

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертации Безродных Сергея Игоревича

«Сингулярная задача Римана – Гильберта, гипергеометрическая функция Лауричеллы и приложения к астрофизике»,

представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика

Диссертация С.И. Безродных посвящена исследованию сингулярной задачи Римана – Гильберта, выводу новых представлений решения этой задачи, получению ряда важных для математической физики положений теории обобщенной гипергеометрической функции Лауричеллы, а также приложению этих результатов к некоторым современным моделям астрофизической плазмы.

Краевая задача Римана – Гильберта, заключающаяся в построении аналитической функции по заданной на границе области комбинации ее вещественной и мнимой частей, восходит к классическим работам Римана, Гильберта, Сохоцкого, Племяля, Карлемана и многих других известных математиков. Развитие теории этой задачи, важнейший вклад в которую внесли отечественные математики Ф.Д. Гахов и Н.И. Мусхелишвили, и ее применение к многочисленным прикладным проблемам активно продолжаются в настоящее время.

Вместе с тем важный для приложений вариант этой задачи, когда ее данные разрывны, а в некоторых граничных точках заданы условия неинтегрируемого роста решения, не был достаточно изучен. Именно этот весьма актуальный вариант задачи Римана – Гильберта, называемый сингулярным, и исследуется в обсуждаемой диссертации. Он возникает, в частности, в ряде современных моделей астрофизической плазмы, которые рассматриваются диссертантом в качестве приложения полученных им результатов. Это также свидетельствует о высокой актуальности темы диссертации.

Главным результатом работы, с нашей точки зрения, является создание аналитико-численных методов решения сингулярной задачи Римана – Гильберта в сложных областях, включая получение принципиально нового представления искомой функции в виде интеграла Кристоффеля – Шварца в случае кусочно-постоянных данных задачи. Такое представление выведено в третьей главе на основе результатов первой и второй глав. В главе I дано представление решения сингулярной задачи Римана – Гильберта в терминах модифицированного интеграла типа Коши для общего случая кусочно-гельдеровых данных задачи с любым числом точек разрыва и условиями неинтегрируемого степенного роста решения в этих точках. Такое представление через интегралы типа Коши также является новым. Вторая глава посвящена развитию теории функции Лауричеллы. Найденная в ней формула типа Якоби для этой функции играет ключевую роль в получении указанного

выше принципиально нового представления решения задачи Римана – Гильберта с кусочно-постоянными данными. А именно, с помощью формулы типа Якоби решение этой задачи, построенное в терминах интегралов типа Коши, преобразовано к виду интеграла Кристоффеля – Шварца. В четвертой главе это представление применяется к решению конкретных краевых задач, возникающих в астрофизике. Таким образом, диссертация, состоящая из тесно связанных четырех глав, обладает внутренним единством и представляет собой цельное и законченное исследование.

Весьма актуальными для математической физики являются также результаты второй главы, посвященной развитию теории функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$. Это одна из четырех введенных в 1893 г. итальянским математиком Джузеппе Лауричеллой гипергеометрических функций N комплексных переменных. Но именно функция $F_D^{(N)}$ наиболее часто возникает в приложениях. В диссертации получен целый ряд важных результатов по теории этой функции. Найдены уже отмеченные выше формулы типа Якоби, являющиеся дифференциальными соотношениями для $F_D^{(N)}$; они представляют собой обобщение классического тождества Якоби для гипергеометрической функции Гаусса одного переменного. Далее, построен полный набор формул аналитического продолжения этой функции при произвольном числе N ее переменных во все N -мерное комплексное пространство. Такие формулы дают выражение для функции Лауричеллы вне единичного поликруга, где она первоначально определена как N -кратный ряд, в виде других N -кратных гипергеометрических рядов. Проблема аналитического продолжения этой функции является весьма актуальной. Она рассматривалась в течение всего XX-го века в работах многих авторов, в том числе А. Эрдейи, Х. Экстона и О.М. Ольссона. Однако в литературе известны лишь результаты для $N=2$ и $N=3$. Кроме того, в диссертации построен полный набор решений для системы уравнений с частными производными, которой удовлетворяет функция Лауричеллы. Замечательно, что этот набор конечен; он представляет собой N -мерный аналог канонических решений Куммера, известных в теории гипергеометрической функции Гаусса одной переменной. Необходимо еще отметить важные для приложений результаты по аналитическому продолжению функции Аппеля (частный случай $F_D^{(N)}$ при $N=2$) для так называемого логарифмического случая.

Как было отмечено выше, в главе III выведено представление решения задачи Римана – Гильберта с кусочно-постоянными данными в виде интеграла Кристоффеля – Шварца. Такой интеграл представляет собой первообразную от произведения биномов и некоторого полинома с вещественными коэффициентами. С помощью полученной формулы типа Якоби для функции Лауричеллы все входящие в подынтегральное выражение величины выписаны явно через данные задачи Римана – Гильберта. Коэффициенты полинома выписаны аналитически через функцию $F_D^{(N)}$. Следует отметить, что ее переменными являются специальные комбинации координат точек разрыва данных задачи. Для вычисления коэффициентов указанного выше полинома в интеграле Кристоффеля – Шварца используются построенные во второй главе

формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы. Отметим, что актуальность построения представления в виде интеграла Кристоффеля – Шварца для задачи Римана – Гильберта, включая вычисление коэффициентов полинома, подчеркивалась и предпринималась многими исследователями, начиная с Е. Треффца (1922 г.).

