

на правах рукописи



Заметаев Владимир Борисович

**Около критические решения в теории отрыва и взаимодействия
пограничного слоя с внешним потоком**

Специальность: 01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2018

Работа выполнена в Центральном аэрогидродинамическом институте им. проф. Н.Е. Жуковского (ФГУП «ЦАГИ»).

Официальные оппоненты: **Жук Владимир Иосифович,**

доктор физико-математических наук, профессор,
ФГУ Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление» Российской
академии наук, главный научный сотрудник;

Исаев Сергей Александрович,

доктор физико-математических наук, профессор,
Санкт-Петербургский государственный
университет гражданской авиации, профессор;

Дианский Николай Ардальянович,

доктор физико-математических наук, доцент,
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный университет имени
М.В.Ломоносова», главный научный сотрудник.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Институт теоретической и прикладной механики им.
С.А. Христиановича Сибирского отделения Российской академии наук

Защита диссертации состоится 7 июня 2018 г. в 15 часов на заседании
Диссертационного совета Д 002.073.03 при ФИЦ ИУ РАН по адресу: 119333,
Москва, ул. Вавилова д. 40, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ВЦ ФИЦ ИУ РАН по
адресу: 119333, Москва, ул. Вавилова д. 42 и на сайте

http://www.frccsc.ru/diss-council/00207303/diss/list/zametaev_vb

Автореферат разослан «___» _____ 2018 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета Д 002.073.03,
доктор физико-математических наук



С. И. Безродных

Общая характеристика работы

Степень разработанности темы. Потоки жидкости и газа, текущие под влиянием заданного градиента давления были предметом интенсивных исследований учеными в течение нескольких десятилетий. Значительные успехи в возможности вычислить невязкие течения около тел при бесконечном числе Рейнольдса, стимулировали попытки использовать иерархическую процедуру построения асимптотического решения уравнений Навье-Стокса, предложенную Прандтлем (1935), путем решения пограничного слоя на поверхности тела в сочетании с проблемой невязкого обтекания. Однако эта элегантная техника не всегда успешна, так как в решении уравнений пограничного слоя при неблагоприятном градиенте давления может развиться непреодолимая особенность. Структура этой особенности изучалась Ландау и Лифшицем (1944) и подробно Гольдштейном (1948). Возникновение сингулярности в решении уравнений пограничного слоя и невозможность ее преодоления были позже подтверждены Стюартсоном (1970), который попытался устранить сингулярность, принимая во внимание вязко-невязкое взаимодействие. Эта попытка была безуспешной, поскольку фундаментальное уравнение, полученное Стюартсоном, не имело решения, обладающего требуемыми свойствами продолжения вниз по потоку.

В результате, наличие сингулярности Гольдштейна вызвало трудности в исследованиях вязких двухмерных течений в течение многих и многих лет. Кроме того, асимптотическая теория самоиндуцированного отрыва, созданная Нейландом (1969), и независимо Стюартсоном и Вильямсом (1969) для газа и Сычевым (1972) для несжимаемой жидкости обеспечили альтернативный подход к разработке теории отрыва двухмерного ламинарного пограничного слоя. Проблема же отрыва пограничного слоя с заданным неблагоприятным градиентом давления осталась открытой.

Prandtl L. The mechanics of viscous fluids // Aerodynamic theory / ed. W. F. Durand. 1935. V.3 P. 34-208. Berlin: Springer.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред // М.: Гостехиздат, 1944, 624с. *Goldstein S.* On laminar boundary-layer flow near a position of separation // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1948. V. 1. Pt 1. P. 43-69.

Stewartson K. Is the singularity at separation removable? // J. Fluid Mech. 1970. V. 44. Pt. 2. P. 347-364.

Нейланд В.Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. №4. С. 53-57.

В настоящее время исследования Рубана (1981, 1982а) и Стюартсона и др. (1982), считаются центральными в теории предельного отрыва (кромочного, на англ.: *marginal separation*). Рубан (1981) проанализировал двумерный пограничный слой вблизи точки нулевого напряжения трения и показал, что решение вблизи этой точки может быть представлено как координатное разложение по собственным функциям, первая из которых отвечает за сингулярность Гольдштейна. Рубан обнаружил, что для несжимаемого пограничного слоя на параболической передней кромке тонкого аэродинамического профиля напряжение трения исчезает до нуля в определенной точке при увеличении угла атаки, но без образования сингулярности Гольдштейна. В этом случае первая собственная функция отсутствует в решении уравнений пограничного слоя вблизи точки нулевого трения, и вместо особенности Гольдштейна образуется слабая особенность, в которой напряжение трения ведет себя как $\tau \sim |X - X_s|$. Интересно отметить, что решение уравнений пограничного слоя не единственное, при $X \rightarrow X_s +$; в дополнение к гладкому решению, найденному Гольдштейном (1948), которое проходит в область возвратных токов, существует также решение с разрывной первой производной, которое остается безотрывным вниз по потоку.

Локальный отрыв двумерного потока в окрестности точки нулевого напряжения трения в отсутствие особенности Гольдштейна, и называется в настоящее время кромочным (предельным или на англ. языке *marginal separation*) отрывом. Подробная теория такого отрыва была построена Рубаном (1982а) и Стюартсоном и др. (1982). В частности, было найдено, что толщина вытеснения пограничного слоя индуцирует возмущение давления во внешнем потенциальном потоке, которое, в свою очередь, влияет на поток в вязком подслое в окрестности точки отрыва. Длина такой области взаимодействия оказывается равной $\Delta X = O(Re^{-1/5})$, а уравнения пограничного слоя со взаимодействием сводятся к задаче для напряжения поверхностного трения $A(X)$

Stewartson, K., and Williams, P.G. Self-induced separation // *Proc. Roy. Soc. London Ser. A.*, 1969, Vol. 312, No. 1509, pp. 181-206.

Сычев В.В. О ламинарном отрыве // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1972. № 3. С. 47–59.

Рубан А.И. Особое решение уравнений пограничного слоя, непрерывно продолжимое через точку нулевого поверхностного трения // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1981. № 6. С. 42–52. *Stewartson K., Smith F. T., Kaups K.* Marginal separation // *Studies Appl. Math.* 1982. V. 67. No 1. P. 45-61.

$$A^2 - x^2 + \Gamma = \int_x^{+\infty} \frac{A'(t)dt}{\sqrt{t-x}}, \quad A = |x| - \frac{\Gamma}{2|x|} + \dots, \quad |x| \rightarrow \infty$$

Здесь Γ - приращение угла атаки. Решения вышеуказанной задачи были найдены численно для различных значений Γ . При возрастании Γ функция $A(x)$ трансформируется из безотрывного состояния ($A > 0$ всюду) в отрывное течение, которое содержит возвратные токи ($A < 0$) в локальном пузырьке. Существует критическое значение $\Gamma = \Gamma^*$, выше которого решение не существует. Рисунок 1 показывает зависимость значения $A(0)$ от параметра задачи Γ . Обнаружено, что решение не единственно в ограниченном интервале приращений угла атаки $0 < \Gamma < \Gamma^*$, а именно, возможны 4 решения с малым отрывным пузырьком.

Эти результаты трактуются как теория появления и разрушения коротких зон отрыва в пограничных слоях (явление хорошо известное экспериментаторам). Таким образом, был найден целый класс решений, которые описывают переход от присоединенного состояния потока к отрывному и допускают бифуркацию решений вблизи критического значения угла атаки (см. рис.2).

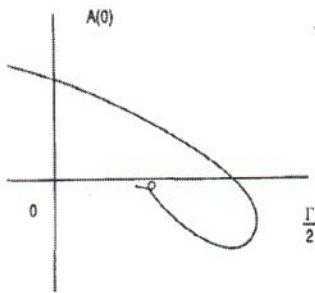


Рис.1

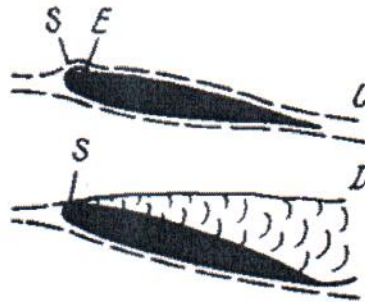


Рис.2

Поскольку существует несколько классов течений, в которых возникают различные законы взаимодействия, был выполнен целый ряд исследований с различными типами предельного двухмерного отрыва.

К примеру, особенности предельного отрыва в вязких пристенных струях изучались Заметаевым (1986, 1987a). Поскольку индуцированное давление в струе задается формулой $p = -A''(x)$, порядок производной в интегральном уравнении увеличивается. Расчеты для этого случая показали, что зависимость $A(0)$ от Γ имеет вид спирали с фокусом в точке $A(0) = \Gamma = 0$, как показано на Рис. 3. Были получены численно пять различных решений для одного из значений параметра, но в результате асимптотического анализа было установлено, что спираль скручивается бесконечно, приводя к бесконечному числу решений при $\Gamma = 0$.

