M |\Phi'(ih)| = \mu, \quad \mathcal{K} \tilde{\Phi}(ih) = \varepsilon, \quad \frac{\pi}{2} \mathcal{K} \varkappa_2 = H.$$

**7.5. Численные результаты для формы магнитосферы и магнитного поля.** Подытоживая результаты пп. 7.2–7.4, получаем решение исходной задачи (7.5)–(7.7) в явном аналитическом виде: искомая форма границы  $\Gamma$  магнитосферы дается первой, а требуемый магнитный потенциал  $\mathcal{F}(z)$  —

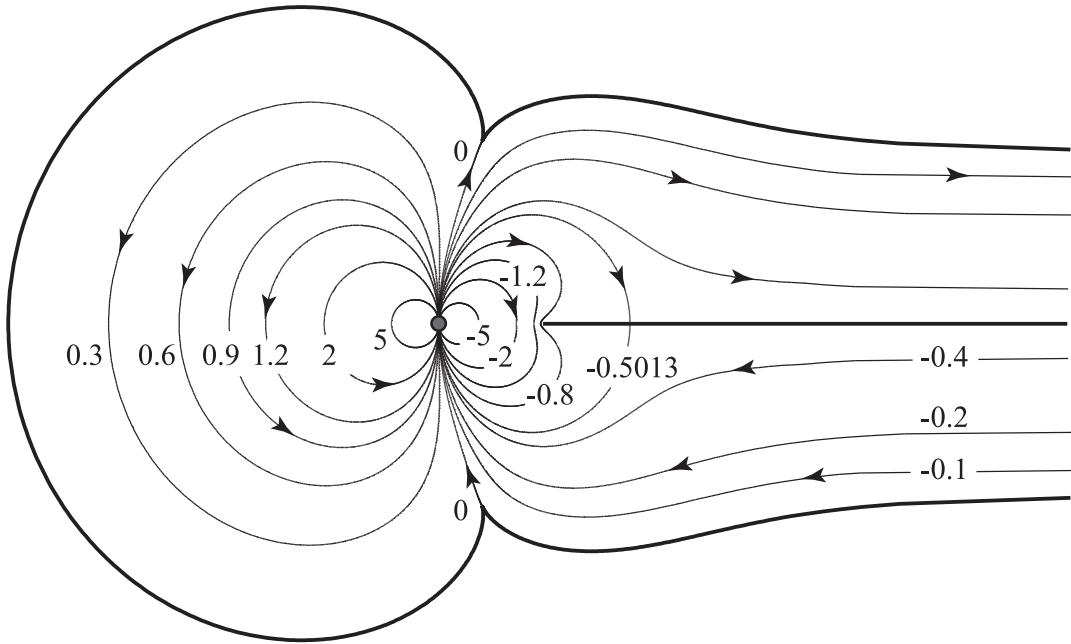


Рис. 4.20. Форма границы магнитосферы и картина магнитного поля, соответствующие  $p = 1$ ,  $\mu = 0.15$ ,  $\varepsilon = 0.06$  и  $H = 0.1$ .

второй формулой (7.9), в которых функция  $\mathcal{P}$  определяется равенством (7.14), а конформное отображение  $z = \Phi(\zeta)$  — формулами (7.29)–(7.33).

На рис. 4.19 приведены форма  $\Gamma$  границы магнитосферы и распределение линий магнитного поля, соответствующие  $p = 1$ ,  $\mu = 0.15$ ,  $\varepsilon = 0.08$ ,  $H = 0.2$ , а на рис. 4.20 — аналогичные данные, соответствующие  $p = 1$ ,  $\mu = 0.15$ ,  $\varepsilon = 0.06$ ,  $H = 0.1$ . На этих рисунках видны участки обратного тока на внутреннем крае токового слоя, отделенные от участков прямого тока линией магнитного поля, пересекающей слой.

Наличие обратных токов в токовом слое характеризует неравновесную магнитосферу, образованную в результате взаимодействия ударной волны от сверхновой с магнитным полем нейтронной звезды, в отличие от равновесной магнитосферы, например магнитосферы Земли, сформированной квазистационарным потоком плазмы солнечного ветра. Обратный ток позволяет накопить избыток магнитной энергии, который реализуется в виде импульсных всплесков гамма-излучения [117] или другого жесткого электромагнитного излучения.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ

### А.1. Интеграл типа Коши со специальной плотностью. Поведение в концевых точках контура.

Пусть рассматриваемая дуга разомкнутая; тогда, как и выше,  $a$  и  $b$  — ее концевые точки, а саму дугу обозначим  $\mathcal{L}_{a,b}$ . Если функция  $\lambda(z)$  гёльдерова на  $\mathcal{L}_{a,b}$ , а в концевых точках удовлетворяет одностороннему условию Гёльдера, то будем писать  $\lambda \in H\ddot{o}l(\mathcal{L}_{a,b})$ .

Рассмотрим интеграл типа Коши по дуге  $\mathcal{L}_{a,b}$  с плотностью

$$\lambda(t) = \tilde{\lambda}(t)(t - c)^{-\gamma}, \quad (\text{a.1})$$

где  $c$  — одна из концевых точек ( $a$  или  $b$ );  $\gamma \in [0, 1)$  — показатель степени, а функция  $\tilde{\lambda}(t)$  принадлежит классу  $H\ddot{o}l(\mathcal{L}_{a,b})$ .

Рассмотрим поведение такого интеграла типа Коши в концевой точке  $c$ . Окрестность точки  $z = c$ , разрезанную вдоль кривой  $\mathcal{L}_{a,b}$ , обозначим  $O_c \setminus \mathcal{L}_{a,b}$ .

Согласно [95] имеет место

**Предложение а.1.** *Пусть плотность  $\lambda(t)$  интеграла типа Коши (4.1), взятого по дуге  $\mathcal{L}_{a,b}$ , имеет вид (a.1). Тогда в некоторой разрезанной окрестности  $O_c \setminus \mathcal{L}_{a,b}$ , точки  $c$ , где  $c \in \{a, b\}$ , справедливы следующие представления для  $F(z)$ .*

1) *Если  $\gamma = 0$  и  $\tilde{\lambda}(c) \neq 0$ , то*

$$F(z) = \mp \frac{\tilde{\lambda}(c)}{2\pi i} \ln(z - c) + F_0(z), \quad z \in O_c \setminus \mathcal{L}_{a,b},$$

*где верхний знак берется при  $c = a$ , нижний — при  $c = b$ ; под  $\ln(z - c)$  подразумевается любая ветвь логарифма в  $O_c \setminus \mathcal{L}_{a,b}$ ;  $F_0(z)$  — некоторая голоморфная в  $O_c \setminus \mathcal{L}_{a,b}$  функция, стремящаяся к определенному конечному пределу при  $z \rightarrow c$ .*

2) *Если  $\gamma = 0$  и  $\tilde{\lambda}(c) = 0$ , то интеграл типа Коши представляет собой голоморфную в  $O_c \setminus \mathcal{L}_{a,b}$  функцию, стремящуюся к конечному пределу при  $z \rightarrow c$ :*

$$\lim_{z \rightarrow c} F(z) = A < \infty, \quad z \in O_c \setminus \mathcal{L}_{a,b}. \quad (\text{a.2})$$

3) Если  $\gamma \in (0, 1)$ , то

$$F(z) = \pm \frac{e^{\pm \gamma \pi i} \tilde{\lambda}(c)}{2i \sin \pi \gamma} (z - c)^{-\gamma} + F_1(z), \quad z \in O_c \setminus \mathcal{L}_{a,b},$$

где знаки выбираются так же как и в утверждении 1), функция  $(z - c)^{-\gamma}$  принимает на левом берегу разреза  $\mathcal{L}_{a,b}$  значения  $(t - c)^{-\gamma}$  из формулы (a.1), а  $F_1(z)$  — некоторая голоморфная в  $O_c \setminus \mathcal{L}_{a,b}$  функция, имеющая асимптотику  $F_1(z) = o((z - c)^{-\gamma})$  при  $z \rightarrow c$ .

## А.2. Доказательство теоремы 1.1.

1) Выберем некоторые положительные числа  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  и представим интеграл (4.6), стр. 46, в виде суммы

$$\Lambda(\zeta) = \sum_{j=1}^3 \Lambda_j(\zeta), \quad (\text{a.3})$$

где интегралы  $\Lambda_j(\zeta)$ , определяемые формулами

$$\Lambda_j(\zeta) = \Lambda_j^\pm(\zeta) := \frac{\zeta - \delta}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_j} \frac{\lambda(t) dt}{(t - \delta)(t - \zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{H}^\pm, \quad (\text{a.4})$$

взяты соответственно по промежуткам  $\mathcal{L}_1 := (-\infty, \delta - \varepsilon_1)$ ,  $\mathcal{L}_2 := (\delta - \varepsilon_1, \delta + \varepsilon_2)$  и  $\mathcal{L}_3 := (\delta + \varepsilon_2, +\infty)$ .

Поскольку подынтегральная функция в  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_3$  кусочно-непрерывна и ограничена на отрезках интегрирования, а ее модуль убывает на бесконечности как  $|t|^{-2}$ , то интегралы  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_3$  существуют как несобственные для всех  $\zeta \in \mathbb{H}^\pm$ . Таким образом, функции  $\Lambda_1(\zeta)$  и  $\Lambda_3(\zeta)$ , равные соответственно  $\Lambda_1^\pm(\zeta)$  и  $\Lambda_3^\pm(\zeta)$  при  $\zeta \in \mathbb{H}^\pm$ , являются аналитическими в плоскости с выброшенным разрезом по соответствующей линии интегрирования, т.е.

$$\Lambda_1 \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, \delta - \varepsilon_1]), \quad \Lambda_3 \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus [\delta + \varepsilon_2, +\infty)). \quad (\text{a.5})$$

Воспользовавшись равенством

$$\frac{\zeta - \delta}{(t - \delta)(t - \zeta)} = \frac{1}{t - \zeta} - \frac{1}{t - \delta}, \quad (\text{a.6})$$

представим  $\Lambda_2(\zeta)$  в виде

$$\Lambda_2(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - \varepsilon_1}^{\delta + \varepsilon_2} \frac{\lambda(t) dt}{t - \zeta} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - \varepsilon_1}^{\delta + \varepsilon_2} \frac{\lambda(t) dt}{t - \delta}. \quad (\text{a.7})$$

Первый интеграл, очевидно, представляет собой аналитическую функцию в плоскости с разрезом  $[\delta - \varepsilon_1, \delta + \varepsilon_2]$ , а второй (не зависящий от  $\zeta$ ) существует в смысле главного значения, поскольку функция  $\lambda(\xi)$  в силу соотношений (4.4), (4.5) удовлетворяет условию Гельдера в точке  $\xi = \delta$ .

Суммируя сказанное с учетом (a.3), получаем, что интеграл (4.6) существует в смысле главного значения, а функции  $\Lambda^+(\zeta)$  и  $\Lambda^-(\zeta)$  аналитичны соответственно в верхней и в нижней полуплоскости. Пункт 1) теоремы доказан.

2) Покажем, что для  $\Lambda^+(\zeta)$  и  $\Lambda^-(\zeta)$  справедлива формула Сохоцкого (4.7), стр. 46. Пусть  $\xi$  — произвольная точка из  $\mathbb{R} \setminus \Xi$ . Выберем для нее числа  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  так, чтобы  $\xi$  принадлежала интервалу  $(\delta - \varepsilon_1, \delta + \varepsilon_2)$  вещественной оси. Так как этот интервал лежит в указанных в (a.5) областях аналитичности функций  $\Lambda_1(\zeta)$  и  $\Lambda_3(\zeta)$ , то эти функции непрерывны в  $\mathbb{H}^+ \cup \mathbb{H}^- \cup \xi$ , что означает

$$\Lambda_j^+ \in C(\mathbb{H}^+ \cup \xi), \quad \Lambda_j^- \in C(\mathbb{H}^- \cup \xi), \quad j = 1, 3, \quad (\text{a.8})$$

и в заданной точке  $\xi$  выполняется равенство

$$\Lambda_j^+(\xi) - \Lambda_j^-(\xi) = 0, \quad j = 1, 3. \quad (\text{a.9})$$

Обозначив первый интеграл в (a.7) через  $\tilde{\Lambda}(\zeta)$ , заметим, что он является интегралом типа Коши с гёльдеровой плотностью в точке  $\xi$ , поэтому

$$\tilde{\Lambda}^+(\zeta) \in C(\mathbb{H}^+ \cup \xi), \quad \tilde{\Lambda}^-(\zeta) \in C(\mathbb{H}^- \cup \xi), \quad (\text{a.10})$$

и для него верна формула Сохоцкого (4.2), стр. 45. Поскольку интеграл  $\Lambda_2(\zeta)$  отличается от  $\tilde{\Lambda}(\zeta)$  на константу (второй интеграл в (a.7)), то выполняется формула Сохоцкого

$$\Lambda_2^+(\xi) - \Lambda_2^-(\xi) = \lambda(\xi). \quad (\text{a.11})$$

Принимая во внимание равенство

$$\Lambda^\pm(\zeta) = \sum_{j=1}^3 \Lambda_j^\pm(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{H}^\pm,$$

вытекающее из (a.3), (a.4), и учитывая соотношения (a.8)–(a.11), устанавливаем в силу произвольности  $\xi \in \mathbb{R} \setminus \Xi$  искомые включения  $\Lambda^\pm \in \mathcal{H}^\pm$  и равенство (4.7), стр. 46. Пункт 2) теоремы доказан.

3) Если плотность  $\lambda(\xi)$  принимает только мнимые значения при  $\xi \in \mathbb{R}$ , то условие комплексного уравновешивания (4.8) вытекает непосредственно из представления (4.6) с учетом вещественности функции  $\lambda(t)/i$ , а также равенства  $K(t, \zeta) = \overline{K(t, \bar{\zeta})}$ , справедливого для функции

$$K(t, \zeta) := \frac{1}{2\pi} \frac{\zeta - \delta}{(t - \delta)(t - \zeta)}.$$

Обратно, условие комплексного уравновешивания (4.8) приводит к необходимости выполнения равенства

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda(t) dt}{(t - \delta)(t - \zeta)} = \int_{\mathbb{R}} \frac{-\overline{\lambda(t)} dt}{(t - \delta)(t - \zeta)}$$

для всех  $\zeta \in \mathbb{H}^-$ , что возможно только при условии  $\lambda(\xi) = -\overline{\lambda(\xi)}$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{R}$ , т.е. если  $\lambda(\xi)$  принимает только мнимые значения. Пункт 3) теоремы доказан.

4) Перейдем к исследованию поведения  $\Lambda(\zeta)$  при стремлении  $\zeta$  к точкам множества  $\Xi$ .

Рассмотрим вначале конечные точки  $\xi_k$ , т.е. соответствующие  $k = \overline{1, N}$ . Выберем некоторое  $\xi_{k'}$ , примем  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  такими, что  $\xi_{k'} \in (\delta - \varepsilon_1, \delta + \varepsilon_2)$ , и перепишем интеграл  $\Lambda_2(\zeta)$  в виде суммы  $\Lambda_2(\zeta) = \Lambda_{2,1}(\zeta) + \Lambda_{2,2}(\zeta)$ , где

$$\Lambda_{2,1}(\zeta) := \frac{\zeta - \delta}{2\pi i} \int_{\delta - \varepsilon_1}^{\xi_{k'}} \frac{\lambda(t) dt}{(t - \delta)(t - \zeta)}, \quad \Lambda_{2,2}(\zeta) := \frac{\zeta - \delta}{2\pi i} \int_{\xi_{k'}}^{\delta + \varepsilon_2} \frac{\lambda(t) dt}{(t - \delta)(t - \zeta)}.$$

Используя (a.6), представим интеграл  $\Lambda_{2,1}(\zeta)$  в виде

$$\begin{aligned} \Lambda_{2,1}(\zeta) = & -\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - \varepsilon_1}^{\xi_{k'}} \frac{\lambda(t) dt}{t - \delta} + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - \varepsilon_1}^{\xi_{k'}} \frac{\lambda(t) - \lambda(\xi_{k'} - 0)}{t - \zeta} dt + \frac{\lambda(\xi_{k'} - 0)}{2\pi i} \ln \frac{\zeta - \xi_{k'}}{\zeta - \delta + \varepsilon_1}. \end{aligned} \quad (\text{a.12})$$

Если  $\delta \in (\delta - \varepsilon_1, \xi_{k'})$ , то первый интеграл в (a.12), понимаемый в смысле главного значения, существует в силу соотношений (4.4), (4.5), стр. 46, а если  $\delta \notin (\delta - \varepsilon_1, \xi_{k'})$ , то он существует в обычном смысле. Поскольку согласно п. 2.1.1 функция  $\lambda(t) \in H_0(\Xi)$  удовлетворяет в  $\xi_{k'}$  одностороннему условию Гёльдера, то плотность во втором интеграле (a.12) степенным образом с положительным показателем стремится к нулю при  $t \rightarrow \xi_{k'}$ , а значит, согласно

(а.2), этот интеграл стремится к конечному пределу при  $\zeta \rightarrow \xi_{k'}$ . Учитывая, что первый интеграл в (а.12) не зависит от  $\zeta$ , и принимая во внимание соотношение  $\text{Im}(\ln(\zeta - \xi_{k'})) = \mathcal{O}(1)$ ,  $\zeta \rightarrow \xi_{k'}$ , приходим к асимптотике

$$\Lambda_{2,1}(\zeta) = \frac{\lambda(\xi_{k'} - 0)}{2\pi i} \ln |\zeta - \xi_{k'}| + \mathcal{O}(1), \quad \zeta \rightarrow \xi_{k'}. \quad (\text{а.13})$$

Анализируя аналогичным образом интеграл  $\Lambda_{2,2}(\zeta)$ , получаем

$$\Lambda_{2,2}(\zeta) = -\frac{\lambda(\xi_{k'} + 0)}{2\pi i} \ln |\zeta - \xi_{k'}| + \mathcal{O}(1), \quad \zeta \rightarrow \xi_{k'}. \quad (\text{а.14})$$

Складывая соотношения (а.13) и (а.14) для  $\Lambda_{2,1}(\zeta)$  и  $\Lambda_{2,2}(\zeta)$ , находим асимптотику для  $\Lambda_2(\zeta)$  при  $\zeta \rightarrow \xi_{k'}$ ; учитывая еще следующие вытекающие из (а.5) формулы  $\Lambda_1(\zeta) = \mathcal{O}(1)$ ,  $\Lambda_3(\zeta) = \mathcal{O}(1)$ ,  $\zeta \rightarrow \xi_{k'}$ , и равенство (а.3), устанавливаем требуемую асимптотику (4.9), стр. 47.