Четвертая глава посвящена применению результатов, полученных в первых трех главах, к трем конкретным задачам современной астрофизики. Первые две являются задачами Римана – Гильберта во внешности сложной системы разрезов на комплексной плоскости, моделирующих так называемую токовую конфигурацию, состоящую из токового слоя типа Сыроватского и четырех присоединенных к ним ударных волн. Первая задача соответствует фазе накопления энергии, а вторая – фазе распада токового слоя, происходящей во время Солнечной вспышки. Третье из обсуждаемых приложений – это задача со свободной границей, моделирующая магнитосферу нейтронной звезды под действием ударной волны от взрыва сверхновой звезды. Подчеркнем, что все эти задачи рассматриваются в областях сложной конфигурации, и для их решения необходимо строить соответствующее конформное отображение. При его построении возникает целый ряд трудных вспомогательных проблем, в том числе проблема аналитического обращения интеграла Кристоффеля – Шварца и проблема вычисления его параметров. Для их преодоления диссертант использует ряд сложных приемов, значительную часть из которых разработал он сам. В результате решения указанных задач построена картина магнитного поля в окрестности указанных токовых конфигураций (для первых двух задач) и в магнитосфере нейтронной звезды (для третьей задачи).

Текст диссертации завершается четырьмя приложениями, в которых помещены доказательства ряда вспомогательных утверждений, а также списком литературы, состоящим из 249 ссылок.

Оценивая диссертацию в целом, необходимо отметить следующее.

Рассматриваемые в диссертации вопросы весьма *актуальны*. В том числе, рассмотрены вопросы теории задачи Римана – Гильберта, теории гипергеометрической функции Лауричеллы и ряд современных проблем астрофизики. Тема диссертации полностью соответствует научной специальности 01.01.03 – математическая физика.

Цели диссертации – разрешимость и представление решения сингулярной задачи Римана – Гильберта, включая принципиально новое представление в виде интеграла Кристоффеля – Шварца для кусочно-постоянных данных, построение аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ и вывод для нее дифференциальных соотношений типа Якоби, а также решение с помощью этих результатов актуальных задач астрофизики (расчет магнитного поля в области пересоединения и в магнитосфере нейтронной звезды под воздействием взрыва сверхновой) – полностью достигнуты.

Все имеющиеся в диссертации научные результаты получены диссертантом самостоятельно и обладают научной новизной. Диссертация

соответствует требованиям Положения о порядке присуждения ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства РФ № 842 от 24 сентября 2013 г. (пункт 9 Положения), предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а именно является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как новое большое научное достижение в математической физике.

Все научные положения диссертации строго доказаны, что подтверждает их обоснованность и достоверность.

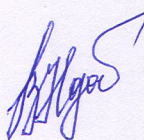
Результаты диссертации опубликованы Сергеем Игоревичем Безродных в 18 статьях, 15 из которых – в изданиях, рекомендованных ВАК и индексируемых базами Scopus и WoS. Выносимые на защиту научные положения полностью отражены в этих публикациях. Они апробированы автором в выступлениях на 7 семинарах и 33 научных всероссийских и международных конференциях.

Аннотация полностью и правильно отражает содержание диссертации.

Научные выводы и результаты могут быть использованы в Институте проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН, Математическом институте им. В.А.Стеклова РАН, Южном федеральном научном центре, Казанском (Приволжском) федеральном университете, Белгородском национальном исследовательском университете, а также в других университетах и научных центрах, где ведутся исследования по краевым задачам математической физики с применением специальных функций.

Считаю, что диссертационная работа С.И.Безродных «Сингулярная задача Римана – Гильберта, гипергеометрическая функция Лауричеллы и приложения к астрофизике», представленная на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, удовлетворяет всем квалификационным требованиям ВАК, предъявляемым к докторским диссертациям по специальности 01.01.03 – математическая физика, а ее автор – Безродных Сергей Игоревич вполне заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по этой специальности.

Член-корреспондент Российской академии наук,
ведущий научный сотрудник Института проблем
механики им. А.Ю.Ишлинского РАН, доктор
физико-математических наук по специальности
01.01.03 – математическая физика

 23.08.2017

Назайкинский Владимир Евгеньевич
119526, Москва, просп. Вернадского, д. 101, корп. 1,
тел.: 8-495-433-75-44, e-mail: vladimir.nazaykinskiy@ipmnet.ru

Подпись Назайкинскогo В.Е. заверяю
Ученый секретарь ИПМех РАН, к.ф.-м.н.



 Сысоева Елена Ярославовна