Диссертация посвящена теоретическому исследованию механизмов перестройки и разрушения ламинарных трехмерных отрывных течений в пограничных слоях, вблизи точек бифуркации решения по параметру, при больших числах Рейнольдса.

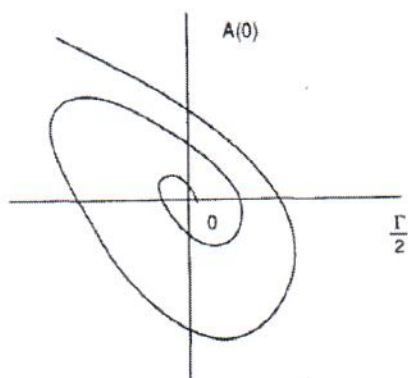


Рис. 3

Актуальность диссертационной работы обусловлена тем, что явление внезапной перестройки картины глобального обтекания тел и, как следствие, резкого изменения сил и моментов, действующих на конструкции, не редко встречается в современной аэродинамике летательных аппаратов. Критические двумерные режимы обтекания тел потоком вязкой жидкости или газа хорошо изучены, чего нельзя сказать о трехмерных пограничных слоях.

Цель Диссертации – создание методологии использования асимптотических методов для анализа около критических ламинарных отрывных течений в пограничных слоях при больших числах Рейнольдса.

Для достижения поставленной цели были решены **задачи**:

1. Построена асимптотическая теория около критического отрывного пространственного течения во взаимодействующем пограничном слое вблизи точки нулевого трения для различных тел.
2. Решена трехмерная задача о влиянии тонкой невязкой вихревой нити, размещенной вдоль потенциальной линии тока, на предотрывный (предельный) плоский пограничный слой.
3. Исследовано критическое отрывное обтекание вязкой несжимаемой жидкостью тонкого тела вращения с малыми искажениями поверхности.
4. Разработан численный метод решения сложных двумерных задач взаимодействия пограничного слоя с внешним потоком.

5. Решена тестовая задача обтекания вязким потоком со взаимодействием пластины с отклоненным щитком. Решение предельное и имеет точку бифуркации по параметру.
6. Изучен численно сложный процесс смешения вязких потоков несжимаемой жидкости, сходящих с задней кромки пластины с разными скоростями.
7. Исследован режим восприимчивости локально непараллельного пограничного слоя к звуковым волнам, базовое решение взято вблизи точки бифуркации по параметру.
8. Изучено взаимодействие потока газа со скачком уплотнения и его бифуркации при обтекании слабо-возмущенного тупого торца круглого цилиндра совершенным газом при больших числах Маха в приближении тонкого ударного слоя

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Структура пространственного пограничного слоя вблизи точки зарождения развитого отрывного течения при обтекании гладких тел.
2. Критическое влияние слабой и тонкой вихревой нити на предотрывный плоский пограничный слой.
3. Сложное отрывное пространственное обтекание тонкого осесимметричного тела, с периодически возмущенной поверхностью.
4. Численный метод решения задач со взаимодействием.
5. Решение классической задачи о смешении двух потоков с различными константами Бернулли вблизи задней кромки плоской пластины в рамках теории взаимодействия.
6. Восприимчивость к звуку локально непараллельного взаимодействующего пограничного слоя вблизи точки излома поверхности;
7. Неединственность формы ударной волны и течений газа в тонком ударном слое при обтекании почти плоского торца круглого цилиндра.

Соответствие Паспорту Специальности.

Работа полностью соответствует формуле специальности «...построение и исследование математических моделей для описания параметров потоков движущихся сред в широком диапазоне условий ...» в области исследований:

11. Пограничные слои, слои смешения, течения в следе.

12. Гидродинамическая устойчивость.

4. Течения сжимаемых сред и ударные волны.

18. Аналитические, асимптотические и численные методы исследования уравнений кинетических и континуальных моделей однородных и многофазных сред (конечно-разностные, спектральные, методы конечного объема, методы прямого моделирования и др.).

Личный вклад автора:

Автором диссертации проанализированы ламинарные предотрывные и отрывные течения вязкой несжимаемой жидкости в пограничных слоях на пространственных телах. Построены асимптотические модели течений при бесконечных числах Рейнольдса и стремлении геометрических параметров задач к предельным значениям. Изучены присоединенные состояния пограничных слоев и их разрушение. Выбраны аналитические и численные методы решения сформулированных задач. Разработаны численные алгоритмы, проведены расчеты и проанализированы результаты.

Новые результаты:

1. Впервые получено решение, описывающее течение вблизи точки зарождения отрыва при обтекании гладких трехмерных тел.
2. Впервые детально изучено влияние вихревой нити на предотрывный плоский пограничный слой.
3. Подробное исследование топологии предельных линий тока на поверхности тонкого тела во взаимодействующем пограничном слое.
4. Разработан новый эффективный численный метод решения задач с вязко-невязким взаимодействием.
5. Учет в решении классической задачи о смешении двух потоков вблизи задней кромки плоской пластины, как различных констант Бернулли, так и разных коэффициентов напряжения трения.
6. Обнаружение резонанса при возбуждении звуком собственных колебаний в локально непараллельном пограничном слое вблизи точки бифуркации решения по параметру.
7. Построение многопалубной структуры решения вблизи особой звуковой точки в рамках теории тонкого ударного слоя.

Методы, подходы и принципы:

Основным методом исследования вязких ламинарных предотрывных и отрывных течений является метод сращиваемых асимптотических разложений, примененный к анализу уравнений Навье-Стокса при больших числах Рейнольдса,

В численном анализе использован метод Ньютона и оригинальный подход вычисления матрицы Якоби для неявной системы уравнений.

Обоснованность и достоверность полученных результатов обусловлена применением хорошо зарекомендовавших себя асимптотических методов (метод сращиваемых асимптотических разложений) при больших числах Рейнольдса; удовлетворительным сравнением с известными результатами расчетов сложных трехмерных пограничных слоев и известными экспериментальными данными об особенностях разрушения присоединенных течений и глобальной перестройке всей картины обтекания тел.

Теоретическая и практическая значимость работы состоит в следующем:

- Полученные результаты и методы анализа могут использоваться при оценке корректности расчетов пограничных слоев промышленными пакетами программ.
- Работа показывает, что асимптотические методы изучения сложных течений вязкой жидкости и газа в предотрывном и отрывном состоянии эффективны в фундаментальных поисковых исследованиях.
- Значительное продвижение в объяснении физических механизмов перестройки пространственных решений вблизи бифуркационных режимов обтекания тел.
- В использовании полученных теоретических результатов при постановке и анализе экспериментов в аэродинамических трубах при отрывных режимах обтекания моделей.

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в 15 работах. В журналах, индексируемых в Web of Science и включенных в список ВАК, опубликовано 10 статей.

Апробация работы. Результаты работ доложены на следующих научных семинарах и конференциях:

1. Separated Flows and Jets. IUTAM Symposium Novosibirsk/USSR 1990.
2. Intern. Workshop on Advances in Analytical Methods in Aerodynamics, July 12-14, 1993, Miedzyzdroje, Poland.
3. EUROMECH 384 Colloquium on Steady and Unsteady Separated Flows, Manchester, UK, July 6-9, 1998.
4. 20th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics ICTAM2000, 27 Aug.-2 Sep., 2000, Chicago, USA.
5. New Developments and Applications in Rapid Fluid Flows, LMS Workshop, 14-18 July 2003, Durham, UK.
6. ICTAM04 - 21 International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, August 15-21, 2004, Warsaw, Poland.
7. ICIAM 07 - International Congress of Industrial and Applied Mathematics, 2007, Zurich, Switzerland.
8. EUROMECH Fluid Mechanics Conference 7, 14-18 September 2008, Manchester, UK.
9. Серия научных семинаров в University of Manchester, University College of London, TU Wien, 1998-2008.
10. ICMAR 2016 Perm, Russia.
11. Научно-техническая конференция по аэродинамике ЦАГИ, в пос. Володарского Моск. Обл., 20-21 апреля 2017.
12. Видеосеминар по аэромеханике ЦАГИ – ИТПМ СО РАН – СПбГПУ – НИИМ МГУ, 13.06.2017

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 5 глав, выводов и списка литературы. Содержание работы изложено на 224 страницах текста, включая 80 рисунков и графиков. Список литературы содержит 193 ссылки.

Содержание диссертации

Во введении дан подробный обзор работ, посвященных асимптотическому анализу ламинарных отрывных течений жидкости и газа, обоснована

актуальность темы диссертации, сформулирована ее цель и основные результаты, а также кратко изложено содержание глав.

Глава 1. Обтекание тонкого конуса под углом атаки

Пусть некоторое тонкое тело поставлено в однородный поток вязкой несжимаемой жидкости под углом атаки $\alpha = \varepsilon \alpha_0$. На форму тела наложим ограничение - оно должно иметь конический носок, причем пусть для простоты конус будет круговой. Будем считать все размеры отнесенными к длине тела L , скорости - к скорости набегающего потока V_∞ , а безразмерное давление введем по формуле $P = p_\infty + \rho V_\infty^2 p$. Число Рейнольдса $Re = V_\infty L / \nu$, ν - коэффициент кинематической вязкости. В отнесенных координатах тело изображено на рисунке 4.