Для доказательства соотношения (4.10) вначале исследуем поведение на бесконечности функций  $\Lambda_1(\zeta)$  и  $\Lambda_3(\zeta)$ . Представим  $\Lambda_1(\zeta)$  в виде

$$\Lambda_1(\zeta) = \frac{\zeta - \delta}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\delta - \varepsilon_1} \frac{[\lambda(t) - \lambda(-\infty)] dt}{(t - \delta)(t - \zeta)} + \frac{(\zeta - \delta) \lambda(-\infty)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\delta - \varepsilon_1} \frac{dt}{(t - \delta)(t - \zeta)}. \quad (\text{а.15})$$

Обозначим через  $\Lambda_{1,1}(\zeta)$  первое слагаемое в (а.15) и покажем, что оно имеет конечный предел при  $\zeta \rightarrow \infty$ . Действительно, используя замену

$$z = \frac{1}{\zeta - \delta}, \quad \tau = \frac{1}{t - \delta}, \quad \tilde{\lambda}(\tau) = \lambda(t), \quad \tilde{\lambda}(0) = \lambda(-\infty), \quad \tilde{\varepsilon} = -\varepsilon_1^{-1},$$

приводим его к виду

$$\Lambda_{1,1}(\zeta) = \tilde{\Lambda}_{1,1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\tilde{\varepsilon}} \frac{[\tilde{\lambda}(\tau) - \tilde{\lambda}(0)] d\tau}{\tau - z},$$

где для плотности интеграла выполняется неравенство  $|\tilde{\lambda}(\tau) - \tilde{\lambda}(0)| < C |\tau|^\mu$  с некоторым  $\mu \in (0, 1)$ , следующее из оценки  $|\lambda(-\infty) - \lambda(\xi)| < C |\xi|^{-\mu}$ , справедливой в силу (4.4), стр. 46. Тогда из соотношения (а.2) вытекает существование конечного предела для  $\Lambda_{1,1}(\zeta)$  при  $\zeta \rightarrow \infty$ . Из этого факта и

следующего выражения для второго слагаемого из (а.15)

$$\frac{(\zeta - \delta) \lambda(-\infty)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\delta - \varepsilon_1} \frac{dt}{(t - \delta)(t - \zeta)} = \frac{\lambda(-\infty)}{2\pi i} \ln \frac{\zeta - \delta + \varepsilon_1}{\varepsilon_1}$$

вытекает асимптотика на бесконечности для  $\Lambda_1(\zeta)$ :

$$\Lambda_1(\zeta) = \frac{\lambda(-\infty)}{2\pi i} |\ln \zeta| + \mathcal{O}(1), \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (\text{а.16})$$

Аналогичным образом устанавливаем поведение  $\Lambda_3(\zeta)$  в бесконечности:

$$\Lambda_3(\zeta) = -\frac{\lambda(+\infty)}{2\pi i} \ln |\zeta| + \mathcal{O}(1), \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (\text{а.17})$$

Принимая во внимание соотношение  $\Lambda_2(\zeta) = \mathcal{O}(1)$ ,  $\zeta \rightarrow \infty$ , непосредственно вытекающее из (а.7), и асимптотики (а.16), (а.17) находим с учетом (а.3) искомую асимптотику (4.10). Теорема доказана.

## ПРИЛОЖЕНИЕ В. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4.

1) Пусть  $\varkappa$  — четное число или нуль. Тогда, из вида (6.10), стр. 58, функции  $\mathcal{S}(\xi)$  следует, что она не обращается в нуль в точке  $\xi = \lambda$ , а значит, функция  $\mathcal{D}(\xi)$  из (6.15), стр. 58, в этой точке гёльдерова. Поскольку  $g \in H_0(\Xi)$ , то из оценок (5.7), стр. 49, для  $X(\zeta)$  и вида (6.10), стр. 58, функции  $\mathcal{S}(\zeta)$  находим, что функция  $\mathcal{D}(\xi)$  имеет в конечных точках  $\Xi$  интегрируемую особенность или нуль (возможно, дробного порядка), а из оценки (6.12), стр. 58, для произведения  $X(\zeta)\mathcal{S}(\zeta)$  получаем, что на бесконечности  $\mathcal{D}(\xi)$  убывает, если одновременно  $\alpha_0$  и  $n_0$  не равны нулю:

$$|\mathcal{D}(\xi)| = \mathcal{O}(|\xi|^{-\alpha_0 - n_0}), \quad |\xi| \rightarrow \infty, \quad \alpha_0 + n_0 \neq 0.$$

В этом случае интеграл (6.16), стр. 58, существует как несобственный при всех  $\zeta \in \mathbb{H}^\pm$ . Кроме того, очевидно, что этот интеграл, т.е.  $\mathcal{T} \in \mathcal{H}$ .

Если же  $\alpha_0 = n_0 = 0$ , то согласно предложению 1.2, стр. 41, имеем  $\rho_0 = 0$ ; последнее означает, что функция  $g(\xi)$  непрерывна в бесконечности. Отсюда

и из асимптотики (6.12), стр. 58, вытекает, что и  $\mathcal{D}(\xi)$  непрерывна в бесконечности (т.е. значения  $\mathcal{D}(+\infty)$  и  $\mathcal{D}(-\infty)$  конечны и равны между собой), а учитывая предложение 1.5 находим, что  $\mathcal{D}$  удовлетворяет в  $\xi = \pm\infty$  условию Гёльдера

$$|\mathcal{D}(\xi) - \mathcal{D}(\pm\infty)| < C|\xi|^{-\mu}, \quad \mu \in (0, 1).$$

Поэтому интеграл (6.16), стр. 58, в рассматриваемом случае  $\alpha_o = n_o = 0$  существует в смысле главного значения при всех  $\zeta \in \mathbb{H}^\pm$ . Очевидно, что он также принадлежит  $\mathcal{H}$ .

Пусть теперь  $\varkappa$  — нечетное число. Тогда функция  $\mathcal{S}(\zeta)$  имеет в точке  $\zeta = \lambda$  нуль первого порядка, а функция  $\mathcal{D}(\xi)$  — особенность типа  $(\xi - \lambda)^{-1}$ , а в остальных точках  $\xi \in \mathbb{R}$  функция  $\mathcal{D}(\xi)$  ведет себя так же, как в изученном выше случае четного  $\varkappa$ . В рассматриваемом случае доказательство существования интеграла (6.16), стр. 58, в смысле главного значения при всех  $\zeta \in \mathbb{H}^\pm$ , а также справедливость включения  $\mathcal{S}(\zeta) \mathcal{T}(\zeta) \in \mathcal{H}$  проводится с помощью рассуждений, использованных при доказательстве утверждений 1) и 2) теоремы 1.1 о существовании модифицированного интеграла типа Коши (4.6), стр. 46, и его принадлежности  $\mathcal{H}$ .

Рассуждения, примененные при доказательстве утверждения 2) теоремы 1.1 для анализа граничных свойств интеграла (4.6), стр. 46, включая формулу Сохоцкого (4.7), приводят к установлению справедливости равенства (6.14), стр. 58, для скачка функции  $\mathcal{T}$  и к установлению равенства (6.8), стр. 57, для предельных значений произведения  $\mathcal{S}(\zeta) \mathcal{T}^\pm(\zeta) = \mathcal{F}^\pm(\zeta)$ . Пункт 1) теоремы доказан.

2) Покажем, что  $\mathcal{T}^\pm(\zeta)$  удовлетворяют условию комплексного уравновешивания (6.17), стр. 58. Непосредственно из определения (6.16) функции  $\mathcal{T}^+(\zeta)$  получаем равенство

$$\overline{\mathcal{T}^+}(\bar{\zeta}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\bar{\chi}(t) dt}{t - \zeta}, \quad \zeta \in \mathbb{H}^-, \quad (b.1)$$

из которого видно, что для установления (6.17), стр. 59, достаточно показать,

ЧТО

$$\mathcal{D}(\xi) = -\overline{\mathcal{D}}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \Xi. \quad (\text{b.2})$$

Производя в определении (6.15), стр. 58, функции  $\mathcal{D}(\xi)$  комплексное сопряжение, подставляя в него равенство  $\overline{X^+}(\xi) = \overline{G}(\xi)\overline{X^-}(\xi)$ , следующее из (5.5), стр. 49, а также используя определение (3.21), стр. 43, для  $g(\xi)$ , т.е.  $g(\xi) = 2\sigma(\xi)/\chi(\xi)$ , в котором  $\sigma(\xi)$  вещественна, и учитывая соотношение  $\overline{\mathcal{S}}(\xi) = \mathcal{S}(\xi)$ , получаем для  $\overline{\mathcal{D}}$  выражение

$$\overline{\mathcal{D}}(\xi) = \frac{\overline{g}(\xi)}{\overline{\mathcal{S}}(\xi)\overline{X^+}(\xi)} = \frac{2\sigma(\xi)}{\mathcal{S}(\xi)\overline{\chi}(\xi)\overline{G}(\xi)\overline{X^-}(\xi)}. \quad (\text{b.3})$$

Принимая во внимание равенство  $\overline{X^-}(\xi) = X^+(\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R} \setminus \Xi$ , вытекающее из (5.6), стр. 49, с учетом включения  $X \in \mathcal{H}$ , а также используя определения (3.20), стр. 43, для  $G(\xi)$  и  $\Theta(\xi)$ :

$$G(\xi) = e^{2i\Theta(\xi)}, \quad \Theta(\xi) = \arg [i\overline{\chi}(\xi)]$$

и вытекающее из последней формулы равенство  $\chi(\xi)e^{2i\Theta(\xi)} = \overline{\chi}(\xi)$ , приводим правую часть (b.3) к виду

$$\frac{2\sigma(\xi)}{\mathcal{S}(\xi)\chi(\xi)X^+(\xi)} \frac{\chi(\xi)}{\overline{\chi}(\xi)} e^{2i\Theta(\xi)} = \frac{g(\xi)}{\mathcal{S}(\xi)X^+(\xi)}(-1) = -\mathcal{D}(\xi);$$

тем самым, устанавливаем (b.2), а следовательно, и (6.17), стр. 59. Пункт 2) теоремы доказан.

3) Обратимся к доказательству формул (6.18), стр. 59, т.е. к исследованию поведения  $\mathcal{T}(\zeta)$  вблизи конечных точек  $\xi_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ). Поскольку вблизи любой из этих точек  $g$  ограничена, а  $\mathcal{S}$  отделена от нуля, то в силу оценки (5.7), стр. 49, функция  $\mathcal{D}(\xi)$  имеет при  $n_k = 0$  и любом  $\alpha_k \in [0, 1)$  следующую асимптотику:

$$\mathcal{D}(\xi) = \mathcal{O}[(\xi - \xi_k)^{-\alpha_k}], \quad \xi \rightarrow \xi_k, \quad n_k = 0, \quad (\text{b.4})$$

причем, если  $\alpha_k = 0$ , то согласно предложению 1.2 имеем  $\rho_k = 0$ , поэтому  $g(\xi)$ , а значит, и  $\mathcal{D}(\xi)$  удовлетворяет в точке  $\xi = \xi_k$  условию Гёльдера. Отсюда и

из (b.4) вытекает, что функции  $\mathcal{T}^\pm(\zeta)$ , определенные в виде интеграла (6.16), стр. 58, имеют порядок  $\mathcal{O}[(\zeta - \xi_k)^{-\alpha_k}]$  в точке  $\xi_k$  при всех  $\alpha_k \in [0, 1)$ , т.е. справедливо первое соотношение (6.18), стр. 59.

Из проведенного анализа вытекает также, что если  $n_k > 0$ , то функция  $\mathcal{D}(\xi)$  обращается в нуль в точке  $\xi = \xi_k$ ,

$$\mathcal{D}(\xi) = \mathcal{O}[(\xi - \xi_k)^{n_k - \alpha_k}], \quad \xi \rightarrow \xi_k, \quad n_k > 0,$$

и удовлетворяет в ней условию Гельдера; в этом случае из представления (6.16) и свойств интеграла типа Коши вытекает, что функции  $\mathcal{T}^\pm(\zeta)$  ограничены при стремлении  $\zeta$  к точке  $\xi_k$ , т.е. справедливо второе соотношение (6.18), стр. 59. Пункт 3) теоремы доказан.

4) Обратимся к доказательству формулы (6.19), стр. 59, т.е к исследованию поведения  $\mathcal{T}(\zeta)$  вблизи бесконечно удаленной точки  $\zeta = \xi_0 := \infty$ . Для этого представим интеграл  $\mathcal{T}(\zeta)$  в виде суммы трех интегралов

$$\mathcal{T}(\zeta) = \sum_{j=1}^3 \mathcal{T}_j(\zeta), \quad \mathcal{T}_j^\pm(\zeta) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_j} \frac{\chi(t) dt}{t - \zeta}, \quad \zeta \in \mathbb{H}^\pm; \quad (b.5)$$

взятых соответственно по промежуткам  $\mathcal{L}_1 := (-\infty, \varepsilon_1)$ ,  $\mathcal{L}_2 := (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  и  $\mathcal{L}_3 := (\varepsilon_2, +\infty)$ , где  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — такие вещественные числа, что интервал  $\mathcal{L}_2$  содержит точки  $\xi = \lambda$ ,  $\xi = 0$  и все  $\xi_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ .

4.1) Докажем справедливость первой строки формулы (6.19). Пусть  $n_0 = 0$  и  $\alpha_0 \neq 0$ . Рассмотрим вначале интеграл  $\mathcal{T}_3(\zeta)$ . Представим его плотность  $\mathcal{D}$  в виде

$$\mathcal{D}(\xi) := \xi^{-\alpha_0} \tilde{\mathcal{D}}(\xi). \quad (b.6)$$

Используя выражения (6.15), стр. 58, и (5.15), стр. 51, для функций  $\mathcal{D}(\xi)$  и  $X(\zeta)$ , асимптотику (6.12), стр. 58, для произведения  $\mathcal{S}(\zeta) X(\zeta)$ , а также учитывая предложение 1.4 на стр. 47 и предложение 1.5 на стр. 48, убеждаемся, что  $\tilde{\mathcal{D}}(\xi)$  удовлетворяет условию Гёльдера на интервале  $(\varepsilon_2, +\infty)$  и одностороннему условию Гёльдера в бесконечно удаленной точке  $\xi = +\infty$ .

Перепишем интеграл  $\mathcal{T}_3(\zeta)$  с учетом представления (b.6) для его плотности в виде

$$\mathcal{T}_3(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon_2}^{\infty} \frac{\tilde{\mathcal{D}}(t) dt}{t^{\alpha_0} (t - \zeta)}, \quad (\text{b.7})$$

а используя здесь замену  $t = \varepsilon_2 \tau^{-1}$ , приведем  $\mathcal{T}_3(\zeta)$  к виду

$$\mathcal{T}_3(\zeta) = -\frac{\varepsilon_2^{1-\alpha_0} \zeta^{-1}}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\tilde{\mathcal{D}}(\varepsilon_2 \tau^{-1}) \tau^{\alpha_0-1} d\tau}{\tau - \varepsilon_2 \zeta^{-1}}. \quad (\text{b.8})$$

Применяя для оценки интеграла (b.8) утверждение 3 предложения а.1, находим следующую асимптотику для  $\mathcal{T}_3(\zeta)$ :

$$\mathcal{T}_3(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{-\alpha_0}), \quad \zeta \rightarrow \infty \quad (n_0 = 0, \alpha_0 \neq 0). \quad (\text{b.9})$$

Рассматривая аналогично функцию  $\mathcal{T}_1(\zeta)$  из (b.5), получаем

$$\mathcal{T}_1(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{-\alpha_0}), \quad \zeta \rightarrow \infty \quad (n_0 = 0, \alpha_0 \neq 0). \quad (\text{b.10})$$

Кроме того, для  $\mathcal{T}_2(\zeta)$ , определяемого из (b.5), как интеграла типа Коши по конечному отрезку  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , очевидно соотношение

$$\mathcal{T}_2(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{-1}), \quad \zeta \rightarrow \infty \quad (n_0 \geq 0, \alpha_0 \in [0, 1]). \quad (\text{b.11})$$

Тогда из (b.9)–(b.11) и (b.5) вытекает требуемая первая строка асимптотической оценки (6.19), стр. 59, для  $\mathcal{T}(\zeta)$ , соответствующей  $n_0 = 0$  и  $\alpha_0 \neq 0$ .

Если же одновременно  $\alpha_0$  и  $n_0$  равны нулю, то, как установлено в п. 1) доказательства, интеграл  $\mathcal{T}(\zeta)$  существует в смысле главного значения. Точнее, если  $\mathcal{T}(\zeta)$  записан в виде (b.5), то в смысле главного значения существует сумма интегралов  $\mathcal{T}_1(\zeta) + \mathcal{T}_3(\zeta) =: \tilde{\mathcal{T}}(\zeta)$ . Выполняя в интегралах  $\mathcal{T}_1(\zeta)$  и  $\mathcal{T}_3(\zeta)$  замену  $t = 1/\tau$ , получаем для  $\tilde{\mathcal{T}}(\zeta)$  следующее выражение:

$$\tilde{\mathcal{T}}(\zeta) = -\frac{\zeta^{-1}}{2\pi i} \int_{-a}^b \frac{\mathcal{D}(\tau^{-1}) d\tau}{\tau(\tau - \zeta^{-1})},$$

где  $a = \varepsilon_1^{-1}$ ,  $b = \varepsilon_2^{-1}$ .

