

**Отзыв официального оппонента
на диссертацию С. И. Безродных “Сингулярная
задача Римана–Гильберта, гипергеометрическая
функция Лауричеллы и приложения к астрофизике”,
представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.03–математическая физика**

Общая характеристика содержания диссертации. Задача Римана–Гильберта о восстановлении аналитической в области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ функции $f = u + iv$ по заданному на границе ∂D соотношению вида

$$au - bv = c \quad (1)$$

между ее вещественной u и мнимой v частями (здесь a, b и c – вещественные функции, данные задачи) является классической задачей как комплексного анализа, так и математической физики. В таком или близком к нему виде краевая задача Римана–Гильберта естественным образом возникает в различных задачах, в частности – в теории конструктивных рациональных аппроксимаций аналитических функций и при изучении асимптотических свойств ортогональных многочленов. Хорошо известны классические монографии и статьи, посвященные исследованию разрешимости задачи вида (1) и построению ее решения в том или ином “явном” виде. Вместе с тем также хорошо известно, что понятие “явного” вида решения в существенной степени зависит от той конкретной цели, с которой такое решение строится. Как правило, в каждом конкретном случае общая теория оказывается не вполне завершенной и требует дальнейшей детализации и уточнения. Именно такая ситуация и лежит в основе рассматриваемой диссертации. В этом отношении в диссертации С. И. Безродных вполне органично соединены в одно целое, с одной стороны, специальная задача Римана–Гильберта, поставленная в верхней полуплоскости с граничными данными – кусочно-гельдеровыми функциями и с ограничениями типа степенного роста на асимптотику решения в окрестности точек разрыва данных и, с другой стороны, – актуальные прикладные задачи математической физики, которые автору искусно удается свести к краевой задаче Римана–Гильберта рассматриваемого им специального класса. Связующим звеном между этими двумя задачами является функция Лауричеллы, вполне законченную теорию которой автору удалось построить в диссертации. В том числе, ему удалось найти формулы конструктивного аналитического продолжения этой функции за пределы единичного поликруга, в котором эта функция исходно была определена, распространить на эту функцию нескольких комплексных переменных многие свойства классической гипергеометрической функции и функции Аппеля, и открыть ее свойства, не имеющие аналогов в одномерном случае.

На основе классических методов исследования задачи Римана–Гильберта в классе односвязных областей со сложной границей и кусочно-постоянными данными автор нашел новое представление решения задачи Римана–Гильберта в виде композиции двух обобщенных интегралов Кристоффеля–Шварца с неизвестными акцессорными параметрами. Построенная практически полная теория функции Лауричеллы позволила ему записать этот ответ в терминах, непосредственно связанных с функцией Лауричеллы. При этом, трансцендентные уравнения на акцессорные параметры ему также удалось представить в форме, содержащей значения функции Лауричеллы в точках, выходящих за пределы поликруга сходимости исходного обобщенного гипергеометрического ряда. При последующем численном решении актуальных прикладных задач математической физики именно высокоточное вычисление значений функции Лауричеллы с помощью формул ее аналитического продолжения позволило автору успешно преодолеть хорошо известную проблему кроудинга.

Таким образом, диссертация посвящена актуальному направлению математической физики: построению решения краевой задачи Римана–Гильберта для некоторого конкретного класса граничных данных в такой явной аналитической форме и в таких терминах, которые оказываются заранее адаптированными для численной реализации при решении целого ряда актуальных прикладных задач математической физики, в том числе – предусматривающей возможное возникновение явления кроудинга.

Вклад автора диссертации в развитие теории краевых задач Римана–Гильберта. Опишем вклад автора в теорию краевых задач Римана–Гильберта, содержащийся в диссертации.

В диссертации рассматривается задача Римана–Гильберта для верхней полуплоскости с разрывными кусочно-гельдеровыми граничными данными и с ограничениями степенного роста на поведение искомого решения в окрестности точек разрыва граничных данных. Такой специальный вариант задачи Римана–Гильберта, который автор называет *сингулярным*, не был прежде достаточно хорошо изучен. Вместе с тем именно он оказался востребованным в связи с определенными актуальными задачами математической физики, возникающими в приложениях.