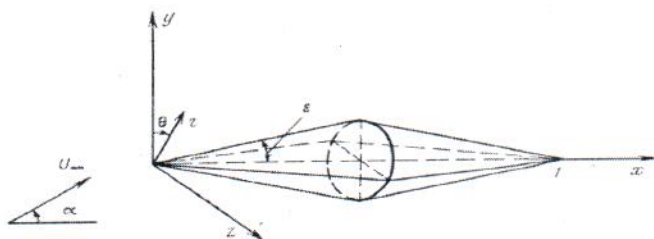


Рис.4

Хорошо известно, что около тонких тел существует два принципиально различающихся типа течений: безотрывное обтекание, при котором вязкие эффекты проявляются лишь в тонком пограничном слое, и отрывное, со сходом вихревой пелены (Рис.5), которое реализуется при относительно больших углах атаки тела относительно направления набегающего потока.

73. Конус под углом атаки. Круговой конус с диаметром 12 мм установлен в потоке воды под углом 16°. Число Рейнольдса, рассчитанное по длине, равно 15000. Как видно, течение можно считать коническим. Линии тока на поверхности, прослеженные с помощью покрашенной жидкости, оказываются вращающимися в тонком слое димандрного цвета над ламинарной поверхностью. Фото ONERA [Wieg, 1962]

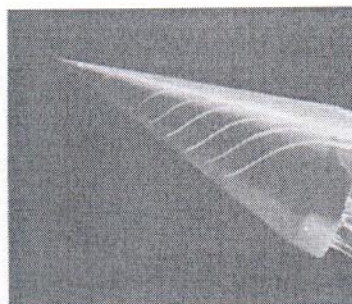


Рис.5

Решение уравнений Навье-Стокса будем строить методом сращиваемых асимптотических разложений при двойном предельном переходе $\varepsilon \rightarrow 0$, $Re \rightarrow \infty$ с условием $\varepsilon \gg Re^{-1/2}$, предполагая, что течение безотрывно.

При учете угла атаки асимптотическое разложение потенциала обтекания тонкого тела имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= x + \varepsilon^2 \ln \varepsilon \cdot \frac{q(x)}{2\pi} + \varepsilon^2 \varphi_2(x, y_1, z_1) + \dots \\ y_1 &= \frac{y}{\varepsilon}, \quad z_1 = \frac{z}{\varepsilon}, \quad r_1^2 = y_1^2 + z_1^2 \\ \varphi_2 &= \frac{q(x)}{2\pi} \ln r_1 + G(x) + \alpha_0 y_1 \left(1 + \frac{x^2}{r_1^2} \right)\end{aligned}$$

Здесь $q(x)$ – плотность источников на оси тела, для конического носика $q=2\pi x$. Функция G определяется всей формой тела, ее конкретный вид для дальнейшего анализа интереса не представляет. На поверхности конуса в результате асимптотические разложения продольной и окружной скоростей и давления имеют вид

$$\begin{aligned}u &= 1 + \varepsilon^2 \ln \varepsilon + \varepsilon^2 u_2(x, \theta) + \dots, \quad v = \varepsilon(-2\alpha_0 \sin \theta) + \dots \\ p &= -\varepsilon^2 \ln \varepsilon - \varepsilon^2(2\alpha_0 \cos \theta + 2\alpha_0^2 \sin^2 \theta + F(x)) + \dots\end{aligned}$$

Уравнения пограничного слоя удобно получить из уравнений Навье-Стокса, записанных в цилиндрической системе координат. Пусть u , v , w – соответственно продольная, окружная и радиальная скорости, тогда, пользуясь видом разложений потенциального потока, ищем решение уравнений Навье-Стокса в виде

$$\begin{aligned}u &= u_1(x, \theta, Y) + \dots, \quad v = \varepsilon v_1(x, \theta, Y) + \dots, \quad w = \varepsilon u_1 + \text{Re}^{-1/2} w_1(x, \theta, Y) + \dots \\ p &= -\varepsilon^2 \ln \varepsilon + \varepsilon^2 p_1(x, \theta, Y) + \dots, \quad Y = \text{Re}^{1/2}(r - \varepsilon x)\end{aligned}$$

Относительно членов с индексом 1 получаем систему уравнений пограничного слоя, которая после замены $\theta = \pi + \varphi$, примет вид

$$\begin{aligned}u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{v_1}{x} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial Y} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial Y^2} \\ u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{v_1}{x} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + w_1 \frac{\partial v_1}{\partial Y} + \frac{v_1 u_1}{x} &= -\frac{1}{x} \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{x} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + \frac{u_1}{x} + \frac{\partial w_1}{\partial Y} &= 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial Y} = 0 \\ Y = 0: u_1 = v_1 = w_1 = 0; \quad Y \rightarrow +\infty: u_1 = 1, \quad v_1 &= 2\alpha_0 \sin \varphi \\ \frac{dp_1}{d\varphi} &= -2\alpha_0 \sin \varphi (1 + 2\alpha_0 \cos \varphi)\end{aligned}$$

К системе уравнений необходимо добавить начальные условия при $x \rightarrow 0$ и $\varphi = 0$. Отметим, что угол φ отсчитывается от линии растекания на наветренной стороне конуса.

На Рис.6 представлены две компоненты напряжения поверхностного трения: τ_1 ($\alpha_0 = 0.6$, кривая 1) и τ_2 ($\alpha_0 = 0.6$, кривая 2); τ_1 - продольная компонента, а τ_2 - окружная. Установлено, что непрерывное решение уравнений пограничного слоя в диапазоне $\varphi = [0, \pi]$ существует при $\alpha_0 \leq 0.6$. При $\alpha_0 < \alpha_* = 0.6$ решение гладкое. При $\alpha_0 > \alpha_*$ решение особое, оно непродолжимо до точки $\varphi = \pi$. Наконец, при $\alpha_0 = \alpha_*$ уравнения допускают особое (с изломом в τ_1 и τ_2), но продолжимое решение через точку нулевого окружного напряжения трения. Качественно кривая 2 соответствует двухмерному случаю Рубана (1981), однако в отличие от плоского режима наклоны слева и справа от особой точки различны. Координата особой точки $\varphi_* \approx 3.01$.

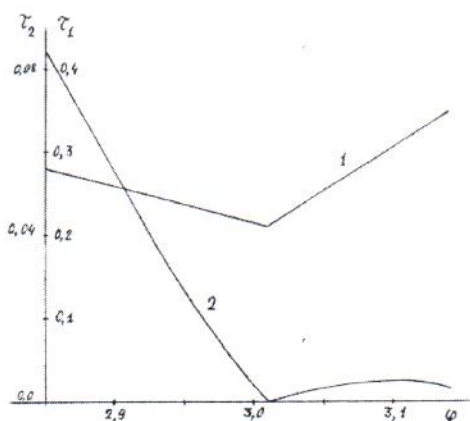


Рис.6

Анализ в малой окрестности особой точки (Рис.7) показывает, что окружное напряжение трения, обозначенное через $A(\varphi_1)$, где φ_1 - нормированное приращение угловой координаты удовлетворяет уравнению

$$A \cdot A'(\varphi_1) - \lambda \varphi_1 + (1 - \lambda)A = 0$$

$$A = -\varphi_1 - \text{const} \frac{\Delta \alpha}{(-\varphi_1)^\lambda} + \dots, \quad \varphi_1 \rightarrow -\infty$$

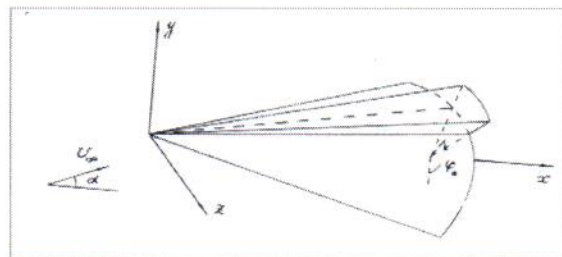


Рис.7

Далее необходимо вводить в рассмотрение взаимодействие между пограничным слоем и внешним невязким потоком, т. к. излом формируется не только в окружной компоненте напряжения трения, но и в толщине вытеснения. И внешний потенциальный поток обтекает поперек острую «крышу», конек которой направлен вдоль луча $\varphi = \varphi_*$. В результате на поверхности конуса в малой окрестности данного луча индуцируется следующий градиент возмущенного давления

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi_1} = \frac{(-const)}{\pi} x^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \frac{dt}{t - \varphi_1}$$

Важно отметить, что это возмущенное давление уже не обладает свойством коничности, и поэтому, в вязкой части области взаимодействия течение будет существенно трехмерно, в отличие от автомодельного пограничного слоя, сформировавшего данное течение. Учет взаимодействия приводит к следующей начально-краевой задаче

$$\int_{-\infty}^{\varphi_1} \left[A \frac{\partial A}{\partial t} - \lambda t + (1 - \lambda) A + \frac{3}{4} (1 - \lambda) x \frac{\partial A}{\partial x} \right] dt = \frac{1}{2} x^{-1/2} \int_{\varphi_1}^{+\infty} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \frac{dt}{\sqrt{t - \varphi_1}}$$

$$A = -\varphi_1 - \Gamma(-\varphi_1)^{-\lambda} + \dots, \quad \varphi_1 \rightarrow -\infty$$

$$A = \lambda \varphi_1 + \dots, \quad \varphi_1 \rightarrow +\infty$$

$$A = x^{-1/5} A_1(\xi) + \dots, \quad \xi = x^{1/5} \varphi_1, \quad x \rightarrow 0$$

Численный расчет задачи при $\Gamma = -2$ приведен на Рис.8, решение существует везде в области определения задачи. Вблизи носика конуса взаимодействие существенно, а по мере продвижения вдоль конуса вниз по потоку оно слабеет и решение стремится к соответствующему решению автомодельного пограничного слоя. При $\Gamma=0$ решение имеет вид $A = x^{-1/5} A_1(\xi) > 0$ - напряжение трения это всюду положительно определенная функция, т.е. при критическом значении угла атаки, взаимодействие сглаживает решение и никаких возвратных токов нет.