Действуя аналогично рассуждениям из доказательства п. 1) теоремы 1.1, перепишем  $\tilde{\mathcal{T}}$  в виде

$$\tilde{\mathcal{T}}(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^b \frac{\mathcal{D}(\tau^{-1}) d\tau}{\tau - \zeta^{-1}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^b \frac{\mathcal{D}(\tau^{-1}) d\tau}{\tau},$$

где первый интеграл представляет собой аналитическую функцию в плоскости переменного  $\tilde{\zeta} = \zeta^{-1}$  с разрезом  $[-a, b]$  и имеет конечный предел при  $\zeta \rightarrow \infty$ , а второй интеграл существует в смысле главного значения, поскольку его плотность  $\mathcal{D}(\tau^{-1})$  удовлетворяет условию Гельдера в точке  $\tau = 0$ . Нетрудно убедиться, используя формулу Сохоцкого (4.3), стр. 45, что

$$\lim_{\mathbb{H}^+ \ni \zeta \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{T}}(\zeta) = \mathcal{D}(\infty).$$

Отсюда с учетом асимптотики (b.11) и формулы  $\mathcal{T}(\zeta) = \tilde{\mathcal{T}}(\zeta) + \mathcal{T}_2(\zeta)$  находим  $\mathcal{T}(\zeta) = \mathcal{O}(1)$ ,  $\zeta \rightarrow \infty$ . Это означает справедливость первой строки асимптотической оценки (6.19), стр. 59, для  $\mathcal{T}(\zeta)$  при  $n_0 = 0$  и  $\alpha_0 = 0$ .

4.2) Обратимся к доказательству второй строки формулы (6.19), соответствующей случаю  $n_0 = 1$  и  $\alpha_0 = 0$ . Представим, как и раньше, интеграл  $\mathcal{T}(\zeta)$  в виде суммы (b.5) и введем функцию  $f_3(\zeta) := \zeta \mathcal{T}_3(\zeta)$ . Покажем, что

$$f_3(\zeta) = \mathcal{O}(\ln \zeta), \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (\text{b.12})$$

Действительно, записывая для нашего случая  $\mathcal{D}(t)$  с помощью (6.12), (6.15), в виде

$$\mathcal{D}(\xi) := \xi^{-1} [\tilde{\mathcal{D}}(\xi) - \tilde{\mathcal{D}}(+\infty)] + \xi^{-1} \tilde{\mathcal{D}}(\xi), \quad (\text{b.13})$$

преобразуем  $f_3(\zeta)$  к виду

$$f_3(\zeta) = \frac{\zeta}{2\pi i} \int_{\varepsilon_2}^{+\infty} \frac{\tilde{\mathcal{D}}(t) - \tilde{\mathcal{D}}(+\infty)}{t(t-\zeta)} dt + \frac{\tilde{\mathcal{D}}(+\infty)}{2\pi i} \ln \frac{\varepsilon_2 - \zeta}{\varepsilon_2}. \quad (\text{b.14})$$

Выполняя в фигурирующем здесь интеграле замену переменного  $t = \varepsilon_2 \tau^{-1}$  и учитывая утверждение 3) предложения а.1, убеждаемся, что этот интеграл существует для всех  $\zeta \in \mathbb{H}^\pm$  и имеет конечные пределы при  $\mathbb{H}^\pm \ni \zeta \rightarrow \infty$ . Таким образом, из формулы (b.14) вытекает асимптотика (b.12), откуда с учетом определения  $f_3(\zeta)$  находим  $\mathcal{T}_3(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{-1} \ln \zeta)$ ,  $\zeta \rightarrow \infty$ . Рассматривая аналогично функцию  $\mathcal{T}_1(\zeta)$ , находим асимптотику  $\mathcal{T}_1(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{-1} \ln \zeta)$ ,

$\zeta \rightarrow \infty$ . Учитывая еще соотношение (b.11), справедливое и в рассматриваемом случае  $n_o = 1$  и  $\alpha_o = 0$ , а также равенство (b.5), приходим ко второй строке формулы (6.19), стр. 59.

4.3) Перейдем к доказательству третьей строки формулы (6.19), т.е. предположим, что  $n_o = 1$ ,  $\alpha_o \neq 0$  или  $n_o > 1$ . Покажем, что функция  $f_3(\zeta) = \zeta \mathcal{T}_3(\zeta)$  ограничена на бесконечности. Выполняя следующие преобразования

$$\begin{aligned} f_3(\zeta) &= \frac{\zeta}{2\pi i} \int_{\varepsilon_2}^{\infty} \frac{\tilde{\mathcal{D}}(t)}{t^{\alpha_o+n_o}(t-\zeta)} dt = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon_2}^{\infty} \frac{\tilde{\mathcal{D}}(t)}{t^{\alpha_o+n_o}} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon_2}^{\infty} \frac{\tilde{\mathcal{D}}(t)}{t^{\alpha_o+n_o-1}(t-\zeta)} dt, \end{aligned} \quad (b.15)$$

находим, что оба интеграла здесь сходятся как несобственные. Первый интеграл, очевидно, не зависит от  $\zeta$ , а второй, обозначаемый через  $I(\zeta)$ , при помощи замен

$$z = \frac{1}{\zeta}, \quad \tau = \frac{1}{t}, \quad \nu(\tau) = \tilde{\mathcal{D}}(t), \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon_2^{-1}, \quad (b.16)$$

преобразуется к виду

$$I(\zeta) = \tilde{I}(z) = -\frac{z}{2\pi i} \int_0^{\tilde{\varepsilon}} \frac{\tau^{\alpha_o+n_o-2} \nu(\tau)}{\tau-z} d\tau; \quad (b.17)$$

фигурирующая здесь функция  $\nu(\tau)$  в силу (b.6) и (b.16) удовлетворяет одностороннему условию Гёльдера в точке  $\tau = 0$ . Таким образом, если  $n_o \geq 2$ , то из (b.17) вытекает существование конечного предела  $I(\zeta)$  при  $\zeta \rightarrow \infty$ . Если же  $n_o = 1$  и  $\alpha_o > 0$ , то  $I(\zeta)$  совпадает с интегралом (b.7), для которого была найдена асимптотика  $\mathcal{O}(\zeta^{-\alpha_o})$ ,  $\zeta \rightarrow \infty$ . Суммируя сказанное, из (b.15) получаем искомую асимптотику  $f_3(\zeta) = \mathcal{O}(1)$ ,  $\zeta \rightarrow \infty$ .

Из последнего соотношения и из равенства  $f_3(\zeta) = \zeta \mathcal{T}_3(\zeta)$  вытекает асимптотика  $\mathcal{T}_3(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{-1})$ ,  $\zeta \rightarrow \infty$ . Рассматривая аналогично функцию  $\mathcal{T}_1(\zeta)$ , можно показать, что  $\mathcal{T}_1(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{-1})$ ,  $\zeta \rightarrow \infty$ . Учитывая еще представление (b.5) и равенство (b.11), справедливое и в рассматриваемом случае  $n_o = 1$ ,

$\alpha_0 \neq 0$  или  $n_0 > 1$ , приходим к третьей строке формулы (6.19) на стр. 59, чем и завершаем доказательство теоремы 1.4.

## ПРИЛОЖЕНИЕ С. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕКОТОРЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ ГЛ. II.

**C.1. Доказательство теоремы 2.6.** Доказательство формулы продолжения (4.70)–(4.74) проведем методом индукции по числу  $N$  переменных функции Лауричеллы.

Заметим, прежде всего, что при  $N = 1$ , т.е. когда функция Лауричеллы совпадает с функцией Гаусса, соотношения (4.70)–(4.74), устанавливаемые теоремой, совпадают с известными формулами (2.6), (2.7), (2.21), (2.22), осуществляющими продолжение функции  $F(a, b; c; z)$  в окрестность точки  $z = 1$ . Действительно, при  $N = 1$  правая часть (4.70), как и правая часть (2.21), содержит лишь два слагаемых  $A_0 \mathcal{U}_0^{(1)}$  и  $A_1 \mathcal{U}_1^{(1)}$ , а формулы (4.71) и (4.72), которыми определяются функции  $\mathcal{U}_0^{(1)}$  и  $\mathcal{U}_1^{(1)}$ , переходят соответственно в (2.6) и (2.7). При этом равенства (4.73), (4.74) для коэффициентов  $A_0$  и  $A_1$  совпадают с (2.22). Формула (4.69) для области  $\mathbb{K}^N$  переходит в формулу (2.20) для области  $\mathbb{K}$ , где справедливы соотношения (2.6), (2.7), (2.21), (2.22).

Предположим теперь, что утверждение теоремы справедливо для функции Лауричеллы с числом переменных  $(N - 1)$ , и убедимся в справедливости равенств (4.70)–(4.74), записанных для функции Лауричеллы с числом переменных  $N$ . Для этого воспользуемся представлением (4.64) для функции Лауричеллы, которое устанавливает предложение 2.4. Заметим, прежде всего, что фигурирующие в формуле (4.64) функция  $v_1$  и множитель  $D_1$ , определяемые из (4.66) и (4.67), совпадают соответственно с фигурирующими в (4.70) функцией  $\mathcal{U}_1^{(1)}$  и множителем  $A_1$ , которые определяются из (4.72) и (4.74) при  $j = 1$ , т.е. для второго слагаемого из (4.64) справедливо равенство

$$D_1 v_1(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = A_1 \mathcal{U}_1^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}). \quad (\text{c.1})$$

Убедимся теперь в том, что аналитическое продолжение первого слагаемого в формуле (4.64), равного  $D_0 v_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ , по переменным  $z_2, \dots, z_N$ , даст

часть суммы (4.70), за исключением слагаемого  $A_1 \mathcal{U}_1^{(1)}$ , т.е. в том, что имеет место представление

$$D_0 v_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = A_0 \mathcal{U}_0^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) + \sum_{j=2}^N A_j \mathcal{U}_j^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}). \quad (\text{c.2})$$

Применяя к функциям  $F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; b+k, c-a_1; \mathbf{z}'_1)$ , фигурирующим в формуле (4.19), соотношения (4.38)–(4.41), которые, напомним, предполагаются верными для числа переменных  $(N-1)$ , записываем формулы аналитического продолжения этих функций в виде:

$$F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; b+k, c-a_1; \mathbf{z}'_1) = \sum_{j=0}^N' \tilde{A}_j \tilde{\mathcal{U}}_j^{(1)}(\mathbf{a}; b, c, k_1; \mathbf{z}'_1), \quad (\text{c.3})$$

где штрих над суммой означает, что пропущено слагаемое, соответствующее  $j = 1$ , функция  $\tilde{\mathcal{U}}_0^{(1)}$  определяется равенством

$$\tilde{\mathcal{U}}_0^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; b+k_1, 1+|\mathbf{a}|+b-c+k_1; \mathbf{1}-\mathbf{z}'_1), \quad (\text{c.4})$$

функции  $\tilde{\mathcal{U}}_j^{(1)}$ ,  $j = \overline{2, N}$ , — следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{U}}_j^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) &= (1-z_j)^{c-|\mathbf{a}_{1,j}|-b-k_1} \left( \prod_{l=j+1}^N (1-z_l)^{-a_l} \right) \times \\ &\times G^{(N, j-1)}\left(\tilde{\mathbf{h}}_j; c-|\mathbf{a}_{1,j-1}|-b-k_1, 1+c-|\mathbf{a}_{1,j}|-b-k_1, \mathcal{Y}_{j-1}(\mathbf{1}-\mathbf{z}'_1)\right), \end{aligned} \quad (\text{c.5})$$

а коэффициенты  $\tilde{A}_j = \tilde{A}_j(k_1)$ ,  $j = 0, 2, \dots, N$ , имеют вид

$$\tilde{A}_0 = \frac{\Gamma(c-a_1) \Gamma(c-|\mathbf{a}|-b-k_1)}{\Gamma(c-|\mathbf{a}|) \Gamma(c-a_1-b-k_1)}, \quad (\text{c.6})$$

$$\tilde{A}_j = \frac{\Gamma(c-a_1) \Gamma(c-|\mathbf{a}_{1,j-1}|-b-k_1) \Gamma(|\mathbf{a}_{1,j}|+b-c+k_1)}{\Gamma(a_j) \Gamma(b+k_1) \Gamma(c-a_1-b-k_1)}, \quad j = \overline{2, N}. \quad (\text{c.7})$$

Векторы  $\tilde{\mathbf{h}}_j$  и  $\mathcal{Y}_m(\mathbf{1}-\mathbf{z}'_1)$  в (c.5) имеют вид:

$$\tilde{\mathbf{h}}_j = (a_2, \dots, a_{j-1}, c-|\mathbf{a}|, a_{j+1}, \dots, a_N), \quad j = \overline{2, N},$$

$$\mathcal{Y}_m(\mathbf{1} - \mathbf{z}'_1) = \left( \frac{1 - z_2}{1 - z_m}, \dots, \frac{1 - z_{m-1}}{1 - z_m}, 1 - z_m, \frac{1 - z_m}{1 - z_{m+1}}, \dots, \frac{1 - z_m}{1 - z_N} \right),$$

$$m = \overline{1, N-1}.$$

Подставляя (c.3)–(c.7) в формулу (4.19), находим:

$$D_0 v_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \mathcal{Q}_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) + \sum_{j=2}^N \mathcal{Q}_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad (c.8)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := & \frac{\Gamma(c) \Gamma(c - a_1 - b)}{\Gamma(c - a_1) \Gamma(c - b)} \times \\ & \times \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{k_1} (b)_{k_1}}{k_1! (1 + a_1 + b - c)_{k_1}} (1 - z_1)^{k_1} \tilde{A}_j(k_1) \tilde{\mathcal{U}}_j^{(1)}(\mathbf{a}; b, c, k_1; \mathbf{z}). \end{aligned} \quad (c.9)$$

Покажем, что для всех  $j = 0, 2, \dots, N$  выполняются равенства

$$\mathcal{Q}_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = A_j \mathcal{U}_j^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad (c.10)$$

где функции  $\mathcal{U}_j^{(1)}$  определяются равенствами (4.71), (4.72), а множители  $A_j$  — равенствами (4.73), (4.74).

(i) Убедимся в справедливости формулы (c.10) при  $j = 0$ , для чего преобразуем правую часть (c.9) при  $j = 0$  и покажем, она совпадает с  $A_0 \mathcal{U}_0^{(1)}$ . Подставляя в (c.9) величины  $\tilde{\mathcal{U}}_0^{(1)}$  и  $\tilde{A}_0$ , определяемые из (c.3) и (c.6), и используя разложение

$$\begin{aligned} F_D^{(N-1)}(\mathbf{a}'_1; b + k_1, 1 + |\mathbf{a}| + b - c + k_1; \mathbf{1} - \mathbf{z}'_1) = & \\ = & \sum_{|\mathbf{k}_{2,N}|=0}^{\infty} \frac{(b + k_1)_{|\mathbf{k}_{2,N}|} (a_2)_{k_2} \dots (a_N)_{k_N}}{(1 + |\mathbf{a}| + b - c + k_1)_{|\mathbf{k}_{2,N}|} k_2! \dots k_N!} (1 - z_2)^{k_2} \dots (1 - z_N)^{k_N}, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = & \frac{\Gamma(c) \Gamma(c - a_1 - b)}{\Gamma(c - b) \Gamma(c - |\mathbf{a}|)} \times \\ \times & \left[ \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c - |\mathbf{a}| - b - k_1) (b)_{k_1} (b + k_1)_{|\mathbf{k}_{2,N}|}}{(1 + a_1 + b - c)_{k_1} \Gamma(c - a_1 - b - k_1) (1 + |\mathbf{a}| + b - c + k_1)_{|\mathbf{k}_{2,N}|}} \times \right. \\ & \left. \times \frac{(a_1)_{k_1} \dots (a_N)_{k_N}}{k_1! \dots k_N!} (1 - z_1)^{k_1} \dots (1 - z_N)^{k_N} \right]. \end{aligned} \quad (c.11)$$

Учитывая следующие равенства:

$$\frac{\Gamma(c - a_1 - b)}{(1 + a_1 + b - c)_{k_1} \Gamma(c - a_1 - b - k_1)} = (-1)^{k_1}, \quad (b)_{k_1} (b + k_1)_{|\mathbf{k}_{2,N}|} = (b)_{|\mathbf{k}|},$$

$$\frac{\Gamma(c - |\mathbf{a}| - b - k_1)}{(1 + |\mathbf{a}| + b - c + k_1)_{|\mathbf{k}_{2,N}|}} = (-1)^{k_1} \frac{\Gamma(c - |\mathbf{a}| - b)}{(1 + |\mathbf{a}| + b - c)_{|\mathbf{k}|}},$$

преобразуем (с.11) к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(c - |\mathbf{a}| - b)}{\Gamma(c - |\mathbf{a}|) \Gamma(c - b)} \times \\ &\times \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{|\mathbf{k}|}}{(1 + |\mathbf{a}| + b - c)_{|\mathbf{k}|}} \frac{(a_1)_{k_1} \dots (a_N)_{k_N}}{k_1! \dots k_N!} (1 - z_1)^{k_1} \dots (1 - z_N)^{k_N}, \end{aligned} \quad (\text{c.12})$$

а принимая во внимание определение функции Лауричеллы (1.2) и формулы (4.71) и (4.73) для  $\mathcal{U}_0^{(1)}$  и  $A_0$ , завершаем доказательство равенства (с.10) при  $j = 0$ .