В диссертационной работе дано развитие теории функции Лауричеллы $F^{(N)}(a_1, \dots, a_N; b, c; z_1, \dots, z_N)$, представляющей собой обобщенную гипергеометрическую функцию от N комплексных переменных $(z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ и содержащей комплексные параметры $(a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{C}^N$, b и c . Определением для этой функции Лауричеллы служит N -кратный обобщенный гипергеометрический ряд, сходящийся в единичном поликруге. Важной задачей, решаемой в диссертации, является проблема аналитического продолжения функции Лауричеллы за пределы поликруга сходимости исходного гипергеометрического ряда. Решение состоит в том, что, во-первых, найдена система дифференциальных уравнений в частных производных, которому подчиняется

функция Лауричеллы, и, во-вторых, показано, что аналитическое продолжение этой функции вне поликрруга можно задать в виде линейной комбинации некоторых других частных решений найденной системы уравнений в частных производных. Эти решения построены в диссертации также в виде обобщенных гипергеометрических рядов, отличных от функции Лауричеллы и сходящихся на множествах, имеющих непустое пересечение с дополнением к единичному поликругу. Такие представления естественно называть формулами аналитического продолжения функции Лауричеллы. Именно они позволяют вычислить значение функции Лауричеллы в любой точке пространства $\mathbb{C}^N$. Кроме того, для этой функции найдены дифференциальные соотношения типа Якоби.

Эти результаты позволяют автору успешно решать задачу Римана–Гильберта с кусочно-постоянными граничными данными в области со сложной границей, а именно – в произвольной односвязной области, ограниченной конечнозвенным многоугольником, все звенья которого – прямолинейные отрезки. С помощью полученной автором обобщенной формулы Кристоффеля–Шварца искомое решение, редуцированное к верхней полуплоскости, записано в явном аналитическом виде, а трансцендентные уравнения на акцессорные параметры конформного отображения исходной области на верхнюю полуплоскость преобразуются с помощью развитой автором теории функции Лауричеллы к такому виду, из которого они могут быть найдены численно с помощью метода Ньютона и на основе высокоточного вычисления значений функции Лауричеллы. В частности, полученные автором на этом пути замкнутые аналитические представления решения краевой задачи Римана–Гильберта позволяют ему успешно преодолеть хорошо известную проблему кроудинга. Таким образом, в диссертации С. И. Безродных, в частности, органично соединены теория и практика конформных отображений для односвязных областей со сложной границей.

Методы исследования. В диссертации применяются следующие методы исследования. Для достижения целей диссертации использовались классические и современные методы математической физики, в первую очередь, методы Ф. Д. Гахова и Н. И. Мусхелишвили теории краевых задач. Кроме того, использовались методы теории конформных отображений односвязных областей на канонические области, теория аналитических и специальных функций математической физики, включая теорию интегралов типа Коши, интегралов Барнса, интеграла Кристоффеля–Шварца, интегральные представления Эйлера для гипергеометрических функций и теория конформного отображения сингулярно деформируемых областей. Для решения нелинейных систем трансцендентных уравнений использовался метод Ньютона.

Основные результаты. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

(1) на основе классических подходов исследована разрешимость сингулярной задачи Римана–Гильберта в полуплоскости с кусочно-гельдеровыми данными и условиями степенного роста искомой функции в окрестности точек разрыва данных; получены новые представления для решения задачи через интегралы типа Коши;

(2) для функции Лауричеллы с произвольным числом N комплексных переменных построена система формул ее аналитического продолжения за границу единичного поликруга и найден полный набор решений системы уравнений в частных производных, которой удовлетворяет эта функция (ранее были известны лишь некоторые результаты для $N = 2$ и $N = 3$); получена система дифференциальных тождеств типа Якоби для функции Лауричеллы с произвольным числом переменных;

(3) с помощью результатов п. 2) получено принципиально новое представление в виде обобщенного интеграла Кристоффеля–Шварца для решения сингулярной задачи Римана–Гильберта в полуплоскости с кусочно-постоянными данными; такое представление дает геометрическую интерпретацию решения задачи как конформного отображения полуплоскости на многоугольник (не обязательно однолистный) и доставляет удобный аппарат для его численной реализации;

(4) дано приложение полученных результатов к математическому моделированию некоторых физических явлений, связанных с короной Солнца; решены две сингулярные задачи Римана–Гильберта с кусочно-постоянными данными в многоугольных областях, моделирующие магнитное поле в короне Солнца; построено аналитическое решение задачи со свободной границей, возникающей при моделировании физических процессов, связанных с нейтронной звездой; осуществлена численная реализация решения.

Актуальность темы диссертации. Диссертация посвящена исследованию разрешимости в явном аналитическом виде краевой задачи Римана–Гильберта для конкретного класса односвязных областей, ограниченных многоугольниками, все звенья которых – прямолинейные отрезки, и с кусочно-постоянными данными при ограничениях степенного вида на рост искомого решения в окрестности точек разрыва. Решение поставленной задачи ищется в явном виде, пригодном для дальнейшего использования в прикладных задачах математической физики. Таким образом, тема диссертации является вполне актуальной.