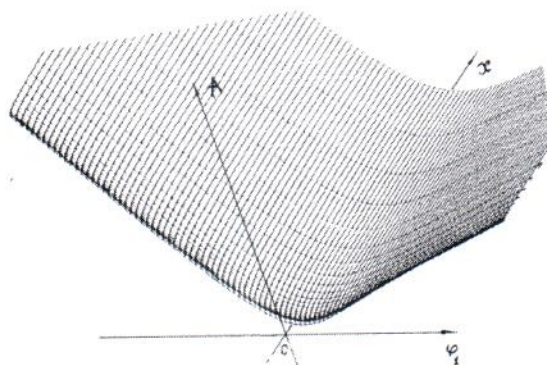


Рис.8

При $\Gamma=2$ решение представлено на Рис.9. Отметим, что вообще говоря, для $\Gamma>0$ решений уравнений пограничного слоя без взаимодействия, определенных везде на поверхности конуса, не существует. Из графика же видно, что благодаря сильному взаимодействию вблизи носика конуса решение существует. Далее напряжение трения убывает, в некоторой точке достигает нулевого значения, т.е. на дне пограничного слоя появляются возвратные токи. При дальнейшем продвижении вдоль конуса вниз по потоку, окружная составляющая напряжения трения продолжает убывать и наконец в некоторой точке формируется непроходимая особенность $A = (x_* - x)^{-3/5} A_2(\eta) + \dots$, $\eta = (\varphi - \varphi_*) / (x_* - x)^{2/5} = O(1)$, $x \rightarrow x_*$. В этой особой точке вихрь резко вспухает и образует вихревую пелену, много толще пограничного слоя.

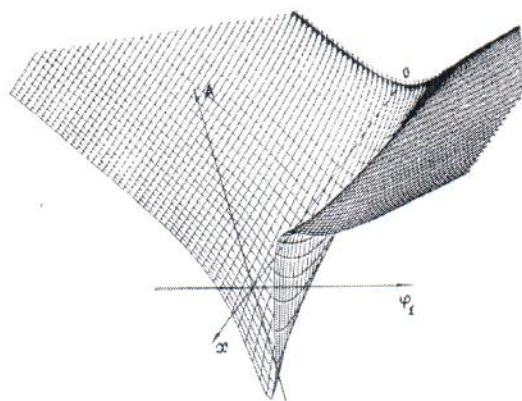


Рис.9

Важно отметить два факта: расстояние от носика конуса до точки зарождения вихревой пелены сравнимо с длиной конуса; в силу тонкости самого обтекаемого тела и соответственно вихревой пелены, закон плоских сечений работает и вихревая пелена не возмущает пограничный слой до точки своего появления. С увеличением угла атаки, точка зарождения вихревой пелены быстро сдвигается в носик и течение становится коническим снова.

В §2 изучено формирование особенностей в пространственном пограничном слое на примере обтекания вытянутого эллипсоида вращения, установленного под углом атаки $\alpha \approx 40^\circ$.

74. Оптимальное тело Рэнкина под углом атаки. Осесимметричное тело, показанное на фото 22, оказалось здесь под углом атаки 50° к потоку воды. Линии тока на поверхности касательны к наружной границе течения; слой ламинарного отрыва и обратного присоединения, образующего нечто вроде подковообразного вихря, расположенного над несимметричной поверхностью. Фото ONERA, [World, 1962]

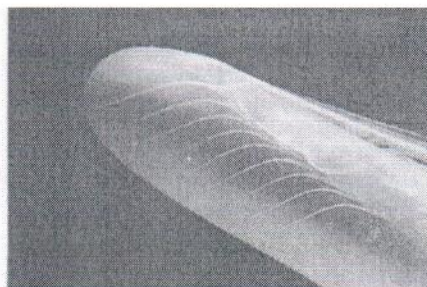


Рис.10

Исследуется формирование особенностей в трехмерном ламинарном пограничном слое вблизи линии растекания (стекания) внешнего

потенциального потока, что, однако, не ограничивает общности полученных результатов. Предполагается, что вдоль линии растекания на пограничный слой действует неблагоприятный градиент давления, приводящий к появлению изолированной точки нулевого напряжения трения. При этом продольная компонента трения на верхней линии симметрии линейно падает до нуля в некоторой точке, а затем снова становится положительной величиной. В работе Браун (1985) изучено течение жидкости именно на линии растекания эллипсоида с учетом взаимодействия пограничного слоя с внешним потенциальным потоком.

В настоящей работе учтена трехмерность течения жидкости в окрестности точки нулевого трения. Доказано, что в рамках полных уравнений пограничного слоя действительно формируется изолированная точка нулевого продольного трения при некотором критическом угле атаки эллипсоида. При углах атаки меньше критического решение гладкое. При углах атаки больше критического найдена линия на поверхности тела, за которую решение не может быть продолжено. Эта кривая начинается из особой точки, типа Гольдштейна (1948), лежащей на линии растекания. В остальных точках этой линии обращается в бесконечность вертикальная компонента скорости. Расчеты уравнений пограничного слоя в окрестности линии отрыва были выполнены Себеси и др. (1981), в которых было показано, что на линии отрыва появляется острый излом (так называемый «ок»), по мере того как угол атаки увеличивается. При дальнейшем росте угла атаки «ок» перемещается вперед ближе к точке торможения и вверх ближе к линии симметрии на подветренной стороне тела. Структура решения вблизи излома линии отрыва не ясна, но наличие такого излома демонстрирует схождение предельных линий тока. Было обнаружено, что при подходе линий тока к линии отрыва с наветренной стороны решение содержит сингулярность Гольдштейна, в то время как при подходе с подветренной стороны решение может содержать либо линию отрыва, либо линию, отграничивающую область недоступности для жидких частиц.

Будем проводить анализ в декартовой системе координат (Рис.11), в силу локальности исследуемых явлений качественных изменений такой выбор системы координат за собой повлечь не должен. Пусть линия $z=0$ является линией растекания потенциального потока несжимаемой жидкости, текущей над плоскостью $y=0$. Все скорости отнесем к некоторой характерной скорости течения U_0 , приращения давления к удвоенному скоростному напору ρU_0^2 , а длины к характерному размеру тела L . Будем полагать, что число Рейнольдса $Re = \rho U_0 L / \mu$ велико.

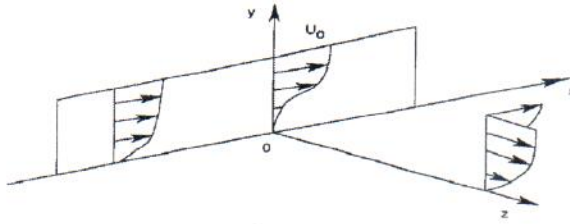


Рис.11

Если нормальную координату к поверхности и компоненту скорости v считать нормированными на $Re^{-1/2}$, то уравнения пограничного слоя запишутся следующим образом:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$y=0: u=v=w=0, \quad y \rightarrow +\infty: u=u_e(x, z), \quad w=w_e(x, z)$$

Данная система уравнений обычно изучается численным способом. В частности, при воздействии неблагоприятного градиента давления $p'_0(x) > 0$ продольная компонента напряжения трения $\tau_x = \partial u_0 / \partial y$ ($y=0$) может иметь особенность устранимого типа — излом в точке $x=0$ (в выбранной системе координат).