(ii) Убедимся в справедливости формулы (с.10) при всех  $j = \overline{2, N}$ , для чего преобразуем правую часть (с.9) к виду  $A_j \mathcal{U}_j^{(1)}$ . Подставляя в (с.9) величины  $\tilde{\mathcal{U}}_j^{(1)}$  и  $\tilde{A}_j$ ,  $j = \overline{2, N}$ , определяемые из (4.72) и (4.74), а также разложение

$$\begin{aligned} G^{(N-1, j-1)} \left( \tilde{\mathbf{h}}_j; c - |\mathbf{a}_{1,j-1}| - b - k_1, 1 + c - |\mathbf{a}_{1,j}| - b - k_1, \mathcal{Y}_{j-1}(\mathbf{1} - \mathbf{z}'_1) \right) &= \\ &= \sum_{|\mathbf{k}_{2,N}|=0}^{\infty} \frac{(c - |\mathbf{a}_{1,j-1}| - b - k_1)_{|\mathbf{k}_{j,N}| - |\mathbf{k}_{2,j-1}|} (a_2)_{k_2} \dots (c - |\mathbf{a}|)_{k_j} \dots (a_N)_{k_N}}{(1 + c - |\mathbf{a}_{1,j}| - b - k_1)_{|\mathbf{k}_{j,N}| - |\mathbf{k}_{2,j-1}|} k_2! \dots k_N!} \times \\ &\times \left( \frac{1 - z_2}{1 - z_j} \right)^{k_2} \dots \left( \frac{1 - z_{j-1}}{1 - z_j} \right)^{k_{j-1}} (1 - z_j)^{k_j} \left( \frac{1 - z_j}{1 - z_{j+1}} \right)^{k_{j+1}} \dots \left( \frac{1 - z_j}{1 - z_N} \right)^{k_N}, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(c - a_1 - b)}{\Gamma(a_j) \Gamma(c - b)} (1 - z_j)^{c - |\mathbf{a}_{1,j}| - b} \left( \prod_{l=j+1}^N (1 - z_l)^{-a_l} \right) \times \\ &\times \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{k_1} \Gamma(c - |\mathbf{a}_{1,j-1}| - b - k_1) \Gamma(|\mathbf{a}_{1,j}| + b - c + k_1)}{\Gamma(b + k_1) \Gamma(c - a_1 - b - k_1) (1 + a_1 + b - c)_{k_1}} \times \\ &\times \frac{(c - |\mathbf{a}_{1,j-1}| - b - k_1)_{|\mathbf{k}_{j,N}| - |\mathbf{k}_{2,j-1}|}}{(1 + c - |\mathbf{a}_{1,j}| - b - k_1)_{|\mathbf{k}_{j,N}| - |\mathbf{k}_{2,j-1}|}} \frac{(a_1)_{k_1} \dots (c - |\mathbf{a}|)_{k_j} \dots (a_N)_{k_N}}{k_1! \dots k_N!} [\mathcal{Y}_j(\mathbf{1} - \mathbf{z})]^{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Учитывая следующие равенства:  $(b)_{k_1} / \Gamma(b + k_1) = 1 / \Gamma(b)$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma(c - |\mathbf{a}_{1,j-1}| - b - k_1)(c - |\mathbf{a}_{1,j-1}| - b - k_1)_{|\mathbf{k}_{j,N}| - |\mathbf{k}_{2,j-1}|} = \\ = \Gamma(c - |\mathbf{a}_{1,j-1}| - b)(c - |\mathbf{a}_{1,j-1}| - b)_{|\mathbf{k}_{j,N}| - |\mathbf{k}_{1,j-1}|}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(|\mathbf{a}_{1,j}| + b - c + k_1)}{(1 + c - |\mathbf{a}_{1,j}| - b - k_1)_{|\mathbf{k}_{j,N}| - |\mathbf{k}_{2,j-1}|}} = (-1)^{k_1} \frac{\Gamma(|\mathbf{a}_{1,j}| + b - c)}{(1 + c - |\mathbf{a}_{1,j}| - b)_{|\mathbf{k}_{j,N}| - |\mathbf{k}_{1,j-1}|}}, \\ \frac{\Gamma(c - a_1 - b)}{\Gamma(c - a_1 - b - k_1)(1 + a_1 + b - c)_{k_1}} = (-1)^{k_1}, \end{aligned}$$

преобразуем (с.11) к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c - |\mathbf{a}_{1,j-1}| - b) \Gamma(|\mathbf{a}_{1,j}| + b - c)}{\Gamma(a_j) \Gamma(b) \Gamma(c - b)} \times \\ \times (1 - z_j)^{c - |\mathbf{a}_{1,j}| - b} \left( \prod_{l=j+1}^N (1 - z_l)^{-a_l} \right) \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(c - |\mathbf{a}_{1,j-1}| - b - k_1)_{|\mathbf{k}_{j,N}| - |\mathbf{k}_{1,j-1}|}}{(1 + c - |\mathbf{a}_{1,j}| - b - k_1)_{|\mathbf{k}_{j,N}| - |\mathbf{k}_{1,j-1}|}} \times \\ \times \frac{(a_1)_{k_1} \dots (c - |\mathbf{a}|)_{k_j} \dots (a_N)_{k_N}}{k_1! \dots k_N!} [\mathcal{Y}_j(\mathbf{1} - \mathbf{z})]^{\mathbf{k}}, \end{aligned}$$

принимая во внимание определение (4.35) функции  $G^{(N,j)}$  и формулы (4.72) и (4.74) для  $\mathcal{U}_j^{(1)}$  и  $A_j$ , завершаем доказательство равенства (с.10) при  $j = 2, \dots, N$ .

Подставляя (с.1), (с.8) и (с.10) в (4.64), получаем представление (4.70) для функции Лауричеллы.

В том, что  $\mathcal{U}_j^{(1)}$ ,  $j = \overline{0, N}$ , являются частными решениями системы (1.5), можно убедиться непосредственной подстановкой (4.71) и (4.72) в (1.5). Теорема 2.6 доказана.

**С.2. Доказательство предложения 2.8.** Перейдем к выводу формул аналитического продолжения функции  $F_1$ , предполагая, что выполнено первое соотношение (5.11), т.е. имеет место первый логарифмический случай (А.1). Записывая интеграл (5.16) в виде умноженной на  $(2\pi i)$  суммы вычетов в простых полюсах (5.20) и вычетов в двойных полюсах (5.22) подынтеграль-

ной функции (5.14), находим представление функции  $F_1$ :

$$F_1(a, a'; a + m, c; z, \zeta) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(a + m)} \left[ \sum_{k=0}^{m-1} \operatorname{res} f(s_k^{(1)}) + \sum_{k=m}^{\infty} \operatorname{res} f(s_{k,ln}^{(2)}) \right], \quad (\text{c.13})$$

где величины  $\operatorname{res} f(s_k^{(1)})$  и  $\operatorname{res} f(s_{k,ln}^{(2)})$  даются соответственно равенствами (5.21) и (5.23).

Применяя формулы аналитического продолжения (2.8), (2.9), (2.26), (2.27) к гипергеометрическим функциям  $F(a', m - k; c - a - k; \zeta)$ , фигурирующим в (5.21) и (5.23), находим, для них следующие выражения, справедливые при всех  $k \in \mathbb{Z}^+$ , в том числе и при  $k = 0, 1, \dots, m - 1$ :

$$F(a', m - k; c - a - k; \zeta) = C_1 w_1(\zeta) + C_2 w_2(\zeta), \quad (\text{c.14})$$

где функции  $w_1(\zeta)$  и  $w_2(\zeta)$  даются равенствами

$$w_1(\zeta) = (-\zeta)^{-a'} F(a', 1 - c + a + a' + k; 1 + a' - m + k; \zeta^{-1}), \quad (\text{c.15})$$

$$w_2(\zeta) = (-\zeta)^{k-m} F(m - k, 1 - c + a + m; 1 - a' + m - k; \zeta^{-1}), \quad (\text{c.16})$$

а коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  — следующими равенствами:

$$C_1 := \frac{\Gamma(c - a - k)\Gamma(m - k - a')}{\Gamma(m - k)\Gamma(c - a - a' - k)}, \quad C_2 := \frac{\Gamma(c - a - k)\Gamma(a' - m + k)}{\Gamma(a')\Gamma(c - a - m)}. \quad (\text{c.17})$$

Если же  $k = m, m + 1, \dots$ , то, как нетрудно увидеть, соотношения (c.14)–(c.17) упрощаются и приводятся к следующему виду:

$$F(a', m - k; c - a - k; \zeta) = C_2 (-\zeta)^{k-m} \sum_{n=0}^{k-m} \frac{(m - k)_n (1 - c + a + m)_n}{n! (1 - a' + m - k)_n} \zeta^{-n}. \quad (\text{c.18})$$

Применяя формулы (2.8), (2.9), (2.26), (2.27) к функциям  $F(a', a + m + s; c + s; \zeta)$  из (5.23), выполняя дифференцирование по  $s$  и подставляя в полученное равенство  $s = -a - k$ , находим:

$$\frac{d}{ds} \left[ F(a', a + m + s; c + s; \zeta) \right] \Big|_{s=-a-k} = \tilde{C}_1 w_1(\zeta) + \tilde{C}_2 \tilde{w}_2(\zeta), \quad (\text{c.19})$$

$$k = m, m + 1, \dots,$$

где функция  $w_1(\zeta)$  определяется из (c.15), а функция  $\tilde{w}_2(\zeta)$  дается формулой:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_2(\zeta) := & (-\zeta)^{k-m} \left\{ \sum_{n=0}^{k-m} \frac{(1-c+a+m)_n (m-k)_n}{n! (1-a'+m-k)_n} [\lambda_{k,m} - \ln(-\zeta)] \zeta^{-n} + \right. \\ & \left. + (-1)^{m-k} (k-m)! \sum_{n=k-m+1}^{\infty} \frac{(a')_n (m-k+n-1)!}{n! (c-a-k)_n} \zeta^{-n} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{c.20})$$

$$\lambda_{k,m} := \psi(c-a-k) - \psi(a'-m+k-n) + \psi(1-m+k-n) - \psi(1-m+k); \quad (\text{c.21})$$

коэффициент  $C_2$  находится из (c.17), а коэффициент  $\tilde{C}_1$  определяется равенством:

$$\tilde{C}_1 = (-1)^{k-m} (k-m)! \frac{\Gamma(c-a-k) \Gamma(m-a'-k)}{\Gamma(c-a-a'-k)}. \quad (\text{c.22})$$

Подставляя (c.14)–(c.22) в (5.21), (5.23), переписывая выражения для вычетов  $\text{res } f(s_k^{(1)})$  и  $\text{res } f(s_{k,ln}^{(2)})$  в виде двойных сумм и подставляя результат в (c.13), приходим к утверждению предложения 2.8.

**C.3. Доказательство предложения 2.9.** Записывая интеграл (5.16) в виде умноженной на  $(2\pi i)$  суммы вычетов в простых полюсах (5.24) и вычетов в двойных полюсах (5.26) подынтегральной функции (5.14), находим следующее представление для функции  $F_1$ :

$$F_1(b+m, a'; b, c; z, \zeta) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b+m) \Gamma(b)} \left[ \sum_{k=0}^{m-1} \text{res } f(s_k^{(2)}) + \sum_{k=m}^{\infty} \text{res } f(s_{k,ln}^{(1)}) \right], \quad (\text{c.23})$$

где величины  $\text{res } f(s_k^{(2)})$  и  $\text{res } f(s_{k,ln}^{(1)})$  даются соответственно равенствами (5.25) и (5.27).

Преобразуем с помощью формул продолжения (2.8), (2.9), (2.26), (2.27) гипергеометрические функции  $F(a', -k; c-b-k; \zeta)$ , фигурирующие в (5.25) и (5.27), к виду:

$$F(a', -k; c-b-k; \zeta) = \frac{(a')_k}{(1-c+b)_k} \zeta^k \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n (1-c+b)_n}{n! (1-a'-k)_n} \zeta^{-n}. \quad (\text{c.24})$$

Применяя формулы (2.8), (2.9), (2.26), (2.27) к функции  $F(a', b+s; c+s; \zeta)$  из (5.27), выполняя дифференцирование по  $s$  и подставляя в полученное равенство  $s = -b - k$ , находим:

$$\frac{d}{ds} \left[ F(a', b+s; c+s; \zeta) \right] \Big|_{s=-b-k} = C_1 w_1(\zeta) + C_2 w_2(\zeta), \quad k = m, m+1, \dots, \quad (\text{c.25})$$

где функции  $w_1(\zeta)$  и  $w_2(\zeta)$  определяются равенствами:

$$w_1(\zeta) = (-\zeta)^{-a'} F(a', 1-c+a'+b+k; 1+a'+k; \zeta^{-1}), \quad k = m, m+1, \dots, \quad (\text{c.26})$$

$$w_2(\zeta) = (-\zeta)^k \left\{ \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n (1-c+b)_n}{n! (1-a'-k)_n} [\tau_{k,n} - \ln(-\zeta)] \zeta^{-n} + \right. \\ \left. + (-1)^k k! \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(n-k-1)! (1-c+b)_n}{n! (1-a'-k)_n} \zeta^{-n} \right\}, \quad (\text{c.27})$$

$$\tau_{k,n} = \psi(c-b-k) - \psi(a'+k-n) + \psi(1-n+k) - \psi(1+k); \quad (\text{c.28})$$

а коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  — следующим равенством:

$$C_1 = (-1)^k k! \frac{\Gamma(c-b-k) \Gamma(-a'-k)}{\Gamma(c-b-a'-k)}, \quad C_2 := \frac{\Gamma(c-b-k) \Gamma(a'+k)}{\Gamma(a') \Gamma(c-b)}. \quad (\text{c.29})$$

Подставляя (c.24)–(c.29) в (5.25) и (5.27), переписывая выражения для вычетов  $\text{res } f(s_k^{(1)})$  и  $\text{res } f(s_k^{(2)})$  в виде двойных сумм и подставляя результат в (c.23), завершаем доказательство предложения 2.9, где, напомним, область  $\mathbb{V}^2$ , определена соотношением (5.33).

**C.4. Доказательство предложения 2.10.** Запишем представление (5.28), (5.29), (5.32) для функции Аппеля, подставив в указанные формулы  $b = a + a' + m$ :

$$F_1(a, a'; a + a' + m, c; z, \zeta) = \\ = B_1 u_1(a, a'; a + a' + m, c; z, \zeta) + B_2 u_2(a, a'; a + a' + m, c; z, \zeta); \quad (\text{c.30})$$

здесь функции  $u_1$  и  $u_2$  даются равенствами

$$\begin{aligned} u_1(a, a'; a + a' + m, c; z, \zeta) &= \\ &= (-z)^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+a-c)_k (a)_k}{(1-a'-m)_k k!} z^{-k} F(a', a' + m - k; c - a - k; \zeta), \end{aligned} \quad (\text{c.31})$$

$$\begin{aligned} u_2(a, a'; a + a' + m, c; z, \zeta) &= \\ &= (-z)^{-a-a'-m} F_1\left(1 - c + a + a' + m, a'; a + a' + m, 1 + a' + m; \frac{1}{z}, \frac{\zeta}{z}\right), \end{aligned} \quad (\text{c.32})$$

а коэффициенты  $B_1$  и  $B_2$  — следующими равенствами:

$$B_1 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(a' + m)}{\Gamma(a + a' + m) \Gamma(c - a)}, \quad B_2 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(-m - a')}{\Gamma(a) \Gamma(c - a - a' - m)}. \quad (\text{c.33})$$

Для того, чтобы аналитически продолжить фигурирующие в формуле (c.31) функции  $F(a', a' + m - k; c - a - k; \zeta)$  в окрестность бесконечно удаленной точки, прежде всего заметим, что разность второго и первого параметров этих функций является целым числом  $(m - k)$ , знак которого зависит от индекса суммирования  $k$ . Если  $k \leq m$ , то применяя формулу (2.28), (2.16), к указанным функциям, находим

$$F(a', b - a - k; c - a - k; \zeta) = \frac{\Gamma(c - a - k) (m - k - 1)!}{\Gamma(a' + m - k) \Gamma(c - a - a' - k)} w_1(\zeta), \quad (\text{c.34})$$

$$\begin{aligned} w_1(\zeta) &:= (-\zeta)^{-a'} \left\{ \sum_{n=0}^{m-k-1} \frac{(a')_n (1 - c + a + a' + k)_n}{n! (1 - m + k)_n} \zeta^{-n} + \right. \\ &+ \frac{(-1)^{m-k}}{(m - k - 1)!} \sum_{n=m-k}^{\infty} \frac{(a')_n (1 - c + a + a' + k)_n}{n! (n - m + k)!} \times \\ &\times \left. \left[ h_n^-(a', 1 - c + a + a' + m, m - k) + \ln(-\zeta) \right] \zeta^{-n} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{c.35})$$

где величины  $h_n^-$  находятся из (2.11). Если же  $m < k$ , то с помощью формул аналитического продолжения (2.28), (2.16) получаем следующее представление:

$$F(a', b - a - k; c - a - k; \zeta) = \frac{\Gamma(c - a - k) (k - m - 1)!}{\Gamma(a') \Gamma(c - a - a' - m)} w_2(\zeta), \quad (\text{c.36})$$

$$\begin{aligned}
 w_2(\zeta) = & (-\zeta)^{-a'-m+k} \left\{ \sum_{n=0}^{k-m-1} \frac{(a'+m-k)_n (1-c+a+a'+m)_n}{n! (1+m-k)_n} \zeta^{-n} + \right. \\
 & + \frac{(-1)^{k-m}}{(k-m-1)!} \sum_{n=k-m}^{\infty} \frac{(a'+m-k)_n (1-c+a+a'+m)_n}{n! (n+m-k)!} \times \\
 & \left. \times [h_n^- (a'+m-k, 1-c+a+a'+m, k-m) + \ln(-\zeta)] \zeta^{-n} \right\}, \tag{c.37}
 \end{aligned}$$

где  $h_n^-$  определяются (2.11).