Характеристика научного уровня диссертации. Одним из важнейших результатов, полученных в диссертации С. И. Безродных, является система дифференциальных тождеств типа Якоби, которым подчиняется функция Лауричеллы и которые ранее не были известны. Именно эти тождества сыграли ключевую роль при строгом выводе в диссертации принципиально нового представления решения задачи Римана–Гильберта в виде обобщенного интеграла Кристоффеля–Шварца. Подобное представление решения задачи Римана–Гильберта было известно ранее в некоторых частных случаях. Однако для общего случая произвольных кусочно-постоянных данных задачи подобной формулы получено не было. Именно с помощью найденного в замкнутой аналитической форме представления решения задачи Римана–Гильберта и последующим применением развитой в диссертации вполне законченной теории функции Лауричеллы, в диссертации решены две конкретные задачи Римана–Гильберта

в областях со сложной границей, естественным образом возникающие при математическом моделировании некоторых физических явлений, протекающих в короне Солнца. В диссертации также дано решение задачи со свободной границей, возникающей при моделировании физических процессов, связанных с нейтронной звездой. Решение этой задачи также дано автором в замкнутом аналитическом виде. Подобные задачи и ранее рассматривались другими авторами, однако решений в аналитической форме получено не было.

Таким образом, можно констатировать, что в диссертации С. И. Безродных фактически создано новое научное направление. А именно, получено глубокое развитие теории функции Лауричеллы, включающей конструктивный метод ее аналитического продолжения за пределы единичного поликруга, в котором она исходно была определена как сходящийся обобщенный гипергеометрический ряд. Для решения задачи Римана–Гильберта в области со сложной границей с кусочно-постоянными данными и с ограничениями степенного роста на поведение искомого решения в окрестности точек разрыва данных получена явная формула в виде обобщенного интеграла Кристоффеля–Шварца, все параметры которого могут выражены в терминах, связанных с функцией Лауричеллы. Эта явная формула в совокупности с развитой теорией функции Лауричеллы позволяет успешно преодолеть возникновение явления кроудинга при условии высокоточного вычисления значений этой функции.

Этот свой подход к решению задачи Римана–Гильберта (обобщенная формула Кристоффеля–Шварца в совокупности с теорией функции Лауричеллы) С. И. Безродных успешно применяет в заключительной части диссертации к решению в аналитической форме ряда прикладных задач, актуальных для математической физики.

Полученные в диссертации результаты являются новыми, вполне достоверными, принадлежат автору диссертации, снабжены строгими математическими доказательствами и заслуживают высокой оценки. Результаты численных экспериментов иллюстрируют и подтверждают многие из доказанных утверждений. Основные результаты диссертации опубликованы автором в 18 статьях, из которых 15 статей опубликованы в рецензируемых математических журналах, входящих в “Перечень ВАК”.

Диссертация соответствует критериям пункта 9 Положения о порядке присуждения ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства РФ № 842 от 24 сентября 2013 г., предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а именно является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как новое крупное научное достижение в математической физике.

Содержание автореферата соответствует основным идеям и выводам диссертации.

Замечания. Диссертация выполнена на вполне высоком научном уровне, написана ясным и правильным русским языком и легко читается.

Вместе с тем к содержанию и оформлению диссертации есть следующие замечания.

1) В одномерном случае расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ определяется не просто как результат формального добавления какой-то абстрактной точки $z = \infty$. Это происходит в результате процедуры компактификации комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с помощью единичной сферы и стереографической проекции. Недаром эту расширенную комплексную плоскость называют еще “сферой Римана”. В отличие от одномерного случая компактификация пространства $\mathbb{C}^N$ может быть выполнена не единственным способом. В этом плане введенное в диссертации определение/обозначение $\overline{\mathbb{C}}^N = \mathbb{C}^N \cup \{\infty, \infty, \dots, \infty\}$ является некорректным и бессодержательным. К счастью, это никак не влияет на достоверность полученных в диссертации результатов, поскольку фактически автор использует только следующую вполне законную процедуру. При доказательстве какого-либо утверждения или при выводе нужной формулы ему бывает необходимо по одной координате z_j перейти к пределу $z_j \rightarrow \infty$, сохраняя все оставшиеся координаты фиксированными.

2) На стр. 214, § 3, глава IV, утверждается, что “можно показать, что при достаточно мелком разбиении отрезка...”. Видимо, здесь речь идет о типичной тереме существования, в рамках которой нет возможности дать эффективную оценку на шаг разбиения η . В таком случае, поскольку здесь речь фактически идет о сращивании двух известных асимптотик в точке $\rho = 0$ и в точке $\rho = \infty$ на всю вещественную положительную полупрямую, $\rho \in [0, +\infty)$, столь же надежный результат можно было бы получить с помощью двухточечных аппроксимаций Паде.

3) В диссертации регулярно используются многозначные функции комплексного переменного вида $\log \zeta$, $\log(\zeta \pm 1)$, обратная функция Жуковского $\zeta + \sqrt{\zeta^2 + 1}$, ζ^{α_0} , где $\alpha_0 \in (0, 1)$ и т.д. Но я не нашел в тексте ни одного пояснения, какая именно ветвь такой функции рассматривается. Разумеется, это всегда ясно из контекста, но пояснить было необходимо.