Ищем асимптотическое разложение решения в общем случае вблизи особой точки в виде при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$u = \varepsilon^{1/2} \frac{1}{2} p_{00} y_1^2 + \varepsilon^{5/4} u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \quad w = \varepsilon^{\beta+1/4} c_0 y_1 z_1 + \varepsilon^{\beta+1} w_1 + \dots$$

$$v = \varepsilon^{1/2} \left[-\frac{1}{2} c_0 y_1^2 + v_1 \right] + \varepsilon^{5/4} v_2 + \dots, \quad x_1 = \frac{x}{\varepsilon}, \quad z_1 = \frac{z}{\varepsilon^\beta}, \quad y_1 = \frac{y}{\varepsilon^{1/4}}$$

Характерные возмущения угла атаки $\alpha = \alpha_* + \varepsilon^{1+\lambda} \Gamma$. Решение для u_1 и v_1 имеет вид

$$u_1 = B(x_1, z_1) y_1 - \frac{1}{40} c_0 p_{00} y_1^5, \quad v_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial x_1} y_1^2,$$

А функция B после замены, должна удовлетворять уравнению

$$A \frac{\partial A}{\partial x} - \lambda x + (1-\lambda)A + (1-\lambda)z \frac{\partial A}{\partial z} = 0$$

$$A = -x - \frac{\text{sign} \Gamma}{(-x)^\lambda} + z^2 \cdot \text{sign} a_2 \cdot (-x)^{2-3\lambda} + \dots, \quad x \rightarrow -\infty$$

$$x_1 = c_2 x, \quad B = a_0 c_2 A$$

Решение данной задачи имеет вид

$$(A - \lambda x)^{3\lambda-2} (A + x) - G_1 (A - \lambda x)^{2\lambda-2} = G_2 z^2$$

$$G_1 = -\text{const} \cdot \text{sign} \Gamma, \quad G_2 = \text{const} \cdot \text{sign} a_2$$

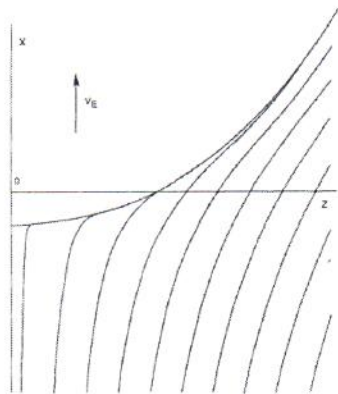


Рис.12 $\lambda=2/3$, $G_1=-1$, $G_2=1$

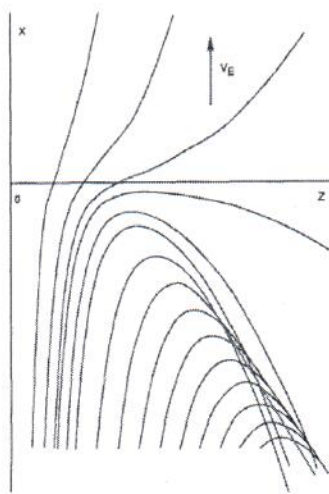


Рис.13 $\lambda=3/4$, $G_1=1$, $G_2=-1$

На некотором расстоянии от линии растекания есть точка, в которой начинается линия разрыва решения, она начинается в точке схождения линий тока (условно показана красным цветом). Около линии разрыва видна область неединственности — приосевые частицы протекают далее точки минимального трения, затем часть из них разворачивается и возвращается обратно, подтекая к линии разрыва сзади. Приходящие более отдаленные от оси частицы плавно поворачиваются и немедленно натываются на линию разрыва спереди.

При выводе изученного уравнения предполагалось, что $\Delta x = O(\varepsilon)$, $\Delta z = O(\varepsilon^\beta)$, где ε связано с приращением угла атаки тела соотношением $\alpha = \alpha_* + \varepsilon^{1-\lambda} \cdot \Gamma$. Тогда параметр β определяется в виде $\beta = (3\lambda - 2)/2$ и если $a_2 = O(1)$, то $\Delta z \gg \Delta x$ при $\lambda < 1$. При $\lambda > 1$, $\Delta z \ll \Delta x$. Таким образом характерная область изменения функции A растягивается поперек потока вблизи линии растекания и вдоль потока вблизи линии стекания. В результате, в случае линии растекания, потенциальная область над пограничным слоем оказывается квази-двумерной по природе и задача о взаимодействии оказывается следующей

$$\int_{-\infty}^x \left(A \frac{\partial A}{\partial t} - \lambda t + (1-\lambda)A + (1-\lambda)z \frac{\partial A}{\partial z} \right) dt = \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \frac{dt}{\sqrt{t-x}}$$

$$A = A_{Brown} \quad z = 0$$

$$A = A_{B.L.} \quad |x| \rightarrow \infty$$

Расчеты показывают на Рис.14 седловую точку на линии растекания, из которой выходит линия отрыва потока. Образуется возвратное течение вблизи линии симметрии. Также присутствует узловая точка присоединения потока далее от седловой. Из нее выходит линия присоединения течения. Жидкие частицы присоединяются к поверхности, делают полуоборот и быстро сносятся вниз и вбок по потоку. Для больших величин z решение стремится к асимптотике пограничного слоя без взаимодействия.

Возможен режим на Рис.15, в котором формируется вихрь, уходит от оси вправо и вверх по потоку и заканчивается особенностью на конечном расстоянии от оси. То есть в данном случае тонкий вихрь продолжается от линии растекания до некоторой точки, в ней происходит «взрыв» и далее глобальная картина течения заметно меняется.

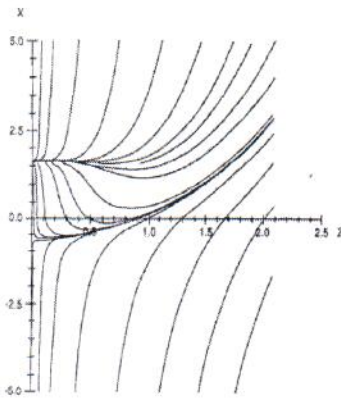


Рис. 14 $\lambda=3/4$, $G_1=-1.5$, $G_2=1$

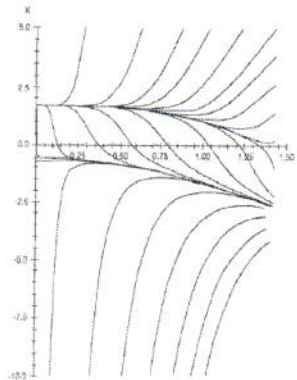


Рис.15 $\lambda=3/4$, $G_1=-1.5$, $G_2=-1.5$

Далее в конце главы идут выводы.

В главе 2 изучены пространственные задачи предотвратного обтекания тел, обусловленные влиянием тонких вихревых нитей и конфигураций. В первом параграфе рассматривается двумерное стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости около плоской пластины, установленной под нулевым углом атаки в неоднородном набегающем потоке (Рис. 16). Пусть тонкий продольный вихрь с постоянной вдоль своей оси циркуляцией $LU_\infty h^2 \Gamma_1$ расположен на малом расстоянии Lh от плоской поверхности. Обозначим через Lx , Ly , Lz прямоугольные координаты, через $U_\infty u$, $U_\infty v$, $U_\infty w$ и $p_\infty + \rho U_\infty^2 p$ — соответствующие проекции вектора скорости и давление. Здесь U_∞ , p_∞ — скорость и давление в набегающем потоке, ρ — плотность жидкости, L — характерный размер пластины. Введем число

Рейнольдса $Re = U_\infty L / \nu$, где ν — коэффициент кинематической вязкости, в дальнейшем полагаем $Re \rightarrow \infty$.

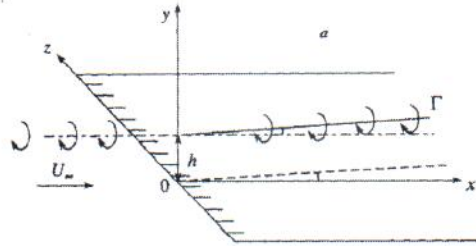


Рис.16

Пространственное потенциальное течение, порождаемое вихревой нитью вблизи пластины, будет использовано как внешнее при исследовании пограничного слоя на поверхности пластины. В итоге получаем, что течение описывается уравнениями классического трехмерного пограничного слоя с заданным градиентом давления

$$\begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial x_1} + V \frac{\partial U}{\partial y_1} + W \frac{\partial U}{\partial z_1} &= -p'_0(x_1) + \frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} \\ U \frac{\partial W}{\partial x_1} + V \frac{\partial W}{\partial y_1} + W \frac{\partial W}{\partial z_1} &= -u_e^2 \frac{\partial p_2}{\partial z_1} - \frac{\Gamma_1}{4\pi} p'_0 + \frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2} \\ \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{\partial W}{\partial z_1} &= 0 \\ U=V=W=0, \quad y_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= u_e(x_1), \quad W = u_e \left(\frac{\Gamma_1}{4\pi} - \frac{\Gamma_1}{\pi} (1+Z^2)^{-1} \right), \quad y_1 \rightarrow +\infty \\ Z &= \frac{z_1}{y_0}, \quad y_0(x_1) = \frac{u_e(0)}{u_e(x_1)}, \quad p'_0 = -u_e u'_e \\ p_2 &= \frac{\Gamma_1^2}{4\pi^2} \frac{Z^2 - 1}{(1+Z^2)^2} - y'_0(x_1) \frac{\Gamma_1}{\pi} \frac{Z}{1+Z^2} \end{aligned}$$

Простой анализ показывает, что при $x_1 \rightarrow 0$ в качестве начальных данных для продольной компоненты скорости следует использовать решение Блазиуса на пластине, как следствие находится и асимптотика поперечной компоненты скорости. В общем случае задача о данном пограничном слое может быть решена только численно.