Подставляя (c.34)–(c.37) в формулу (c.31) и учитывая (c.30), (c.32), устанавливаем предложение 2.10, где, напомним, область  $\mathbb{V}^2$  определена равенством (5.33).

**C.5. Доказательство предложения 2.11.** Предположим, что параметры функции  $F_1$  таковы, что разность  $(b - a - a')$  является целым отрицательным числом  $m$ , т.е. имеет место второе соотношение из формулы (5.12). Подставляя  $b = a + a' - m$  в (5.28), (5.30), (5.32) получаем в рассматриваемом случае следующее представление для функции Аппеля:

$$\begin{aligned}
 F_1(a, a'; a + a' - m, c; z, \zeta) = & \\
 = & B_1 u_1(a, a'; a + a' - m, c; z, \zeta) + B_2 u_2(a, a'; a + a' - m, c; z, \zeta); \tag{c.38}
 \end{aligned}$$

здесь функции  $u_1$  и  $u_2$  даются равенствами

$$\begin{aligned}
 u_1(a, a'; a + a' - m, c; z, \zeta) = & \\
 = & (-z)^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+a-c)_k (a)_k}{(1-a'+m)_k k!} z^{-k} F(a', a' - m - k; c - a - k; \zeta), \tag{c.39}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_2(a, a'; a + a' - m, c; z, \zeta) = & \\
 = & (-z)^{-a-a'+m} F_1 \left( 1 - c + a + a' - m, a'; a + a' - m, 1 + a' - m; \frac{1}{z}, \frac{\zeta}{z} \right), \tag{c.40}
 \end{aligned}$$

а коэффициенты  $B_1$  и  $B_2$  — следующими равенствами:

$$B_1 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(a' - m)}{\Gamma(a + a' - m) \Gamma(c - a)}, \quad B_2 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(m - a')}{\Gamma(a) \Gamma(c - a - a' + m)}. \tag{c.41}$$

Применяя формулы продолжения (2.28), (2.16) к фигурирующим в (c.39) гипергеометрическим функциям  $F(a', a' - m - k; c - a - k; \zeta)$ , находим:

$$F(a', a' - m - k; c - a - k; \zeta) = \frac{\Gamma(c - a - k)(m + k - 1)!}{\Gamma(a')\Gamma(c - a - a' + m)} w_1(\zeta), \quad (\text{c.42})$$

$$\begin{aligned} w_1(\zeta) := & (-\zeta)^{-a'+m+k} \left\{ \sum_{n=0}^{m+k-1} \frac{(a' - m - k)_n (1 - c + a + a' - m)_n}{n! (1 - m - k)_n} \zeta^{-n} + \right. \\ & + \frac{(-1)^{m+k}}{(m+k-1)!} \sum_{n=m+k}^{\infty} \frac{(a' - m - k)_n (1 - c + a + a' - m)_n}{n! (n - m - k)!} \times \\ & \left. \times [h_n^-(a' - m - k, 1 - c + a + a' - m, m + k) + \ln(-\zeta)] \zeta^{-n} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{c.43})$$

где  $h_n^-$  находится из (2.11). Подставляя (c.42), (c.43) в формулу (5.29), завершаем доказательство предложения 2.11.

**С.6. Доказательство предложения 2.14.** Перейдем к выводу формул аналитического продолжения функции Аппеля  $F_1$  в ситуации, когда ее параметры удовлетворяют первому условию (5.64), т.е имеет место логарифмический случай (С.1). Записывая интеграл (5.68) в виде умноженной на  $(-2\pi i)$  суммы вычетов в простых полюсах (5.72) и вычетов в двойных полюсах (5.74) подынтегральной функции (5.14), находим следующее соотношение для функции  $F_1$ :

$$\begin{aligned} F_1(a, a'; b, a + b + m; z, \zeta) = & \\ = & -\frac{\Gamma(a + b + m)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(a + m)\Gamma(b + m)} \left[ \sum_{k=0}^{m-1} \operatorname{res} f(s_k^{(1)}) + \sum_{k=m}^{\infty} \operatorname{res} f(s_{k,ln}^{(2)}) \right], \end{aligned} \quad (\text{c.44})$$

где величины  $\operatorname{res} f(s_k^{(1)})$  и  $\operatorname{res} f(s_{k,ln}^{(2)})$  даются соответственно равенствами (5.73) и (5.75).

Применяя формулы продолжения (2.6), (2.7), (2.21), (2.22), к гипергеометрическим функциям  $F(a', b + k; b + m; \zeta)$ , фигурирующим в (5.73) и (5.75), находим, что для всех  $k \in \mathbb{Z}^+$ , в том числе и при  $k = 0, 1, \dots, m - 1$ , имеет место представление:

$$F(a', b + k; b + m; \zeta) = C_1 w_1(\zeta) + C_2 w_2(\zeta), \quad (\text{c.45})$$

где функции  $w_1(\zeta)$  и  $w_2(\zeta)$  даются равенствами

$$w_1(\zeta) = F(a', b+k; 1+a'-m+k; 1-\zeta), \quad (\text{c.46})$$

$$w_2(\zeta) = (1-\zeta)^{m-k-a'} F(b-a'+m, m-k; 1-a'+m-k; 1-\zeta), \quad (\text{c.47})$$

а коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  – следующими равенствами:

$$C_1 := \frac{\Gamma(b+m)\Gamma(m-k-a')}{\Gamma(m-k)\Gamma(b-a'+m)}, \quad C_2 := \frac{\Gamma(b+m)\Gamma(a'-m+k)}{\Gamma(a')\Gamma(b+k)}. \quad (\text{c.48})$$

Если же  $k = m, m+1, \dots$ , то как нетрудно увидеть, соотношения (c.45)–(c.48) переходят в следующее:

$$F(a', b+k; b+m; \zeta) = C_2 (1-\zeta)^{m-k-a'} \sum_{n=0}^{k-m} \frac{(m-k)_n (b-a'+m)_n}{n! (1-a'+m-k)_n} (1-\zeta)^n, \quad (\text{c.49})$$

Применяя формулы (2.8), (2.9), (2.26), (2.27) к функциям  $F(a', b+s; b+m; \zeta)$  из (5.75), выполняя дифференцирование по  $s$  и подставляя в полученное равенство  $s = -k$ , где  $k = m, m+1, \dots$ , находим:

$$\frac{d}{ds} \left[ F(a', b+s; b+m; \zeta) \right] \Big|_{s=k} = \tilde{C}_1 w_1(\zeta) + C_2 \tilde{w}_2(\zeta), \quad k = m, m+1, \dots, \quad (\text{c.50})$$

где функция  $w_1(\zeta)$  определяется из (c.46), а функция  $\tilde{w}_2(\zeta)$  дается формулой:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_2(\zeta) = & - (1-\zeta)^{m-a'-k} \times \\ & \times \left\{ \sum_{n=0}^{k-m} \frac{(b-a'+m)_n (m-k)_n}{n! (1-a'+m-k)_n} \left[ g_k(a', b, m) + \ln(1-\zeta) \right] (1-\zeta)^n + \right. \\ & \left. + (-1)^k (k-m)! \sum_{n=k-m+1}^{\infty} \frac{(b-a'+n)_n (m-k+n-1)!}{n! (1-a'+m-k)_n} (1-\zeta)^n \right\}, \end{aligned} \quad (\text{c.51})$$

$$\begin{aligned} g_k(a', b, m) = & \psi(b+k) - \psi(a'-m+k-n) + \\ & + \psi(1-m+k-n) - \psi(1-m+k); \end{aligned} \quad (\text{c.52})$$

коэффициент  $C_2$  находится из (c.48), а коэффициент  $\tilde{C}_1$  определяется равенством:

$$\tilde{C}_1 = -(-1)^{k-m} (k-m)! \frac{\Gamma(b+m)\Gamma(m-a'-k)}{\Gamma(b-a'+m)}. \quad (\text{c.53})$$

Подставляя (с.45)–(с.53) в (5.73), (5.75), переписывая выражения для вычетов  $\operatorname{res} f(s_k^{(1)})$  и  $\operatorname{res} f(s_k^{(2)})$  в виде двойных сумм и подставляя результат в (с.44), убеждаемся в справедливости предложения 2.14, позволяющего продолжить функцию Аппеля в область  $\mathbb{K}^{(2)}$ , определяемую соотношением (5.86).

**С.7. Доказательство предложения 2.15.** Предположим, что выполнено второе соотношение (5.64), т.е. имеет место случай (С.2). Записывая интеграл (5.67) в виде умноженной на  $(-2\pi i)$  суммы вычетов в простых полюсах (5.76) и вычетов в двойных полюсах (5.78) подынтегральной функции (5.14), находим следующее соотношение для функции  $F_1$ :

$$F_1(a, a'; b, a + b - m; z, \zeta) = -\frac{\Gamma(a + b - m)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(a - m)\Gamma(b - m)} \left[ \sum_{k=0}^{m-1} \operatorname{res} f(s_k^{(2)}) + \sum_{k=m}^{\infty} \operatorname{res} f(s_{k,ln}^{(1)}) \right], \quad (\text{с.54})$$

где величины  $\operatorname{res} f(s_k^{(2)})$  и  $\operatorname{res} f(s_{k,ln}^{(1)})$  даются соответственно равенствами (5.77) и (5.79).

Преобразуем с помощью формул продолжения (2.6), (2.7), (2.21), (2.22) гипергеометрические функции  $F(a', b - m + k; b - m; \zeta)$ , фигурирующие в (5.77) и (5.79), к виду:

$$F(a', b - m + k; b - m; \zeta) = \frac{(a')_k}{(b - m)_k} (1 - \zeta)^{-a' - k} \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n (b - m - a')_n}{n! (1 - a' - k)_n} (1 - \zeta)^n. \quad (\text{с.55})$$

Применяя формулы (2.6), (2.7), (2.21), (2.22) к функции  $F(a', b + s; b - m; \zeta)$  из (5.79), выполняя дифференцирование по  $s$  и подставляя в полученное равенство  $s = k$ , где  $k = m, m + 1, \dots$ , находим:

$$\frac{d}{ds} \left[ F(a', b + s; b - m; \zeta) \right] \Big|_{s=k} = C_1 w_1(\zeta) + C_2 w_2(\zeta), \quad k = m, m + 1, \dots, \quad (\text{с.56})$$

где функции  $w_1(\zeta)$  и  $w_2(\zeta)$  определяются равенствами:

$$w_1(\zeta) = F(a', b - m + k; 1 + a' + k; 1 - \zeta), \quad k = m, m + 1, \dots, \quad (\text{с.57})$$

$$\begin{aligned}
 w_2(\zeta) = & (1-\zeta)^{-a'-k} \times \\
 & \times \left\{ \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n (b-a'-m)_n}{n! (1-a'-k)_n} \left[ \tau_k(a', b, m) - \ln(1-\zeta) \right] (1-\zeta)^n - \right. \\
 & \left. - (-1)^k k! \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(n-k-1)! (b-a'-m)_n}{n! (1-a'-k)_n} (1-\zeta)^n \right\}, \tag{c.58}
 \end{aligned}$$

$$\tau_k(a', b, m) := \psi(a' + k - n) - \psi(b - m + k) + \psi(1 + k) - \psi(1 + k - n); \tag{c.59}$$

а коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  – следующими равенствами:

$$C_1 = -(-1)^k k! \frac{\Gamma(b-m)\Gamma(-a'-k)}{\Gamma(b-m-a')}, \quad C_2 = \frac{\Gamma(b-m)\Gamma(a'+k)}{\Gamma(a')\Gamma(b-m+k)}. \tag{c.60}$$

Подставляя (c.55)–(c.60) в (5.77) и (5.79), переписывая выражения для вычислов  $\operatorname{res} f(s_k^{(1)})$  и  $\operatorname{res} f(s_k^{(2)})$  в виде двойных сумм и подставляя результат в (c.54), завершаем доказательство предложения 2.15.

**C.8. Доказательство предложения 2.16.** Переходим к выводу формул аналитического продолжения функции Аппеля  $F_1$  в ситуации, когда ее параметры таковы, что разность  $(c-a-a'-b)$  является целым неотрицательным числом  $m$ , т.е. имеет место указанный в формуле (5.65) случай  $(\mathcal{D}.1)$ . Запишем представление (5.80), (5.81), (5.85) для функции Аппеля, подставив в указанные формулы  $c = a + a' + b + m$ :

$$\begin{aligned}
 F_1(a, a'; b, a + a' + b + m; z, \zeta) = & A_1 v_1(a, a'; b, a + a' + b + m; z, \zeta) + \tag{c.61} \\
 & + A_2 v_2(a, a'; b, a + a' + b + m; z, \zeta);
 \end{aligned}$$

здесь функции  $v_1$  и  $v_2$  даются равенствами

$$\begin{aligned}
 v_1(a, a'; b, a + a' + b + m; z, \zeta) = & \\
 = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(1-a'-m)_k k!} (1-z)^k F(a', b+k; a'+b+m; \zeta), \tag{c.62}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_2(a, a'; b, a + a' + b + m; z, \zeta) = & \\
 = & (1-z)^{a'+m} (1-\zeta)^{-a'} F_1 \left( b+m, a'; a+a'+m, 1+a'+m; 1-z, \frac{1-z}{1-\zeta} \right), \tag{c.63}
 \end{aligned}$$

а коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$  — следующими равенствами:

$$A_1 = \frac{\Gamma(a + a' + b + m) \Gamma(a' + m)}{\Gamma(a' + b + m) \Gamma(a + a' + m)}, \quad A_2 = \frac{\Gamma(a + a' + b + m) \Gamma(-m - a')}{\Gamma(a) \Gamma(b)}. \quad (c.64)$$

Для того, чтобы аналитически продолжить фигурирующие в (c.62) функции

$$F(a', b + k; a' + b + m; \zeta), \quad k \in \mathbb{Z}^+,$$

необходимо обратить внимание на то, что разность третьего и первых двух параметров этих функций является целым числом  $(m - k)$ , знак которого зависит от индекса суммирования  $k$  в формуле (c.62). Если  $k \leq m$ , то применяя формулу (2.28), (2.16), к указанным функциям, находим

$$F(a', b + k; a' + b + m; \zeta) = \frac{\Gamma(a' + b + m) (m - k - 1)!}{\Gamma(a' + m - k) \Gamma(b + m)} w_1(\zeta) \quad (c.65)$$

$$w_1(\zeta) := \sum_{n=0}^{m-k-1} \frac{(a')_n (b + k)_n}{n! (1 - m + k)_n} (1 - \zeta)^n + \frac{(-1)^{m-k}}{(m - k - 1)!} \times \\ \times \sum_{n=m-k}^{\infty} \frac{(a')_n (b + k)_n}{n! (n - m + k)!} [h_n^+(a', b + k, m - k) - \ln(1 - \zeta)] \zeta^{-n} \}, \quad (c.66)$$

где величины  $h_n^+$  имеют вид

$$h_n^+(a', b + k, m - k) = \psi(1 + n) + \psi(1 - m + k + n) - \psi(a' + n) - \psi(b + k + n). \quad (c.67)$$

Если же  $m < k$ , то с помощью формул (2.28), (2.16) получаем следующее представление:

$$F(a', b - a - k; c - a - k; \zeta) = \frac{\Gamma(a' + b + m) (k - m - 1)!}{\Gamma(a') \Gamma(b + k)} w_2(\zeta), \quad (c.68)$$

$$w_2(\zeta) := (1 - \zeta)^{m-k} \left\{ \sum_{n=0}^{k-m-1} \frac{(a' + m - k)_n (b + m)_n}{n! (1 + m - k)_n} (1 - \zeta)^n + \right. \\ \left. + \frac{(-1)^{k-m}}{(k - m - 1)!} \sum_{n=k-m}^{\infty} \frac{(a' + m - k)_n (b + m)_n}{n! (n - k + m)} \times \right. \\ \left. \times [h_n^+(a' + m - k, b + m, k - m) - \ln(1 - \zeta)] \zeta^{-n} \right\}, \quad (c.69)$$

где величины  $h_n^+$  имеют вид

$$\begin{aligned} h_n^+(a' + m - k, b + m, k - m) &= \psi(1 + m + n - k) + \psi(1 + n) - \\ &\quad - \psi(a' + m + n - k) - \psi(b + m + n). \end{aligned} \quad (\text{c.70})$$

Подставляя (c.62)–(c.70) в формулу (c.61), завершаем доказательство предложения 2.16.

**С.9. Доказательство предложения 2.17.** Предположим, что параметры функции Аппеля таковы, что разность  $(c - a - a' - b)$  является целым отрицательным числом  $-m$ , т.е. имеет место второе соотношение из формулы (5.65). Подставляя  $c = a + a' + b - m$  в равенства (5.80), (5.81), (5.85) получаем в рассматриваемом случае следующее представление для функции Аппеля:

$$\begin{aligned} F_1(a, a'; b, a + a' + b - m; z, \zeta) &= \\ &= A_1 u_1(a, a'; b, a + a' + b - m; z, \zeta) + A_2 u_2(a, a'; b, a + a' + b - m; z, \zeta); \end{aligned} \quad (\text{c.71})$$

здесь функции  $u_1$  и  $u_2$  даются равенствами

$$\begin{aligned} u_1(a, a'; b, a + a' + b - m; z, \zeta) &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(1 - a' + m)_k k!} (1 - z)^k F(a', b + k; a' + b - m; \zeta), \end{aligned} \quad (\text{c.72})$$

$$\begin{aligned} u_2(a, a'; b, a + a' + b - m; z, \zeta) &= (1 - z)^{a' - m} (1 - \zeta)^{-a'} \times \\ &\times F_1 \left( b - m, a'; a + a' - m, 1 + a' - m; 1 - z, \frac{1 - z}{1 - \zeta} \right), \end{aligned} \quad (\text{c.73})$$

а коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$  — следующими равенствами:

$$A_1 = \frac{\Gamma(a + a' + b - m) \Gamma(a' - m)}{\Gamma(a' + b - m) \Gamma(a + a' - m)}, \quad A_2 = \frac{\Gamma(a + a' + b - m) \Gamma(m - a')}{\Gamma(a) \Gamma(b)}. \quad (\text{c.74})$$

Применяя формулы продолжения (2.15), (2.24) к фигурирующим в (c.72) гипергеометрическим функциям  $F(a', b + k; a' + b - m; \zeta)$ , находим:

$$F(a', b + k; a' + b - m; \zeta) = \frac{\Gamma(a' + b - m)(m + k - 1)!}{\Gamma(a')\Gamma(b + k)} w_2(\zeta), \quad (\text{c.75})$$

$$\begin{aligned}
 w_2(\zeta) := (1 - \zeta)^{-m-k} & \left\{ \sum_{n=0}^{m+k-1} \frac{(a' - m - k)_n (b - m)_n}{n! (1 - m - k)_n} (1 - \zeta)^n + \right. \\
 & + \frac{(-1)^{m+k}}{(m+k-1)!} \sum_{n=m+k}^{\infty} \frac{(a' - m - k)_n (b - m)_n}{n! (n - m - k)!} \times \\
 & \left. \times \left[ h_n^+(a' - m - k, b - m, m + k) - \ln(1 - \zeta) \right] (1 - \zeta)^n \right\}, \tag{c.76}
 \end{aligned}$$

где  $h_n^+$  находится из (2.11).

