

*Отзыв официального оппонента на диссертацию Безродных С. И.
Сингулярная задача Римана – Гильберта, гипергеометрическая функция
Лауричеллы и приложения к астрофизике,
представленную на соискание ученой степени доктора физико –
математических наук по специальности
01.01.03 – "Математическая физика"*

Актуальность темы диссертации

Диссертационная работа С. И. Безродных посвящена исследованию задачи Римана – Гильберта с кусочно гельдеровыми коэффициентами в весовых классах Гельдера (так называемой сингулярной задаче) и ее приложению к некоторым проблемам астрофизики. Хотя идея привлечения интегралов типа Коши принадлежит Т. Карлеману, она получила быстрое развитие в трудах советских математиков Ф.Д. Гахова, Н.И. Мусхелишвили, И.Н. Векуа и др., что позволило завершить в основных чертах теорию ее разрешимости. Однако многие особенности, связанные с этой задачей и ее различными приложениями, все еще остаются в центре внимания многих исследователей. В частности, рассмотрение этой задачи в сложных областях с кусочно гладкой границей требует привлечения конформного отображения этой области на круг или полуплоскость, построение которого само представляет собой самостоятельную трудную задачу.

В диссертационной работе предложен новый подход к задаче Римана – Гильберта в областях этого типа, основанный на представлении ее решений интегралами типа Кристоффеля – Шварца, использующими функции Лауричеллы. Эти функции обобщают классические гипергеометрические функции Гаусса на случай нескольких комплексных переменных. Теория этих функций, начатая в классических трудах П. Аппеля и Дж. Лауричеллы, получила дальнейшее развитие в работах многих математиков и далека от своего завершения. Для построения указанного представления, которое оказалось весьма удобным для анализа и вычислений, диссертанту пришлось существенно раздвинуть рамки теории функций Лауричеллы. На этом пути С. И. Безродных удалось эффективно решить ряд актуальных задач астрофизики, возникающих при моделировании магнитного поля в Солнечной короне. Хотя эти задачи изучались многими авторами, законченного аналитического их решения ранее получено не было.

Научная новизна диссертационного исследования

Все результаты диссертационной работы являются новыми и наиболее значимыми из них являются следующие.

1. С помощью модифицированного интеграла типа Коши

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\delta} \right) \varphi(t) dt, \quad \text{Im } z \neq 0, \quad (1)$$

где точка $\delta \in \mathbb{R}$ лежит вне дискретного множества E особых точек, включающего и бесконечно удаленную точку, описана общая картина разрешимости сингулярной задачи Римана – Гильберта в верхней полуплоскости в специальной постановке.

2. Для функций Лауричеллы $F(a; b, c; z)$ переменной $z = (z_1, \dots, z_N)$, зависящей от комплексного векторного параметра $a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{C}^N$ и скалярных параметров $b, c \in \mathbb{C}$ и определяемой обобщенным гипергеометрическим рядом

$$F(a; b, c; z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{k_1} \dots (a_N)_{k_N} b_{|k|}}{c_{|k|} k_1! \dots k_N!} z_1^{k_1} \dots z_N^{k_N}, \quad |z_j| < 1, \quad (2)$$

построена полная картина ее аналитических продолжений в семейство областей, которые в совокупности покрывают $\mathbb{C}^N$.

3. Для этих функций открыт аналог дифференциальных соотношений Якоби, известных для классических гипергеометрических функций, с помощью которых построено новое представление решения задачи Римана – Гильберта в полуплоскости с кусочно постоянными коэффициентами в виде интегралов типа Кристоффеля – Шварца.

4. Полученные результаты применены к эффективному решению проблемы моделирования эффекта магнитного пересоединения в плазме Солнечной короны, включая ее численную реализацию.

Остановимся на п. 3 более подробно. Решение рассматриваемой задачи Римана – Гильберта представимо в виде модифицированного интеграла типа Коши, что было описано в первой главе диссертации. Несомненной заслугой диссертанта является то, что с помощью одного открытого им специального случая дифференциального соотношения Якоби для функций Лауричеллы; этот интеграл удается преобразовать к виду интеграла типа Кристоффеля – Шварца. Кусочно постоянные данные задачи Римана – Гильберта позволяют ее решение рассматривать как конформное отображение верхней полуплоскости на, вообще говоря многолистный, многоугольник, прообразы вершин которого на вещественной прямой неизвестны. Эти прообразы и фигурируют в интеграле Кристоффеля – Шварца, реализующем данное конформное отображение. Подобный геометрический подход был намечен еще Б. Риманом в его знаменитой докторской диссертации. Особенно трудная проблема для численного решения задачи возникает, когда эти прообразы вершин приближаются друг к другу (так называемая проблема кроудинга). В этой связи полученное диссертантом интегральное

представление оказывается очень удобным с вычислительной точки зрения для решения этой проблемы.

Отметим несколько замечаний к диссертационной работе С.И. Безродных.

1. Можно показать, что введенный автором класс $H_0(E)$ кусочно гильдеровых функций (с простыми разрывами в точках $\tau \in E$) остается инвариантным при дробно-линейном отображении прямой на окружность. При этом преобразовании ядро модифицированного интеграла типа Коши (1) сохраняет свой вид. Данное обстоятельство открывает возможность описать картину разрешимости сингулярной задачи Римана – Гильберта в более широкой постановке для всей шкалы весовых пространств Гельдера, что на наш взгляд, позволило бы автору упростить изложение первой главы о разрешимости этой задачи.

2. Автором принята несколько тяжеловесная система обозначений (2) функции Лауричеллы. Если использовать обычные обозначения

$$k! = k_1! \dots k_N!, \quad a_k = (a_1)_{k_1} \dots (a_N)_{k_N}, \quad z^k = z_1^{k_1} \dots z_N^{k_N},$$

связанные с мультииндексом $k = (k_1, \dots, k_N)$, то ее можно записать в более простой форме

$$F(a; b, c; z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{a_k b_{|k|}}{c_{|k|} k!} z^k,$$

что также позволило бы несколько упростить изложение диссертации.

Конечно, эти замечания никоим образом не снижают общей ценности диссертационной работы.

Теоретическая и практическая важность

Предложенный диссертантом подход к исследованию задачи Римана – Гильберта в сложных областях позволяет давать эффективное аналитическое и численное ее решение, что открывает новые возможности для приложений этой задачи. Кроме того, полученные С.И. Безродных новые результаты в теории функций Лауричеллы расширяют возможности ее применения в математической физике.

Общая оценка диссертационной работы

Диссертационная работа выполнена на актуальную тему на высоком научном уровне и носит очень цельный характер. В ней предложен новый подход к исследованию сингулярной задачи Римана – Гильберта с кусочно постоянными коэффициентами, основанный на привлечении функций Лауричеллы. Подобное привлечение оказалось возможным только после получения существенно новых результатов, расширяющих рамки теории этих

Эти результаты представляют собой серьезное достижение в теории сингулярной задачи Римана – Гильберта и создают очевидные перспективы дальнейшего развития этой теории. Все эти результаты диссертации являются новыми и снабжены подробными доказательствами, опубликованы в центральных российских и международных журналах, 15 из которых входят в список, рекомендованный ВАК, и апробированы на российских и международных конференциях. Автореферат диссертации верно отражает ее содержание.

Заведующий кафедрой
дифференциальных уравнений
НИУ БелГУ,
доктор физико-математических наук
по специальности 01.01.02,
профессор

Ag!

Личную подпись удостоверяю
Документовед
управления
по развитию
персонала и
кадровой работы

С.А. Напсено

20 12 г.