Для изучения влияния вихря малой интенсивности представим решение сформулированной задачи при $\Gamma_1 \rightarrow 0$ в виде асимптотических разложений

$$\begin{aligned} U &= U_0 + \Gamma_1 U_1 + \dots, \quad V = V_0 + \Gamma_1 V_1 + \dots \\ W &= \Gamma_1 W_1 + \Gamma_1^2 W_2 + \dots, \quad p_2 = \Gamma_1 p_{21} + \Gamma_1^2 p_{22} + \dots \end{aligned}$$

В результате оказывается, что течение в главном приближении для функций U_0, V_0 описывается системой уравнений, не отличающейся от плоского пограничного слоя при заданном градиенте давления. В кромочной теории

отрыва плоских пограничных слоев с заданным неблагоприятным градиентом давления данная задача играет ключевую роль, так как помимо гладкого решения, допускает непродолжимую особенность Гольдштейна, а иногда более слабую – продолжимую.

Именно для этого случая на Рис.17 показаны предельные линии тока на дне пограничного слоя под вихревой нитью. Четко видны сильные перегибы в этих линиях, означающие пространственные возмущения на фоне двухмерного пограничного слоя.

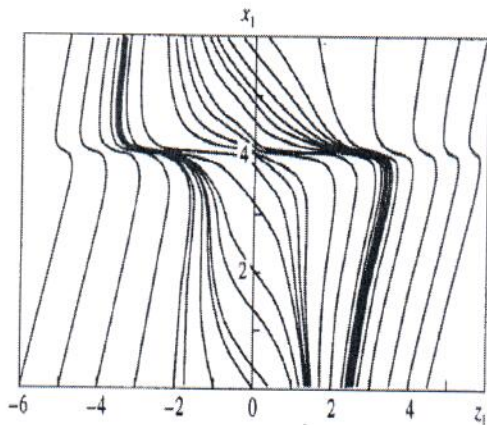


Рис.17

Из расчетов следует, что возмущать критическое решение можно двумя независимыми способами: варьируя параметр α (определяющий силу неблагоприятного градиента давления) вблизи α_s (соответствующем $\Gamma_1 = 0$) или задавая ненулевую циркуляцию вихревой нити при $\alpha = \alpha_s$. Результаты оказываются схожими – в пограничном слое развиваются возмущения, имеющие сингулярность при $x_1 \rightarrow x_s$. Укажем решение уравнений пограничного слоя в малой окрестности точки $x_1 = x_s$ при $\alpha \rightarrow \alpha_s$ и $\Gamma_1 \rightarrow 0$. Полагаем $\Delta\alpha \sim \Gamma_1$, тогда в приведенных переменных напряжение продольного трения принимает вид

$$A = \sqrt{(x_1 - x_s)^2 - \Delta\alpha - \Gamma_1 \tau(z_1)}$$

При $\Gamma_1 = 0$ указанное решение в точности совпадает с двумерным. Удобно анализировать поведение функции A , начиная с безотрывных режимов, т.е. полагая $\Delta\alpha < 0$. В этом случае напряжение продольного трения будет всюду положительным, но по мере роста циркуляции, у функции A появится локальный минимум. Оказывается, что для заданного $\Delta\alpha$ можно подобрать такое значение Γ_1 , при котором продольное трение обращается в нуль в изолированной точке. Заметим, что если Γ_1 возрастает далее, то подкоренное выражение становится отрицательным в некоторой замкнутой

области и функция A в ней не определена. Если же в области существования решения нарисовать предельные линии тока на обтекаемой поверхности, то окажется, что граница области недоступности является огибающей этих линий. На этом этапе, чтобы построить гладкое решение для ключевой функции $A(x, z)$, естественно ввести область взаимодействия течения в пограничном слое с внешним потенциальным потоком. Оказывается можно ввести вытянутую в продольном и суженную в поперечном направлениях область взаимодействия, в отличие от обычного кромочного режима. Взаимодействие в указанном случае носит специфичный характер. В вязкой зоне области взаимодействия продольный градиент давления выпадает и остается только поперечная его составляющая. В потенциальной же зоне области взаимодействия решение отыскивается в рамках теории тонкого тела.

В данной постановке задача содержит произвольный параметр $\Delta\alpha \gg \text{Re}^{-2/5}$. Однако более удобно работать с характерной длиной изучаемой области $\delta = |\Delta\alpha|^{1/2}$ как с параметром. Поперечный размер $h \ll \delta$ находится однозначно из требования, чтобы индуцированное давление $p_i \sim \text{Re}^{-1/2} h \delta^{-1}$ воздействовало на течение в вязком подслое области взаимодействия

$$h = \text{Re}^{-1/2} \delta^{-3/2}, \quad \text{Re}^{-1/5} \ll \delta \ll 1, \quad \text{Re}^{-1/5} \gg h \gg \text{Re}^{-1/2}$$

Опуская промежуточные выкладки, традиционные для теории кромочного отрыва, выпишем задачу для искомой функции $A(x, z)$ в приведенных переменных

$$A^2 - x^2 + k + \gamma\tau(z) = - \int_{-\infty}^x \frac{dt}{\sqrt{x-t}} \int_{-\infty}^t \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} du$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^3 A}{\partial x^2 \partial \zeta} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

$$A = \sqrt{x^2 - k}, \quad |z| \rightarrow \infty; \quad A = -x + \frac{k + \gamma\tau(z)}{2x} + \dots, \quad x \rightarrow -\infty$$

Оказывается, что при малых значениях циркуляции течение безотрывно, с ее увеличением трение падает и при некотором γ обращается в нуль. При дальнейшем увеличении циркуляции появляется область возвратного продольного течения. Однако решение, существующее во всей плоскости (x, z) , удастся построить только при $\gamma \leq \gamma_* = 15.6490912$. При больших значениях циркуляции маршевый расчет наталкивается на особенность в конечной точке по x . Пространственный характер функции A и ее эволюция в зависимости от величины циркуляции демонстрируются на фиг. 18. Наглядно видно формирование глубокой впадины с ростом циркуляции. Такое поведение означает, что струйки тока, приходящие в область отрицательного продольного трения, закручиваются и одновременно сносятся в сторону, постоянно уходя вниз по потоку. Отметим отличие трехмерного отрывного течения от плоского: отсутствует замкнутая область,

содержащая изолированные жидкие частицы. Весь эффект отрыва заключается в немонотонности поведения траекторий жидких частиц.

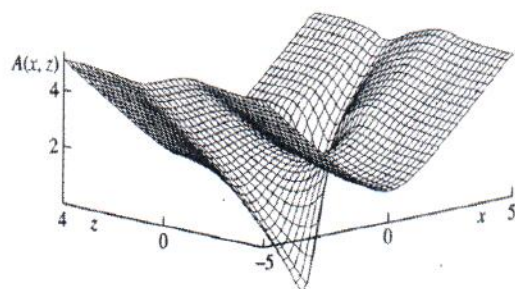


Рис. 18

В параграфе 2 главы 2 изучается трехмерный отрыв около неровности на поверхности тела вращения.

Рассмотрим стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости около тонкого осесимметричного тела, находящегося в однородном набегающем потоке под нулевым углом атаки. Пусть для простоты поверхность тела представляет собой круговой цилиндр с продольным размером l . Обозначим через lx, lr, θ цилиндрические координаты, через $u_\infty u, u_\infty v, u_\infty w$ и $p_\infty + \rho u_\infty^2 p$ — соответствующие проекции вектора скорости и давление. Здесь u_∞, p_∞ — скорость и давление в набегающем потоке, ρ — плотность жидкости. Ось x будем полагать совпадающей с осью симметрии тела, а начало системы координат — с его носовой частью. Введем функцию тока $l^2 u_\infty \psi$: $u = r^{-1} \psi_r, v = -r^{-1} \psi_x$ и число Рейнольдса $Re = u_\infty l / \nu$, где ν — коэффициент кинематической вязкости.