Подставляя (c.75), (c.76) в формулу (c.72) и учитывая (c.71), (c.73), (c.74), завершаем доказательство предложения 2.17, позволяющего продолжить функцию Аппеля в область  $\mathbb{K}^2$ , определяемую из (5.86).

#### ПРИЛОЖЕНИЕ D. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1

**D.1. Каноническое решение и общее решение однородной задачи Римана — Гильберта с кусочно-постоянными  $\chi$  и  $\sigma$ .** Представленное в теореме 3.1 решение задачи Римана — Гильберта для случая кусочно-постоянных данных  $\chi$  и  $\sigma$  по существу отличается от представленного в теореме 1.5, стр. 65, только способом построения частного решения. При сведении (см. п. 3.4 главы I) к задаче сопряжения (3.22), стр. 43, коэффициенты последней  $G(\xi)$  и  $g(\xi)$  также оказываются в данном случае кусочно-постоянными:

$$G(\xi) = e^{2i\Theta(\xi)}, \quad \Theta(\xi) = \Theta_k := \frac{\pi}{2} - \arg \chi_k; \quad g(\xi) = g_k := \frac{2\sigma_k}{\chi_k}, \quad \xi \in L_k. \tag{d.1}$$

Решение задачи Римана — Гильберта принимает в этом случае специальный вид. А именно, интеграл  $\mathcal{M}(\zeta)$  из формулы (4.6), гл. I, превращается в сумму логарифмов, в результате чего каноническая функция  $X^+(\zeta)$ , определяемая равенством (6.35), гл. I, выражается в виде произведения биномов (см. ниже), а решение однородной задачи приобретает форму произведения  $N$  биномов и полинома степени  $\varkappa$  (см. ниже).

Обратимся к построению функции  $\mathcal{M}^+(\zeta)$ , определяемой модифицированным интегралом типа Коши (4.11), гл. I, в рассматриваемом случае кусочно-

постоянной функции  $\Theta(\xi)$ . Пусть  $\delta$  — точка вещественной оси из множества  $(\xi_1, \xi_N) \setminus \{\xi_k\}$ . Представим интеграл (4.11), гл. I, в виде суммы

$$\mathcal{M}^+(\zeta) = \sum_{k=0}^N \mathcal{M}_k^+, \quad \mathcal{M}_k^+(\zeta) := \Theta_k \frac{\zeta - \delta}{\pi} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \frac{dt}{(t - \delta)(t - \zeta)} \quad (\text{d.2})$$

и вычислим отдельно  $\mathcal{M}_k^+(\zeta)$ ; напомним, что  $\Theta_k$  определены в (d.1).

Замечая, что  $\mathcal{M}_0^+(\zeta)$  есть интеграл по бесконечному интервалу  $(-\infty, \xi_1)$ , найдем его в виде следующего предела

$$\mathcal{M}_0^+(\zeta) = \lim_{A \rightarrow \infty} \mathcal{M}_0^+(A, \zeta), \quad \mathcal{M}_0^+(A, \zeta) := \Theta_0 \frac{\zeta - \delta}{\pi} \int_{-A}^{\xi_1} \frac{dt}{(t - \delta)(t - \zeta)},$$

где  $\mathcal{M}_0^+(A, \zeta)$  вычисляется с использованием равенства (a.6) в виде

$$\mathcal{M}_0^+(A, \zeta) := \frac{\Theta_0}{\pi} \left( \int_{-A}^{\xi_1} \frac{dt}{t - \zeta} - \int_{-A}^{\xi_1} \frac{dt}{t - \delta} \right) = \frac{\Theta_0}{\pi} \ln \frac{(\zeta - \xi_1)(A + \delta)}{(\delta - \xi_1)(A + \zeta)};$$

переходя здесь к пределу при  $A \rightarrow \infty$ , получаем

$$\mathcal{M}_0^+(\zeta) = \frac{\Theta_0}{\pi} \ln (\zeta - \xi_1) + C_0, \quad (\text{d.3})$$

где  $C_0 \in \mathbb{R}$  не зависит от  $\zeta$ . Аналогично вычисляем интегралы  $\mathcal{M}_N^+(\zeta)$  и  $\mathcal{M}_k^+(\zeta)$

$$\mathcal{M}_N^+(\zeta) = -\frac{\Theta_N}{\pi} \ln (\zeta - \xi_N) + i\Theta_N + C_N, \quad (\text{d.4})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_k^+(A, \zeta) &:= \frac{\Theta_k}{\pi} \left( \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \frac{dt}{t - \zeta} - \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \frac{dt}{t - \delta} \right) = \\ &= \frac{\Theta_k}{\pi} \ln \frac{\zeta - \xi_{k+1}}{\zeta - \xi_k} + C_k, \quad k = \overline{1, N-1}, \end{aligned} \quad (\text{d.5})$$

где  $C_k$  и  $C_N$  вещественны и не зависят от  $\zeta$ . Заметим, что если  $\delta \in (\xi_k, \xi_{k+1})$ , то второй интеграл в круглых скобках равенства (d.5) понимается в смысле главного значения.

Учитывая равенства (3.3)–(3.5), гл. 1, и формулу (d.1), находим из (d.2)–(d.5) следующее выражение для  $\mathcal{M}^+(\zeta)$ :

$$\mathcal{M}^+(\zeta) = \ln \prod_{k=1}^N (\zeta - \xi_k)^{\alpha_k + \beta_k} + i\Theta_N + C; \quad (\text{d.6})$$

здесь  $C := \sum_{k=0}^N C_k$  — вещественная константа.

Поскольку согласно теореме 1.2 из п. 5.2, гл. I, каноническое решение  $X^+(\zeta)$  определяется с точностью до мультипликативной вещественной постоянной, то подставим в формулу (6.35), гл. I, для его нахождения вместо  $\mathcal{M}^+(\zeta)$  функцию  $\tilde{\mathcal{M}}^+(\zeta) = \mathcal{M}^+(\zeta) - C$  и получим требуемую формулу (1.12), стр. 164, для определения  $X^+(\zeta)$ . В этой формуле выбрана такая ветвь функции, которая принимает положительные значения при вещественных  $\zeta \in (\xi_N, +\infty)$ . Нетрудно убедиться, что построенное каноническое решение имеет на бесконечности асимптотику (5.16), гл. I, где  $\varkappa$  — индекс задачи, определяемый по формуле (5.17), гл. I (или, что тоже самое, формуле (1.10), стр. 164).

Учитывая, что каноническое решение  $X^+(\zeta)$  сингулярной задачи Римана — Гильберта для случая кусочно-постоянных коэффициентов имеет вид (1.12), стр. 164, получаем из теоремы 1.3 следующее

**Предложение d.1.** (i) *Если индекс  $\varkappa$ , определяемый по формуле (1.10), стр. 164, неотрицателен, то решение  $\Psi^+ \in \mathcal{H}^+$  однородной задачи Римана — Гильберта (1.7)–(1.9), стр. 163, с кусочно-постоянными данными (1.1), удовлетворяющими условиям (1.6), имеет следующий вид:*

$$\Psi^+(\zeta) = e^{i\Theta_N} \prod_{j=1}^N (\zeta - \xi_j)^{\alpha_j - n_j} P_\varkappa(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{H}^+, \quad (\text{d.7})$$

где  $P_\varkappa(\zeta)$  — произвольный многочлен степени  $\varkappa$  с вещественными коэффициентами.

(ii) *При  $\varkappa < 0$  однородная задача Римана — Гильберта в классе  $\mathcal{H}^+$  не имеет решений, отличных от тождественного нуля.*

**D.2. Частное решение неоднородной задачи.** Напомним, что согласно (6.5), гл. I, искомое частное решение представляется в виде произведения

$$\mathcal{N}^\pm(\zeta) = X^\pm(\zeta) \mathcal{F}^\pm(\zeta). \quad (\text{d.8})$$

Здесь каноническое решение  $X^+(\zeta)$  в верхней полуплоскости дается формулой (1.12), стр. 164, а в нижней определяется равенством  $X^-(\zeta) = \overline{X^+(\bar{\zeta})}$ . Перейдем к нахождению функции  $\mathcal{F}$ .

С помощью представления (6.5), гл. I, для функций  $\mathcal{N}^\pm(\zeta)$  приходим к задаче о скачке (6.6)–(6.8), гл. I, относительно  $\mathcal{F}(\zeta)$ . Ее решение будем искать в виде суммы вида (1.13), стр. 164, точнее

$$\mathcal{F}(\zeta) = \sum_{k=0}^N \mathcal{F}_k(\zeta), \quad (\text{d.9})$$

где для функций  $\mathcal{F}_k(\zeta)$  получаем условие комплексного уравновешивания и следующие условия скачка на вещественной оси:

$$\mathcal{F}_k^+(\xi) - \mathcal{F}_k^-(\xi) = \begin{cases} g_k / X^+(\xi), & \xi \in L_k, \\ 0, & \xi \in \mathbb{R} \setminus [\xi_k, \xi_{k+1}]; \end{cases} \quad (\text{d.10})$$

напомним, что  $g_k$  из (d.10) определяются в (d.1). Кроме того, полагаем, что функции  $\mathcal{F}_k$  удовлетворяют асимптотическим оценкам, аналогичным оценкам (6.7), стр. 57, для  $\mathcal{F}(\zeta)$ , а именно, для функций  $\mathcal{F}_k$ ,  $k = \overline{1, N-1}$ , эти асимптотики задаются в трех точках,  $\xi_0$ ,  $\xi_k$  и  $\xi_{k+1}$ , для функции  $\mathcal{F}_0$  — в двух,  $\xi_0$  и  $\xi_1$ , а для функции  $\mathcal{F}_N$  — также в двух,  $\xi_0$  и  $\xi_N$ .

Если выполняется соотношение (1.6), стр. 163, то эти оценки имеют следующий вид:

- в бесконечности для функций  $\mathcal{F}_k$  при  $k = \overline{0, N}$

$$\mathcal{F}_k(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^\varkappa), \quad \zeta \rightarrow \infty; \quad k = \overline{0, N}; \quad (\text{d.11})$$

- в конечных точках  $\xi_k$  и  $\xi_{k+1}$  для функций  $\mathcal{F}_k$  при  $k = \overline{1, N-1}$

$$\mathcal{F}_k(\zeta) = \begin{cases} \mathcal{O}[(\zeta - \xi_k)^{-\alpha_k}], & \zeta \rightarrow \xi_k, \\ \mathcal{O}[(\zeta - \xi_{k+1})^{-\alpha_{k+1}}], & \zeta \rightarrow \xi_{k+1}; \end{cases} \quad (\text{d.12})$$

- в точке  $\xi_1$  для функции  $\mathcal{F}_0$  и в точке  $\xi_N$  для функции  $\mathcal{F}_N$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0(\zeta) &= \mathcal{O}[(\zeta - \xi_1)^{-\alpha_1}], \quad \zeta \rightarrow \xi_1, \\ \mathcal{F}_N(\zeta) &= \mathcal{O}[(\zeta - \xi_N)^{-\alpha_N}], \quad \zeta \rightarrow \xi_N. \end{aligned} \quad (\text{d.13})$$

При неотрицательном индексе  $\varkappa$  в качестве аналога функции  $\mathcal{S}(\zeta)$  из (6.10), гл. I, принимаем  $(\zeta - \tau_*)^\varkappa$  или  $(\zeta - \tau^*)^\varkappa$ , где  $\tau_*$  и  $\tau^*$  — точки вещественной оси, лежащие соответственно на множествах  $\mathbb{R} \setminus (-\infty, \xi_1)$  и  $\mathbb{R} \setminus (\xi_N, +\infty)$ .

Учитывая выражение (d.1) для  $g(\xi)$ , получаем для решения задачи о скачке (d.10)–(d.13) в верхней полуплоскости представление (1.14)–(1.15), стр. 164.

При  $\varkappa = -1$  видим, что функции  $\mathcal{F}_k^+$ , вычисляемые по формулам (1.14)–(1.15), стр. 164, где формально полагаем  $\varkappa = 0$ , удовлетворяют условиям (d.10)–(d.13).

При  $\varkappa < -1$  функции  $\mathcal{F}_k^+$ , вычисляемые по формулам (1.14)–(1.15), стр. 164, также удовлетворяют условию скачка (d.10) и имеют требуемое поведение (d.12), (d.13) в конечных точках из  $\{\xi_k\}$ , однако, они не отвечают условию (d.11) на бесконечности. Вместе с тем, в соответствии с теоремой 1.5 их сумма (d.9) может удовлетворять этому условию, если и только если выполняются условия разрешимости (6.31), гл. 1. Для рассматриваемого случая кусочно–постоянных данных  $\chi(\xi)$  и  $\sigma(\xi)$  задачи Римана – Гильберта эти условия, как нетрудно убедиться, означают, что величины  $\sigma_k/\chi_k$  удовлетворяют системе линейных уравнений (1.15), стр. 164.

Подытоживая сказанное, приходим к следующему предложению.

**Предложение d.2.** *Если кусочно–постоянные данные (1.1), задачи Римана – Гильберта (1.7)–(1.9) удовлетворяют условиям (1.6), то*

**(i)** *функция  $\mathcal{F}^+$  в представлении (d.8) частного решения  $\mathcal{N}^+$  дается формулой (1.13), стр. 164, где  $\mathcal{F}_k^+$ ,  $k = \overline{0, N}$ , имеют вид (1.14)–(1.15), стр. 164.*

**(ii)** *При  $\varkappa = -1$  в указанных представлениях следует формально положить  $\varkappa = 0$ .*

**(iii)** *При отрицательном индексе  $\varkappa < -1$  для существования решения задачи необходимо и достаточно потребовать выполнение условий (1.15), стр. 164.*

Суммируя сказанное в предложениях d.1 и d.2 и учитывая равенства  $\mathcal{P}^+ = \Psi^+ + \mathcal{N}^+$ ,  $\mathcal{N}^+ = X^+ \mathcal{F}^+$ , убеждаемся в справедливости теоремы 3.1.

# Литература

- [1] Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: Гос. научно-техн. изд-во Украины, 1939.
- [2] Акасофу С.И., Чепмен С. Солнечно-земная физика. Ч. 2. М.: Мир, 1975.
- [3] Альфвен Х. Космическая электродинамика. М.: ИЛ., 1952.
- [4] Аптекарев А.И., Лысов В.Г. Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита — Паде // Матем. сб. 2010. Т. 201. №2. С. 29–78.
- [5] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987.
- [6] Безродных С.И. О нахождении коэффициентов в новом представлении решения задачи Римана — Гильберта с помощью функции Лауричеллы // Математические заметки. 2017. Т. 101. Вып. 5. С. 647–668.
- [7] Безродных С.И. Аналитическое продолжение функции Аппеля и интегрирование связанной с ней системы уравнений в логарифмическом случае // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 4. С. 555–587.
- [8] Безродных С.И. Формулы аналитического продолжения и соотношения типа Якоби для функции Лауричеллы // Доклады Академии наук. 2016. Т. 467. № 1. С. 7-12.
- [9] Безродных С.И. Дифференциальные соотношения типа Якоби для функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}$  // Математические заметки. 2016. Т. 99. Вып. 6. С. 832–847.
- [10] Безродных С.И. Об аналитическом продолжении функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}$  // Математические заметки. 2016. Т. 100. Вып. 2. С. 296–302.
- [11] Безродных С.И., Власов В.И. Сингулярная задача Римана — Гильберта в сложных областях // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 12. С. 72–122.
- [12] Безродных С.И., Сомов Б.В. Аналитическое решение задачи о взаимодействии ударной волны с магнитосферой нейтронной звезды // Доклады Академии наук. 2014. Т. 457. №4. С. 406–410.
- [13] Безродных С.И., Власов В.И., Сомов Б.В. Обобщенные аналитические модели токового слоя Сыроватского // Письма в Астрон. журнал. 2011. Т. 37. № 2. С. 133–150.