4) По тексту всей диссертации и автореферата регулярно встречается следующая опечатка при использовании нижнего индекса “0”: вместо этого появляется “o” строчное.

5) В левой части рисунка 42 главы IV, стр. 189, направление линий магнитного поля изображено неверно, его необходимо изменить на противоположное.

6) В параграфе 2 главы IV магнитное поле B введено как функция одного комплексного переменного. Однако ниже оно появляется как функция двух переменных, $B(x, y)$, формула (2.3). Еще ниже используется обозначение $B_0(x, y)$. Кроме того, видимо правильно было бы говорить не о задании магнитного поля, а о задании его напряженности $B(z)$.

7) На рисунке 4.5(а) главы IV отсутствуют указания на область G и кривые Γ и γ , о которых идет речь в тексте диссертации.

8) Соотношения вида (2.26) главы IV неудачны. Их следовало бы привести к виду соотношения (2.32) этой же главы IV.

9) В формулах (1.7) и (1.8) на стр. 189–190 видимо подразумевается, что параметр $b > 1$, поскольку автор различает случаи, когда $\varepsilon \in (0, 1)$ и когда $\varepsilon = b$,

10) Термин “параллельные токовые ленты”, введенный на стр. 191, представляется неудачным, поскольку этим лентам соответствуют два отрезка на вещественной прямой.

11) На стр. 198 главы IV смело говорится о том, что “решение задачи в такой области не допускает явного решения”. Следовало бы найти более аккуратную форму для высказывания.

12) В диссертации имеются опечатки в формулах и русских словах. Есть два предложения без сказуемого (глава IV, стр. 211, § 3, последний абзац, и Приложение В, стр. 255, 3-е предложение снизу) и одно предложение без подлежащего (глава II, предложение после формулы (5.105)).

13) Говоря об изображении ударных волн, автор видимо имеет в виду фронт ударной волны.

14) В автореферате и в диссертации (глава IV, стр. 209, формула (3.2)) используется нестандартный термин “предынтегральный” множитель.

15) В автореферате и по всей диссертации используется термин “сложная область”. Область-то всегда односвязная, тем самым – очень простая. А вот граница области – достаточно сложная.

16) Акцессорные параметры иногда называются правильно, а иногда – “акцессорные постоянные”. Уравнения в частных производных иногда называются уравнениями “с частными производными”.

17) Стр. 46 и 47. В теореме 1.1 и предложении 1.1 в пункте 1) следовало бы указать, что здесь интеграл (4.6) понимается при $\zeta \in \mathbb{R}$.

18) В главе II и во всей диссертации наряду со стандартной (формулы (4.15), (4.25)) используется нестандартная (формула (4.13)) форма для записи вычета функции в полюсе.

19) Нумерация теорем, утверждений, формул и пр. в диссертации не сквозная, а своя для каждой главы. Во введении автор обещает при ссылках на формулы и пр. из другой главы указывать номер этой другой главы. Но свое обещание он выполняет не всегда. Это затрудняет чтение текста.

20) Во введении к диссертации при определении символа $\mathcal{O}^*$ необходимо указать, что соответствующая постоянная C конечна, $C \neq \infty$.

21) В автореферате (формула (15)) неудачно написано про то, что “одновременно выполняются равенства: $n_{k_m} = 0$, $\alpha_{k_m} = 0$ и $\rho_{k_m} \neq 0$ ”.

Все вышеуказанные недостатки не влияют на высокий научный уровень диссертации.

Вывод. Совокупность полученных в диссертации результатов и развитие в ней методы вполне могут быть квалифицированы как новое перспективное направление в математической физике. Основные положения и выводы диссертации носят теоретический характер и строго доказаны. Они могут быть использованы как в приложениях, так и в научных исследованиях, проводимых в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, Институте прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Институте вычислительной математики РАН.

Некоторые разделы диссертации вполне могут быть включены в специальные курсы, читаемые на математических факультетах университетов.

Таким образом, считаю, что диссертационная работа «Сингулярная задача Римана–Гильберта, гипергеометрическая функция Лауричеллы и приложения к астрофизике» удовлетворяет всем требованиям ВАК РФ, предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор, Безродных Сергей Игоревич, несомненно заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03–математическая физика.

Ведущий научный сотрудник
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
доктор физ.-матем. наук
по специальности
01.01.01 – математический анализ

 С. П. Суетин

119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8.
тел. +7 (495) 984 81 45
e-mail: suetin@mi.ras.ru

“Подпись С. П. Суетина заверяю”
Ученый секретарь

“30” августа 2017 года

Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, к.ф.-м.н.



 П. А. Яськов