Будем считать, что радиус тела $r_w = l r_0 \delta$ ($r_0 = \text{const}$) по порядку величины больше характерной толщины пограничного слоя, т.е. $\delta = \delta(Re) \rightarrow 0, \delta > O(Re^{-1/2})$ при $Re \rightarrow \infty$. Тогда течение в пограничном слое в главном приближении описывается уравнением, не отличающимся от соответствующего плоскому случаю

$$x = O(1), r = \delta r_0 + Re^{-1/2} y, \psi = \delta Re^{-1/2} r_0 \psi$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{dp_e^*}{dx} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3},$$

$$u_e^* \frac{du_e^*}{dx} = -\frac{dp_e^*}{dx}$$

$$y = 0: \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad y \rightarrow \infty: \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow u_e^*(x)$$

Рассмотрим режим течения, когда параметр, определяющий распределение давления $p_e^*(x)$, достигает своего критического значения, так что в некотором сечении $x = x_s = \text{const}$ трение на поверхности тела впервые

обращается в нуль. Этого можно добиться, например, поместив обтекаемое тело на входе в круговой цилиндр с искривленной в продольном направлении частью. Вблизи изолированной особой точки нулевого поверхностного трения ($x = x_s$) пограничный слой имеет двухслойную структуру. Пусть далее внутри этой области имеется малая трехмерная неровность поверхности (Рис.19), причем ее высоту, как и в Хакмюллер, Клювик (1989), выберем такой, чтобы влияние последней проявлялось в процессе взаимодействия. Обозначим через ε и $\sigma\delta$ соответственно, масштабы для продольного и поперечного размеров пространственной неровности, а через h – для ее высоты. При этом $\varepsilon = \varepsilon(\text{Re}) \rightarrow 0$, $h = h(\text{Re}) \rightarrow 0$ и $\sigma = \sigma(\text{Re}) \leq O(1)$ при $\text{Re} \rightarrow \infty$.



Рис.19

Рассмотрим режим течения в области взаимодействия когда неровность охватывает всю поверхность цилиндра или ее конечную часть по углу θ , а продольный размер области взаимодействия (и неровности) по порядку величины больше радиуса цилиндра. В результате задача сводится к следующей

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Y^2 \frac{\partial U}{\partial X} + YV + \frac{dP_0}{dX} &= \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \\ \frac{1}{2} Y^2 \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{dP_1}{dZ} &= \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{dV}{dZ} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \\ Y=0: U &= G, \quad V=W=0 \\ Y \rightarrow \infty: U &\rightarrow 0, \quad V \rightarrow 0, \quad W = 2D(X, Z)V^{-2} + O(Y^{-6}) \\ |X| \rightarrow \infty: U &\rightarrow 0, \quad A_1 \rightarrow |X| - a^*|X|^{-1}, \quad F \rightarrow 0 \\ A_0(X) &= A_1(X, Z) - F(X, Z), \quad P_0 = -\frac{d^2 A_0}{dX^2} \\ G &= -\frac{1}{2}(A_1^2 - X^2 + 2a^*), \quad D = -\int_{-\infty}^X \frac{\partial P_1}{\partial Z} dX \end{aligned}$$

Входящий в эту систему параметр подобия a^* характеризует степень отклонения течения в области I от его критического состояния, при котором в решении задачи без взаимодействия возникает устраняемая особенность. Решение сформулированной задачи существует, если только искомые функции $A_1(X, Z)$, $P_0(X)$ и $P_1(X, Z)$ связаны между собой определенным образом.

Перейдем к описанию результатов численного решения задачи. Рассмотрим неровность вида

$$F = H_0 g_0(X) \cos 3Z, \quad 0 \leq Z \leq 2\pi, \quad g_0 = e^{-X^2/2}, \quad H_0 = \text{const}$$

В этом случае на основании системы рекуррентных соотношений получаем

$$\frac{d^2 A_0}{dX^2} = \frac{1}{\lambda \pi} \int_{-\infty}^x \left[\frac{A_0^2(t) + 1/2 H_0^2 g_0^2(t) - t^2 + 2a^*}{(X-t)^{1/2}} \right] dt$$

$$R_3 = \frac{H_0}{9\lambda\pi} \int_{-\infty}^x \frac{A_0(t) g_0(t)}{(X-t)^{1/2}} dt, \quad p_3 = \frac{d^2 R_3}{dX^2}$$

$$R_6 = \frac{5H_0^2}{6!\lambda\pi} \int_{-\infty}^x \frac{g_0^2(t) dt}{(X-t)^{1/2}}, \quad p_6 = \frac{d^2 R_6}{dX^2}$$

$$P_1 = 2p_3(X) \cos 3Z + 2p_6(X) \cos 6Z$$

$H_0=0$ – струя, Заметаев (1987), кривые $1 \leq a^* \leq -1,5; -1; 0; 0,7$

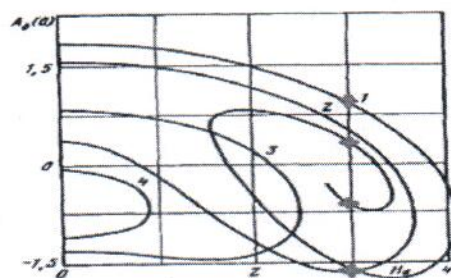
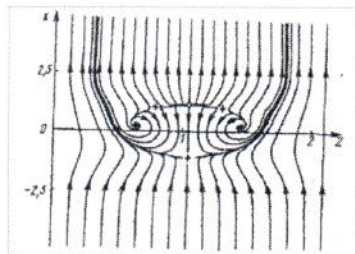
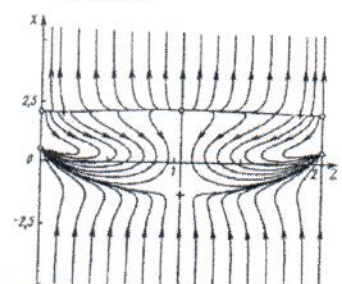


Рис.20

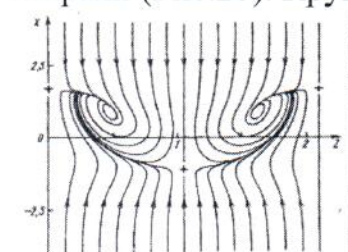


$H_0 = 3, a^* = -1,5$ - 1 решение

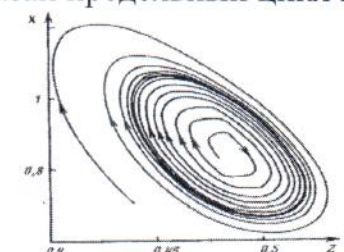


$H_0 = 3, a^* = -1,5$ - 2 решение

Приведены картины линий тока для трех последовательных решений на спирали (Рис.20). Крупно показан предельный цикл в 3 решении.



$H_0 = 3, a^* = -1,5$



3 решение предельный цикл

Рис. 21

В Главе 3 описан численный метод решения сложных задач вязко-невязкого взаимодействия на примере обтекания излома поверхности. Формулировка задачи и схема течения следующие

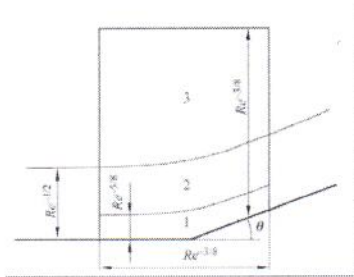


Рис.22

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u = v = 0, \quad y = 0, \quad u = y + \dots, \quad x \rightarrow -\infty$$

$$u = y + A(x) + \dots,$$

$$v = -\frac{dA}{dx} y - \frac{dp}{dx} - A \frac{dA}{dx} + \dots \quad y \rightarrow +\infty$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A''(s) - f''(s)}{s - x} ds$$

Первоначально такие задачи решались различными итерационными методами, в которых нашлись серьезные трудности со сходимостью в отрывных зонах, и невозможностью решения с отрывом открытого типа. Обзор и классификация существующих методов на тот момент были сделаны Велдманом (1981), в том числе он предложил собственный оригинальный квази-одновременный метод, проверенный на обтекании задней кромки пластины и маленьких впадинах/бугорках. Следует упомянуть прикладные работы по обтеканию профиля крыла со взаимодействием при конечных числах Рейнольдса в двухмерных и трехмерных случаях, например Караса и Ковалева (1989). Известная фундаментальная работа Гайфуллина и Захарова (1990), посвящена расчету отрывного обтекания конуса со сходом вихревой пелены в рамках теории плоских сечений. Затем Королев (1991) предложил рассматривать все поле течения в качестве неизвестных и значительно продвинулся в численных расчетах задач со взаимодействием, но ценой огромной памяти и значительного времени расчета. В диссертации предложен оригинальный и эффективный метод расчета, использующий схему Ньютона для единственной неизвестной функции – толщины вытеснения вязкого подслоя. Решается неявная система уравнений, состоящая из разности вязкого и невязкого градиентов давления, которые равны друг другу при сходимости.

$$F_j(A_i) = \frac{dp}{dx} \Big|_{inv} - \frac{dp}{dx} \Big|_{vis} = 0, \quad i, j = 1, \dots, N$$

Невязкий градиент давления вычисляется из интеграла Гильберта, а вязкий градиент из уравнений пограничного слоя. На каждой итерации поправки ищутся методом Ньютона, решая линейную систему неявных уравнений

$$F_j(A_i) + \frac{\partial F_j}{\partial A_i} \delta A_i = 0$$

Veldman A. E. P. New; quasi-simultaneous method to calculate interacting boundary layers // *AIAA Journal*, 1981, V. 19, No. 1, P. 79-85.

Карась О.В., Ковалев В.Е. Применение обратного метода для вычисления трехмерного пограничного слоя в задаче вязкого течения около крыла // Ученые записки ЦАГИ, 1989, 20(5), с.1-11.