- [14] Безродных С.И., Власов В.И., Сомов Б.В. Обобщенные модели токового слоя Сыроватского с присоединенными МГД-ударными волнами // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика, Физика. 2011. №24 (119). Вып. 25. С. 35–46.
- [15] Безродных С.И., Власов В.И., Сомов Б.В. Аналитическая модель магнитного пересоединения при наличии присоединенных к токовому слою ударных волн // Письма в Астрон. журн. 2007. Т. 33. № 2. С. 153–160.
- [16] Безродных С.И., Власов В.И. Сингулярная задача Римана — Гильберта в сложных областях // Spectral and Evolution Problems. 2006. Vol. 16. Р. 51–61.
- [17] Безродных С.И. О задаче Римана — Гильберта с условиями роста // Spectral and Evolution Problems. 2005. Vol. 15. Р. 112–118.
- [18] Безродных С.И., Власов В.И. Задача Римана — Гильберта в сложной области для модели магнитного пересоединения в плазме // Журнал вычисл. мат. и матем. физ. 2002. № 3. Т. 42. С. 277–312.
- [19] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973.
- [20] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967.
- [21] Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М: Изд–во иностр. лит., 1961.
- [22] Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа // Тр. МИАН СССР. 1953. V. 41. С. 3–59.
- [23] Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М: Изд–во АН СССР, 1959.
- [24] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
- [25] Богатырев А.Б. Конформное отображение прямоугольных семиугольников // Матем. сб. 2012. Т. 203. №12. С. 35–56.
- [26] Боярский Б.В. Об особом случае задачи Римана — Гильберта // Докл. АН СССР. 1958. Т. 119. №3. С. 411–414.
- [27] Брушилинский К.В., Зaborов А.М., Сыроватский С.И. Численный анализ токового слоя в окрестности магнитной нулевой линии // Физика плазмы. 1980. Т. 6. Вып. 2. С. 297–311.

- [28] *Векуа Н.П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970.
- [29] *Векуа И.Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948.
- [30] *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.
- [31] *Венков А.В.* Об акцессорных коэффициентах уравнения Фукса второго порядка с вещественными особыми точками // Автоморфные функции и теория чисел. 1. (Записки научн. семинаров ЛОМИ). 1983. Т. 129. С. 17–29.
- [32] *Вечеславов В.В., Кокоуллин В.И.* Определение параметров конформного преобразования односвязных многоугольных областей // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1973. Т.13. №4. С. 865–872.
- [33] *Вишик М.И., Эскин Г.И.* Уравнения в свертках в ограниченной области в пространствах с весовыми нормами // Матем. сб. 1966. Т. 69. №1. С. 65–110.
- [34] *Владимиров В.С.* Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964.
- [35] *Власов В.И.* Об одном методе решения смешанных задач для уравнения Лапласа // Доклады АН СССР. 1977. Т. 237. №5. С. 1012–1015.
- [36] *Власов В.И.* О вариации отображающей функции при деформировании области // Доклады АН СССР. 1984. Т. 275. №6. С. 1299–1302.
- [37] *Власов В.И.* Краевые задачи в областях с криволинейной границей. М.: ВЦ АН СССР, 1987.
- [38] *Власов В.И.* Краевые задачи в областях с криволинейной границей. Докторская дисс. М.: ВЦ АН СССР, 1990.
- [39] *Власов В.И., Волков Д.Б.* К задаче обращения для уравнения класса Фукса // Дифференц. уравн. 1986. Т. 22. №2. С. 1854–1864.
- [40] *Власов В.И., Пальцев А.Б.* Аналитико–численный метод конформного отображения сложных областей // Докл. АН. 2009. Т. 429. №1. С. 12–14.
- [41] *Власов В.И., Скороходов С.Л.* О развитии метода Треффца // Доклады Академии наук, 1994. Т. 337. №6. С.713–717.
- [42] *Власов В.И., Марковский С.А., Сомов Б.В.* Об аналитической модели магнитного пересоединения в плазме. — Рукопись депонирована в ВИ-НИТИ 6 января 1989 г. №769–В89. 19 с.

- [43] Гахов Ф.Д. О краевой задаче Римана // Матем. сб. 1937. Т. 2. №44. С. 673–683.
- [44] Гахов Ф.Д. Линейные краевые задачи теории функций комплексной переменной // Изв. Казанского физ.–матем. общества. 1938. Т. 10. №3. С. 39–79.
- [45] Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
- [46] Гахов Ф.Д. Краевая задача Римана для системы  $n$  пар функций // Успехи матем. наук. 1952. Т. 7. Вып. 4 (50). С. 3–54.
- [47] Гельфанд И.М. Общая теория гипергеометрических функций // Докл. АН СССР. 1986. Т. 288. №1. С. 14–18.
- [48] Гельфанд И.М., Граев М.И., Ретах В.С. Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа // Успехи матем. наук. 1992. Т. 47. Вып. 4(286). С. 3–82.
- [49] Гельфанд И.М., Зелевинский А.В., Капранов М.М. Гипергеометрические функции и торические многообразия // Функциональный анализ и его приложения. 1987. Т. 23. №2. С. 12–26.
- [50] Гиндикин С.Г. Анализ в однородных областях // Успехи математических наук. 1964. Т. 19. Вып. 4(118). С. 3–92.
- [51] Говоров Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М.: Наука, 1986.
- [52] Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
- [53] Голубева В.А. Некоторые вопросы аналитической теории фейнмановских интегралов // Успехи матем. наук. 1976. Вып. 2(188). С. 135–202.
- [54] Голубева В.А. О проблеме Редже — Гельфанда построения системы Пфаффа типа Фукса с заданным сингулярным дивизором // Современная математика. Фундаментальные направления. 2013. Т. 47. С. 33–45.
- [55] Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.–Л.: ГИТТЛ, 1952.
- [56] Голузин Г., Канторович Л., Крылов В., Мелентьев П., Муратов М., Стенин Н. Конформное отображение односвязных и многосвязных областей. Л.–М.: Наука, 1937.
- [57] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Системы интегральных уравнений на полу-прямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи матем. наук. 1958. Т. 13. Вып. 2(80). С. 3–72.

- [58] Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968.
- [59] Демидов А.С. Функционально–геометрический метод решения задач со свободной границей для гармонических функций // Успехи мат. наук. 2010. Т. 65. Вып. 1 (396). С. 3–96.
- [60] Доброхотов С.Ю., Кричевер И.М. Многофазные решения уравнения Бенджамина — Оно и их усреднение // Матем. заметки. 1991. Т. 49. Вып. 6. С. 42–58.
- [61] Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979.
- [62] Егоров А.Е., Постнов К.А. О возможном наблюдаемом проявлении воздействия ударной волны на магнитосферу нейтронной звезды // Письма в Астрон. журн. 2009. Т. 35. №4. С. 272–278.
- [63] Жигулев В.Н. О явлении магнитного "отжатия" потока проводящей среды // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126. Вып. 3. С. 521–523.
- [64] Жигулев В.Н. Ромишевский Е.А. О взаимодействии потоков проводящей среды с магнитным полем Земли // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. Вып. 5. С. 1001–1004.
- [65] Захаров В.Е., Монаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов — метод обратной задачи. М: Наука, 1980.
- [66] Зверович Э.И. Краевые задачи для аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях // Успехи матем. наук. 1971. Т. 26. Вып. 1(157). С. 113–179.
- [67] Зелёный Л.М., Динамика плазмы и магнитных полей в хвосте магнитосферы Земли. В кн.: Итоги науки и техники. Сер. Исследования космического пространства. Т. 24. М.: ВИНИТИ, 1986.
- [68] Зограф П.Г., Тахтаджян Л.А. Об уравнении Лиувилля, акцессорных параметрах и геометрии пространств Тейхмюллера для римановых поверхностей рода 0 // Матем. сб. 1987. Т. 132. №2. С. 147–166.
- [69] Истомин Я.Н., Комберг Б.В. Новая модель источника гамма–всплеска // Астрон. журн. 2002. Т. 46. №11. С. 908–917.
- [70] Имшенник В.С., Сыроватский С.И., Двухмерные течения идеально проводящего газа в окрестности нулевой линии магнитного поля // Журнал эксперимент. и теор. физ. 1967. Т. 52. №4. С. 990–1002.

- [71] *Кадомцев Б.Б.* Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1975.
- [72] *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. Л.: Физматгиз, 1962.
- [73] *Кац Б.А.* Краевая задача Римана для голоморфных матриц на неспрямляемой кривой // Известия вузов. Матем. 2017. №2. С. 22–33.
- [74] *Кац Б.А., Миронова С.Р., Погодина А.Ю.* Краевая задача о скачке на контуре с протяженными особенностями // Известия вузов. Матем. 2017. №1. С. 12–16.
- [75] *Климентов С.Б.* Границные свойства обобщенных аналитических функций. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014.
- [76] *Климентов С.Б.* Задача Римана — Гильберта в классах Харди для общих эллиптических систем первого порядка // Известия вузов. Матем. 2016. №6. С. 36–47.
- [77] *Колосов Г.В.* Применение комплексной переменной в теории упругости. М.—Л.: ОНТИ, 1935.
- [78] *Коппенфельс В., Штальман Ф.* Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит.-ры, 1963.
- [79] *Кратцер А., Франц К.* Трансцендентные функции. М.: Иностранная литература, 1963.
- [80] *Крутицкий П.А.* О стекании электрического тока с прямолинейных электродов в замагниченной полупроводниковой пленке // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. №11. С. 1689–1701.
- [81] *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2012.
- [82] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
- [83] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
- [84] *Латышев А.В.* Векторная краевая задача Римана — Гильберта в граничных задачах рассеяния поляризованного света // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. №7. С. 1109–1127.

- [85] *Манако В.В.* Представление температурного поля для полубесконечного тела, нагреваемого неподвижным лазерным лучом, через гипергеометрические функции // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.мат. науки. 2012. Выпуск 2(27). С. 115–123.
- [86] *Маричев О.И.* Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул). Минск: Наука и техника, 1978.
- [87] *Марковский С.А., Сомов Б.В.* Некоторые свойства магнитного пересоединения в токовом слое с ударными волнами // Труды 6-го ежегодного семинара "Проблемы физики солнечных вспышек". М.: Наука, 1988. С. 93–110.
- [88] *Маркушевич А.М.* Теория аналитических функций. Т. 2. Дальнейшее построение теории. М.: Наука, 1968.
- [89] *Миллер У.* Симметрии и разделение переменных. М.: Мир, 1981.
- [90] *Михлин С.Г.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1966.
- [91] *Монахов В.Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1978.
- [92] *Монахов В.Н., Семенко Е.В.* Краевые задачи и псевдодифференциальные операторы на римановых поверхностях. М.: Физматлит, 2003.
- [93] *Мусхелишвили Н.И.* Applications des intégrales analogues à celles de Cauchy à quelques probléms de la Physique Mathématique. Тбилиси: Изд–во Тбилисск. ун–та, 1922.
- [94] *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории уругости. М.: Наука, 1966.
- [95] *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
- [96] *Мусхелишвили Н.И., Квеселава Д.А.* Сингулярные интегральные уравнения с ядрами типа Коши на разомкнутых контурах // Тр. Тбилиск. матем. ин-та АН Груз. ССР. 1942. Т. 11. С. 141–172.
- [97] *Накипов Н.Н., Насыров С.Р.* "Параметрический метод нахождения акцессорных параметров в обобщенных интегралах Кристоффеля – Шварца" // Ученые записки Казанского университета. Серия Физ.–матем. науки. 2016. Т. 158. №2. С. 202–220.
- [98] *Оберц П.* Двумерная задача о форме магнитосферы // Геомагнетизм и аэрономия. 1973. Т. 13. Вып. 5. С. 896–905.

- [99] *Пальцев Б.В.* О канонической матрице решений задачи линейного сопряжения с кусочно–непрерывным матричным коэффициентом на элементарной кусочно–гладкой кривой // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297. №5. С. 1054–1058.
- [100] *Пальцев Б.В.* Асимптотика спектра интегральных операторов свертки на конечном интервале с однородными полярными ядрами // Известия РАН. Серия математическая. 2003. Т. 67. №4. С. 67–154.
- [101] *Прист Э., Форбс Т.* Магнитное пересоединение. М.: Физматлит, 2005.
- [102] *Ратнараджса Т., Вальянкур Р., Алво М.* Комплексные случайные матрицы и пропускная способность райсовского канала // Пробл. передачи информ. 2005. Т. 41. Вып. 1. С. 3–27.
- [103] *Саати Т.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М.: Сов. Радио, 1971.
- [104] *Салимов Р.Б., Шабалин П.Л.* К решению задачи Гильберта с бесконечным индексом // Матем. заметки. 2003. Т. 73. Вып. 5. С.724–734.
- [105] *Салимов Р.Б., Шабалин П.Л.* О разрешимости однородной задачи Гильберта с разрывами коэффициентов и двусторонним завихрением на бесконечности логарифмического порядка // Известия вузов. Матем. 2016. №1. С. 36–48.
- [106] *Садыков Т.М., Цих А.К.* Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных. М.: Наука, 2014.
- [107] *Симоненко И.Б.* Краевая задача Римана для  $n$  пар функций с измеримыми коэффициентами и ее применение к исследованию сингулярных интегралов в пространствах  $L_p$  с весами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. №2. С. 277–306.
- [108] *Смирнов В.И.* Задача обращения линейного дифференциального уравнения второго порядка с четырьмя особыми точками. Магистерская диссертация. Пг., 1918.
- [109] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 3, часть 2. М.: Наука, 1969; Т. 4. М.: Физматгиз, 1958.
- [110] *Смородинский Я.А., Шелепин А.Л., Шелепин Л.А.* Групповые и вероятностные основы квантовой теории // Успехи физических наук. 1992. Т. 162. № 12. С. 1–95.

- [111] Соболев С.Л. Об одной предельной задаче теории логарифмического потенциала и ее приложении к отражению упругих волн // Тр. Сейсм. ин–та. 1930. №11. С. 1–18.
- [112] Солдатов А.П. Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М.: Высшая школа, 1991.
- [113] Солдатов А.П. Метод теории функций в эллиптических задачах на плоскости. II. Кусочно гладкий случай // Изв. АН СССР. Серия математическая. 1992. Т. 56, №3. С. 566–604.
- [114] Солдатов А.П. Весовые классы Харди аналитических функций // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. №6. С. 809–817.
- [115] Солдатов А.П. К теории анизотропной плоской упругости // Современная математика. Фундаментальные направления. 2016. Т. 60. С. 114–163.
- [116] Сомов Б.В. Космическая электродинамика и физика Солнца. М.: МГУ, 1993.
- [117] Сомов Б.В. О возможности быстрого пересоединения магнитного поля и ускорения частиц в неравновесной магнитосфере релятивистской звезды // Письма в Астрон. журн. 2011. Т. 37. №10. С. 740–753.
- [118] Сомов Б.В., Безродных С.И., Власов В.И. Математические аспекты теории пересоединения в сильных магнитных полях // Известия РАН. Серия физическая. 2006. Т. 70. № 1. С. 16–28.
- [119] Сомов Б.В., Сыроватский С.И. Электрическое и магнитное поле, возникающее при разрыве нейтрального токового слоя // Изв. АН СССР, Сер. физ. 1975. V. 39. №2. С. 375–378.
- [120] Сохоцкий Ю.В. Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды. С.-Петербург, 1873.
- [121] Спиридовонов В.П. Очерки теории эллиптических гипергеометрических функций // Успехи матем. наук. 2008. Т. 63. Вып. 3 (381). С. 3–72.
- [122] Суетин С.П. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда // Успехи матем. наук. 2002. Т. 57. Вып. 1 (343). С. 45–142.
- [123] Сыроватский С.И. Динамическая диссипация и ускорение частиц // Астрон. журн. 1966. Т. 43. №2. С. 340-355.
- [124] Сыроватский С.И. О возникновении токовых слоев в плазме с вморооженным сильным магнитным полем // Журнал эксперим. и теор. физ. 1971. Т. 60. С. 1721–1741.

- [125] Сыроватский С.И. Характеристики токового слоя и тепловой триггер солнечных вспышек // Письма в Астрон. журн. 1976. Т. 2. №1. 35–38.
- [126] Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965.
- [127] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Т. 2. М.: Эдиториал УРСС, 2002.
- [128] Фок В.А.. О конформном изображении четырехугольника с нулевыми углами на плоскости // Журнал Ленинград. физ.-матем. о-ва. 1927. Т. 1. №2. С. 147–167.
- [129] Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.-Л.: ОНТИ, 1937.
- [130] Франкль Ф.И. Избранные работы по газовой динамике. М.: Наука, 1973.
- [131] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. II. Функции нескольких переменных. М.: Наука, 1976.
- [132] Шалашилин В.И. Кузнецов Е.Б. Метод продолжения по параметру и наилучшая параметризация. М.: УРСС, 1999.
- [133] Шерман Д.И. О связи основной задачи теории уругости с одним особым случаем задачи Пуанкаре // Прикл. матем. и мех. 1953. Т. 17. С. 685–692.
- [134] Шерман Д.И. К уравнению Прандтля в теории крыла конечного размаха // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1948. №5. С. 595-600.
- [135] Шифрин Е.И. Пространственные задачи линейной механики разрушения. М.: Физматлит, 2002.
- [136] Шиффер М. Некоторые новые результаты в теории конформных отображений. Приложение к книге: Курант Р., Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. М.: Иностр. лит., 1953.
- [137] Штаерман И.Я. Контактная задача теории уругости. М.: Гостехиздат, 1949.
- [138] Aomoto K. On the structure of integrals of power products of linear functions // Sci. Papers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo. 1977. V. 27. №2. P. 49–61.
- [139] Aomoto K., Kita M. Theory of Hypergeometric Functions. Springer monographs in mathematics. Tokyo, Dordrecht, Heidelberg: Springer, 2011.
- [140] Appel P. Sur les séries hypergéométriques de deux variables et sur des équations différentielles linéaires aux dérivées partielles // Comptes Rendus. 1880. V. 90. P. 296–298.

- [141] *Appel P.* Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables // *Journal de mathématiques pures et appliquées* 3e série. 1882. V. 8. P. 173–216.
- [142] *Appel P., Kampé de Feriet J.* Fonctions hypergéométriques et hypersphérique. Paris: Gauthier — Villars, 1926.
- [143] *Becker W. (Ed.)* Neutron Stars and Pulsars. Berlin: Springer–Verlag, 2009.
- [144] *Benz A.O., Güdel M.* Physical processes in magnetically driven flares on the Sun, stars, and young stellar objects // *Annual Review Astronomy and Astrophysics*. 2010. V. 48. P. 241–287.
- [145] *Bers L.* Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics. New York: Wiley, 1958.
- [146] *Bezrodnykh S.I., Vlasov V.I.* On a new representation for solution to the Riemann — Hilbert problem // *Mathematical Notes*. 2016. V. 99. №6. P. 932–937.
- [147] *Bezrodnykh S.I., Somov B.V.* An analysis of magnetic field and magnetosphere of neutron star under effect of a shock wave // *Advances in Space Research*. 2015. V. 56. P. 964–969.
- [148] *Bezrodnykh S.I., Vlasov V.I., Somov B.V.* Analytical models of generalized Syrovatskii's current layer with MHD shock waves // *Astronomic and Space Science Proceedings*. Vol. 30. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2012. P. 133–144.
- [149] *Begehr H., Wen G.C.* Nonlinear elliptic boundary value problems and their application. Harlow: Addison Wesley — Longman, 1996.
- [150] *Bers L.* Theory of pseudo-analytic functions. N.–Y.: New York Univ., 1953.
- [151] *Bieberbach L.* Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung // *Rendiconti dei Circ. Mat. di Palermo*. 1914. V. 38. Fas. I. P. 98–112.
- [152] *Biskamp D.* Magnetic Reconnection via Current Sheets // *Phys. Fluids*. 1986. V. 29. P. 1520–1531.
- [153] *Biskamp D.* Magnetic Reconnection in Plasmas. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.
- [154] *Brychkov Yu.A., Saad N.* Some formulas for the Appell function  $F_1(a, b, b'; c; w, z)$  // *Integral Transforms and Special Functions*. 2012. Vol. 23. №11. P. 793–802
- [155] *Bytev V.V., Kalmykov M.Yu., Moch S.-O.* Hypergeometric functions differential reduction: MATHEMATICA based packages for differential reduction of generalized hypergeometric functions:  $F_D$  and  $F_S$  Horn-type

- hypergeometric functions of three variables. // *Comput.Phys. Commun.* 2014. Vol. 185. P. 3041–3058.
- [156] *Caratheodory C.* Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten // *Math. Ann.* 1912. B. 72. S. 107–144.
- [157] *Carleman T.* Sur la résolution de certaines équations intégrales // *Arkiv för Mathematik, Astronomi och Physik.* 1922. V. 16. №26. P. 1–19.
- [158] *Chakravarthy S., Anderson D.* Numerical conformal mapping // *Math. Comp.* 1979. V. 33. P. 953–969.
- [159] *Chung K.L., Williams R.J.* An introduction to stochastic integration. Boston: Birkhäuser, 1983.
- [160] *Chamayou J.-F., Wesolowski J.* Lauricella and Humbert functions through probabilistic tools // *Integral Transforms and Special Functions.* 2009. Vol. 20. №7. P. 529–538.
- [161] *Chapman S., Ferraro V.C.A.* A new theory of magnetic storms, part 1. The initial phase // *Terr. Mag.* 1931. V. 36. P. 171–186.
- [162] *Colpi M., Casella P., Gorini V. et al (Eds).* Physics of Relativistic Objects in Compact Binaries: From Birth to Coalescence. Dordrecht: Springer, 2009.
- [163] *Deligne P., Mostow G.D.* Monodromy of hypergeometric functions and nonlattice integral monodromy // *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 1986. V. 63. P. 5–89.
- [164] *Driscoll T.A.* A MATLAB toolbox for Schwarz – Christoffel mapping // *ACM Transactions Math. Soft.* 1996. V. 22. P. 168–186.
- [165] *Duan W.H., Queka S.T., Wangb Q.* Generalized hypergeometric function solutions for transverse vibration of a class of non-uniform annular plates // *Journal of Sound and Vibration.* 2005. Vol. 287. P. 785–807.
- [166] *Dwork B.* Generalized hypergeometric functions. Oxford: Clarendon Press, 1990.
- [167] *Efendiev M.A., Wendland W.L.* Nonlinear Riemann – Hilbert problem for multiply connected domains // *J. Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications.* 1996. V. 27. P. 37–58.
- [168] *Erdélyi A.* Hypergeometric functions of two variables // *Acta Mat.* 1950. V. 83. Issue 131. P. 131–164.
- [169] *Exton H.* Multiple hypergeometric functions and application. New York: J. Wiley & Sons inc, 1976.

- [170] *Fornberg B.* Numerical method for conformal mapping // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1980. Vol. 1. №. 3. P. 386–400.
- [171] *Fuchs L.* Lineare Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten // J. reine und angew. Math. 1866. B. 66. S. 60–121.
- [172] *Furth H.P., Killen J., Rosenbluth M.N.* Finite resistivity instabilities of a sheet pinch // Phys. Fluids. 1963. V. 6. P. 459–484.
- [173] *Gaier D.* Konstruktive Methoden der konformen Abbildung. Berlin: Springer–Verlag, 1964.
- [174] *Garrick I.E.* Conformal mapping in aerodynamics with emphasis on the method of successive conjugates // Constructions and Applications of Conformal Maps. Proc. of Symp. Los Angeles. Nat. Bureau of Standards, 1952. P. 137–147.
- [175] *Hawbold H.J., Mathai A.M.* On the nuclear energy generation rate in a simple analytic stellar model // Annalen der Physik. 1984. B. 41. H. 6. S. 372–379.
- [176] *Henrici P.* Applied and Computational Complex Analysis. Vol. 1–3. New York: John Wiley and Sons, 1991.
- [177] *Hilbert D.* Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Functionentheorie // Verhandl. des III Internat. Math. Kongr. Heidelberg, 1904.
- [178] *Hilbert D.* Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig – Berlin: B.G. Teubner, 1912.
- [179] *Horn J.* Über die konvergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veränderlichen // Math. Ann. 1889. Vol. 34. P. 544–600.
- [180] *Horn J.* Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen // Math. Ann. 1931. Vol. 105. №1. P. 381–407.
- [181] *Howell L.H., Trefethen L.N.* A modified Schwarz – Christoffel transformation for elongated regions // SIAM J. Stat. Comput. 1990. V. 11. P. 928–949.
- [182] *Ibrahim R.W.* An application of Lauricella hypergeometric functions to the generalized heat equations // Malaya Journal of Mathematics. 2014. №1. P. 43–48.
- [183] *Isakov V.* Prospecting discontinuities by boundary mesurments in inverse problems. In: "Principles and Applications in Geophysics, Technology and Medicine". Academy Verlag, 1993. P. 215–223.

- [184] *Ismail M.E.H., Pitman J.* Algebraic evaluations of some Euler integrals, duplication formulae for Appell's hypergeometric function  $F_1$ , and Brownian variations. Technical report №554. Bercley: University of California, 1999.
- [185] *Iwasaki K., Kimura H., Shimomura Sh., Yoshida M.* From Gauss to Painlevé. A Modern Theory of Special Functions. Aspects of Mathematics. V. E16. Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn, 1991.
- [186] *Jacob C.* Introduction mathématique a la mécanique des fluides. Paris: Gauthier–Villars, 1959.
- [187] *Jacobi C.G.J.* Untersuchungen über die Differentialgleichungen der hypergeometrischen Reihe // J. für Reine Angew. Math. 1859. V. 56. P. 149–165.
- [188] *Julia G.* Sur une suite double de polynomes liée à la représentation conforme des airs planes simplement connexes // Liouville's Journ. 1928. Ser. 9. T. 7. P. 381–407.
- [189] *Kaplan I.G., Yudin G.L.* Nonrelativistic Compton effect on a bound electron // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1975. Vol. 69. P. 9–22.
- [190] *Keldysh M.V., Lavrentieff M.A.* Sur la representation conforme des domaines limites par les courbes rectifiable // Ann. sci. Ecole norm supér. (3). 1937. T. 54. F. 1. P. 1–38. Русский перевод: М.В.Келдыш. Избранные труды. Математика. М.: Наука, 1985. С. 30–47.
- [191] *Kerov S. V., Tsilevich N. V.* The Markov — Krein correspondence in several dimensions // Journ. of math. sciences. 2004. Vol. 121. №3. P. 2345–2359.
- [192] *Kraniotis G. V.* General relativity, Lauricella's hypergeometric function  $F_D$  and the theory of braids. 2007. arXiv:0709.3391.
- [193] *Krikeles B.C., Rubin R.L.* On the crowding of parameters associated with Schwarz — Christoffel transformation // Appl. Math. Comut. 1988. Vol. 28. №4. P. 297–308.
- [194] *Lauricella G.* Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili // Rendiconti Circ. Math. Palermo. 1893. V. 7. P. 111–158.
- [195] *Lijoi A., Regazzini E.* Means of a Dirichlet process and Multiple hypergeometric functions // The Annals of Probability. 2004. Vol. 32. №2. P. 1469–1495.
- [196] *Lohofer G.* Theory of an electromagnetically deviated metal sphere. 1: Absorbed power // SIAM J. Appl. Math. 1989. Vol. 49. P. 567–581.

- [197] *Lorimer D.R., Bailes M., McLaughlin M.A., et al.* A Bright Millisecond Radio Burst of Extragalactic Origin // *Science*. 2007. №318. P. 777–780.
- [198] *Martínez-González P., Zarzo A.* Higher order hypergeometric Lauricella function and zero asymptotics of orthogonal polynomials // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2010. Vol. 233. P. 1577–1583.
- [199] *Mathai A.M., Saxena R.K.* Generalized hypergeometric functions with applications in statistics and physical sciences. *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin – Heidelberg – New York: Springer–Verlag, 1973.
- [200] *Menikoff R., Zemach C.* Methods for numerical conformal Mapping // *J. Comput. Phys.* 1980. Vol. 36. №3. P. 366–410.
- [201] *Niukkanen A.W.* Generalized hypergeometric series arising in physical and quantum chemical applications // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1983. Vol. 16. P. 1813–1825.
- [202] *Noether F.* Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen // *Math. Ann.* 1921. Bd. 82, H. 1–2, S. 42-63.
- [203] *Olsson O. M.* Integration of the partial differential equations for the hypergeometric function  $F_1$  and  $F_D$  of two and more variables // *J. Math. Phys.* 1964. V. 5. Issue 420. P. 420–430.
- [204] *Ore O.* Sur la forme de fonctions hypergéométriques de plusieurs variables // // *J. Math. Pure et Appl.* 1930. V. 9. №4. P. 311–327.
- [205] *Ostrovski A.* On the convergence of Theodorsen's and Garrick's method of conformal mapping // *Construction and Applications of Conformal Maps*. Proc. of Symp. Los Angeles. Nat. Bureau of Standards, 1952. P. 149–163.
- [206] *Parker E.N.* Cosmic Magnetic Fields. Their Origin and Their Activity. Oxford: Clarendon Press, 1979.
- [207] *Peppas K.* Performance Analysis of Maximal Ratio Diversity Receivers over Generalized Fading Channels. In book: "Advanced Trends in Wireless Communications", Ed. M.Khatib. 2011. (<http://www.intechopen.com/books/advanced-trends-in-wireless-communications>)
- [208] *Petschek H.E.* Magnetic field annihilation In: AAS–NASA Symp. on the Physics of Solar Flares, NASA SP-50. 1964. 425–439.
- [209] *Picard E.* Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques // *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 1881. V. 10. P. 305–322.

- [210] *Picard É.* Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles avec des applications à la physique mathématique. Paris: Gauthier-Villars et Cie., 1927.
- [211] *Plemelj J.* Riemannshe funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe // Monatsh. Math. und Phys. 1908. Bd. 19. S. 205–210.
- [212] *Poole E.G.C.* Introduction to theory of linear differential equations. Oxford: Clarendon Press, 1936.
- [213] *Postnov K.A., Yungelson I.R.* The Evolution of Compact Binary Star Systems // Living Reviews in Relativity. 2006. T. 9. №6.
- [214] *Poincaré H.* Leçons de mécanique céleste. T. 3. Paris: 1910, ch. 10.
- [215] *Poole E.G.C.* Introduction to the theory of linear differential equations. Oxford: Clarendon Press, 1936.
- [216] *Powell J.* On small perturbation in the two dimensional inverse conductivity problem // J. Math. Anal. Appl. 1993. V. 175. №1. P. 292–304.
- [217] *Prösdorf S.* Einige Klassen singulärer Gleichungen. — Berlin: Akademie — Verlag, 1974.
- [218] *Regge T.* Algebraic Topology Methods in the Theory of Feynman Relativistic Amplitudes, Battelle Rencontres, 1967. Lectures in Mathematics and Physics, ed. C. M. DeWitt, J. A. Wheeler. New York: W. A. Benjamin 1968.
- [219] *Riemann B.* Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe  $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$  darstellbaren Functionen // Abh. Kon. Ges. d. Wiss zu Göttingen. 1857. Vol. VII. P. 3–22.
- [220] *Riemann B.* Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse — Inauguraldissertation: Göttingen, 1851; Werke, Leipzig, 1876, S. 3–43. (Русский перевод: *Б.Риман. Сочинения.* М.: Гостехиздат, 1948. С. 49–87. "Основы общей теории функций одной комплексной переменной", с. 79.)
- [221] *Schwarz H.A.* Über diejenigen Fälle in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt // Gesammelte mathematische Abhandlungen. Berlin, 1890. B. 2. S. 211–259.
- [222] *Seely R.T.* The index of elliptic systems of singular integral operators // J. of Math. Anal. and Appl. 1963. Vol. 7. №2. P. 289–309.

- [223] *Slater L.* Generalized hypergeometric functions. Cambridge: Cambridge University Press, 1966.
- [224] *Slavyanov S.Yu., Lay W.* Special Functions. A Unified Theory Based on Singularities. Oxford: Oxford University Press, 2000.
- [225] *Srivastava H.M.* Hypergeometric functions of of three variabless // Ganita. 1964. Vol. 15. P. 97–108.
- [226] *Somov B.V.* Physical Processes in Solar Flares. Dordrecht: Kluwer Academ. Publ., 1992.
- [227] *Somov B.V.* Plasma Astrophysics. Part I, Fundamentals and Practice. Part II, Reconnection and Flares. N.–Y.: Springer Science+Business Media, LLC, 2013.
- [228] *Somov B.V., Bezrodnykh S.I., Ledentsov L.S.* Overview of open issues in the physics of large solar flares // Astronomical and astrophysical transactions. 2011. V. 27. Issue 1. P. 69–81.
- [229] *Suzuki A.T., Schmidt A.G.M.* Loop Integrals in Three Outstanding Gauges: Feynman, Light-Cone, and Coulomb // Journal of Computational Physics. 2001. Vol. 168. P. 207–218.
- [230] *Sweet P.A.* Mechanisms of solar flares // Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1969. V. 7. P. 149–176
- [231] *Symm G.T.* An integral equation method in conformal mapping // Numer. Math. 1966. V. 9. P. 250–258.
- [232] *Theodorsen T., Garrick I.E.* General potential theory of arbitrary wing sections // NACA Rep. 1933. №452.
- [233] *Thompson C., Duncan R.* The Soft gamma repeaters as very strongly magnetized neutron stars 2. Quiescent neutrino, X-ray, and Alfvén wave emission // Astrophys. J. 1996. V. 473. №1. Pt. 1. P. 322–342.
- [234] *Trefethen L.N.* Numerical computation of the Schwarz — Christoffel transformation // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1980. V. 1. P. 82–102.
- [235] *Trefethen L.N.* Numerical construction of conformal maps. — Appendix to: *Saff E.B., Snider A.D.* "Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics, Science, and Engineering". New York: Prentice Hall, 1993.
- [236] *Trefethen L.N., Driscoll T.A.* Schwarz — Christoffel mapping in the computer era // Proc. Internat. Congress Math. Berlin, 1998.

- [237] *Trefethen L.N., Driscoll T.A.* Schwarz — Christoffel transformation. Cambridge: Cambridge university press, 2005.
- [238] *Trefethen L.N., Williams R.J.* Conformal mapping solution of Laplace's equation on a polygon with oblique derivative boundary condition // *J. Comput. Appl. Math.* 1986. V. 14. P. 227–249.
- [239] *Unti T., Atkinson G.* Two dimensional Chapman — Ferraro problem with neutral sheet, 1, The boundary // *J. Geophys. Res., Sp. Phys.* 1968. V. 73. P. 7319–7327.
- [240] *Veltkamp G.W.* The drag on a vibrating aerofoil in incompressible flow // *Indagationes math.* 1958. V. 20. Fasc. 3. P. 278–297.
- [241] *Vesnel W.* The geometrical correction factor for a rectangular Hall plate // *J. Appl. Phys.* 1982. V. 53. P. 4980–4986.
- [242] *Volterra V.* Sopra alcune condizioni caratteristiche delle funzioni di una variabile complessa // *Annali di Mathematica Pura et Applicata.* 1883. V. 11. №2. P. 1–55.
- [243] *Wolfersdorf L.* On the theory of the nonlinear Hilbert problem for holomorphic functions. In: "Partial differential equations with complex analysis". Eds. H.Begehr and A.Jeffrey. Harlow: Addison Wesley — Longman, 1992. P. 134–149.
- [244] *Wegert E.* Nonlinear boundary value problems for holomorphic functions and singular integral equations. Berlin: Academie Verlag, 1992.
- [245] *Wegert E., Oestreich D.* On a non-symmetric problem in electrochemical machining // *Math. Meth. Appl. Sci.* 1997. V. 20. P. 841–854.
- [246] *Wegmann R.* Keplerian discs around magnetised neutron stars – a free boundary problem // *Meth. Verfahren Math. Phys.* 1991. V. 37. P. 233–253.
- [247] *Wendland W.* Elliptic systems in the plane. London: Pitman, 1979.
- [248] *Woods P.M., Kouveliotou C., Gögüs E., et al.* Evidence for a sudden magnetic field reconfiguration in soft gamma repeater 1900+14 // *Astrophys. J.* 2001. V. 552. №. 2, pt. 1. P. 748–755.
- [249] *Zemach C.* A conformal map formula for difficult cases // *J. Comput. Appl. Math.* 1986. V. 14. P. 207–215.