Гайфуллин А.М., Захаров С.Б. Метод расчета отрывного обтекания кругового конуса с учетом вязко-невязкого взаимодействия // Ученые зап. ЦАГИ, 1990, 21(6), с. 41-49.

Королев Г.Л. К асимптотической теории ламинарного отрыва жидкости при обтекании угла малого излома // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 6. С. 180–182.

Чтобы исключить «болтанку» зоны отрыва от итерации к итерации, матрица Якоби вычисляется путем линеаризации текущего поля скорости в вязком подслое и решением линейных задач для вычисления каждого столбца. На Рис.23-24 показано решение задачи об обтекании излома, содержащее точку бифуркации по параметру – более некоторого отклонения щитка решение не существует. Уверенно посчитаны огромные зоны отрыва.

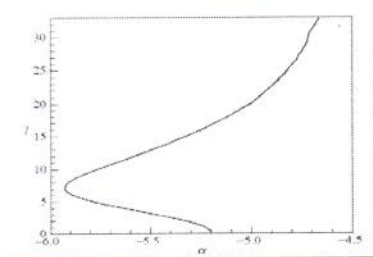


Рис. 23

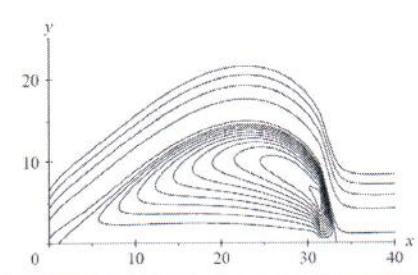


Рис.24

Решена классическая задача о смешении пограничных слоев, стекающих с задней кромки плоской пластины, сформулированная Дэнисльсом (1977). В задаче не только разные скорости внешнего потока снизу и сверху, но и разные напряжения трения Рис. 25.

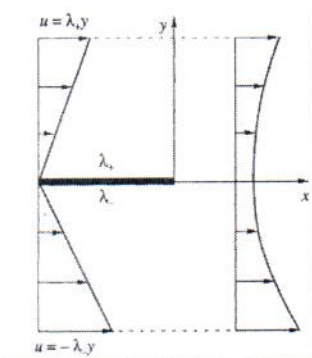


Рис.25

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp_+}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u = \lambda_+ y + \dots, \quad x \rightarrow -\infty$$

$$u = v = 0 \quad y = 0$$

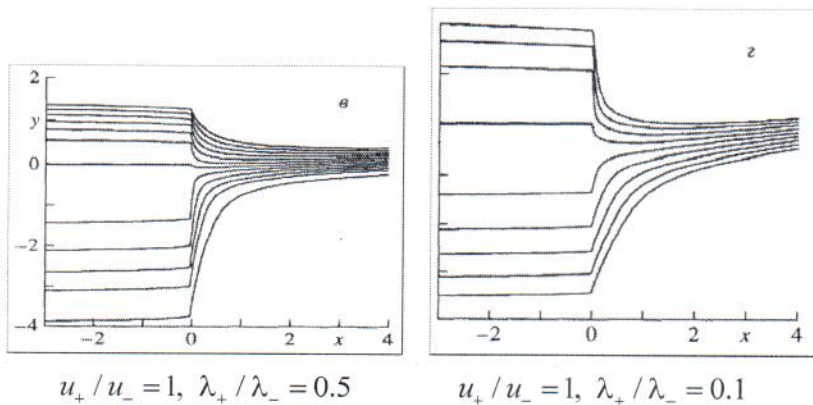
$$u = \lambda_+ (y + A_+) + \dots, \quad y \rightarrow +\infty$$

$$u = -\lambda_- y + \dots, \quad x \rightarrow -\infty$$

$$u = \lambda_- (-y + A_-) + \dots, \quad y \rightarrow -\infty$$

$$p_{\pm} = -\frac{u_{\pm}^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_{\pm}'(t) dt}{t-x}; \quad p_+ = p_-, \quad x \geq 0$$

На Рис. 26-27 ниже приведены картины линий тока для различных значений параметров.



В Главе 4 описана восприимчивость локально непараллельного пограничного слоя со взаимодействием к звуковым волнам, бегущим вне пограничного слоя газа. Задача была сформулирована Рубаном (1984) и в диссертации решена для излома, рассчитанного в предыдущей главе вблизи точки бифуркации по углу Рис.28.

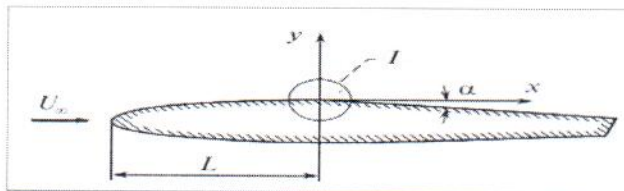


Рис.28

Асимптотические разложения решения в области взаимодействия имеют вид

$$\begin{aligned}
 u &= U_\infty \text{Re}^{-1/8} u_1 + \dots, \quad v = U_\infty \text{Re}^{-3/8} v_1 + \dots \\
 p &= p_\infty + \rho_\infty U_\infty^2 \text{Re}^{-1/8} p_1(t_*) + \rho_\infty U_\infty^2 \text{Re}^{-1/4} p_1 + \dots \\
 \rho &= \rho_\infty \rho_{00}(1, 0) + \dots, \quad \mu = \mu_\infty \mu_{00}(1, 0) + \dots \\
 t &= \frac{L}{U_\infty} \text{Re}^{-1/4} t_*, \quad x = L \text{Re}^{-3/8} x_*, \quad y = L \text{Re}^{-5/8} y_*.
 \end{aligned}$$

Задача линеаризуется относительно около критического стационарного течения в вязком подслое и имеет вид:

$$u(x, y, t) = u_0(x, y) + \alpha u_1(x, y, t) + \dots$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} = \cos \omega t - \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad p_1 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_1'(s)}{s-x} ds$$

$$u_1 = v_1 = 0 \quad y = 0; \quad u_1 = A_1(x, t) + \frac{1}{\omega} \sin \omega t + \dots, \quad y \rightarrow \infty$$

$$u_1 = \frac{1}{\omega} \sin \omega t \left[1 - e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}} y} \cos \left(\sqrt{\frac{\omega}{2}} y \right) \right] + \frac{1}{\omega} \cos \omega t \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}} y} \sin \left(\sqrt{\frac{\omega}{2}} y \right) \dots, \quad x \rightarrow -\infty$$

Поведение возмущенного градиента давления около критического значения частоты $\omega = 2.298$: 1–6 – $\omega = 2.0, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5$ показано на Рис. 29. На Рис.30 показано нарастание градиента давления возмущения внутри пограничного слоя для резонансных режимов: кривые 6–8 – $\alpha = -5.62, -5.6, -5.4$. Происходит огромное нарастание амплитуд, что позволяет заключить о резонансе возмущений вблизи точки бифуркации.

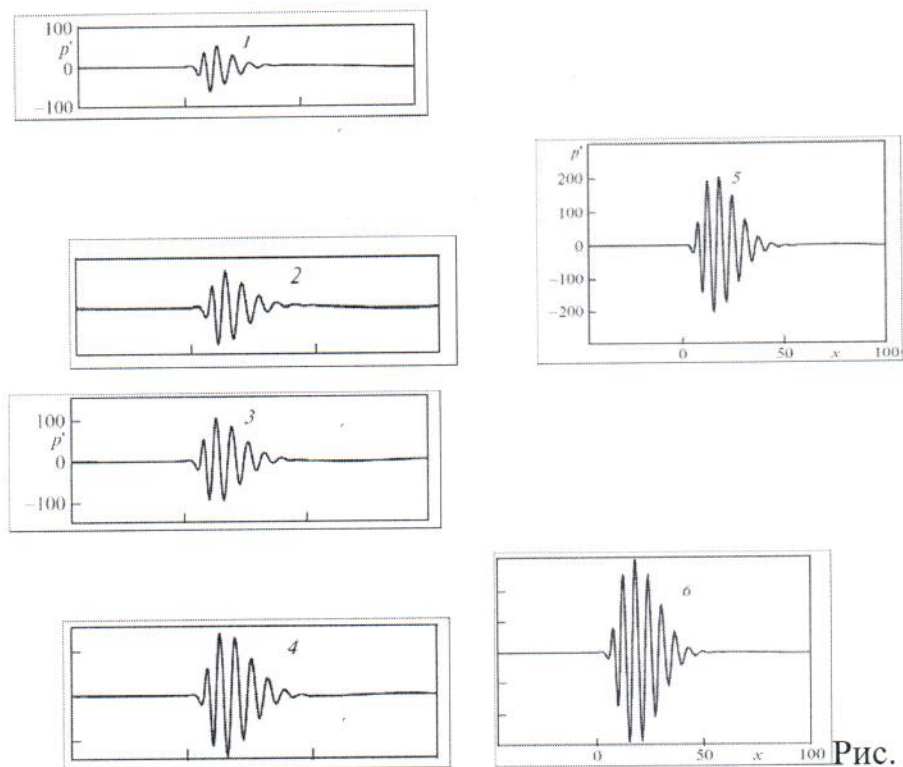


Рис. 29

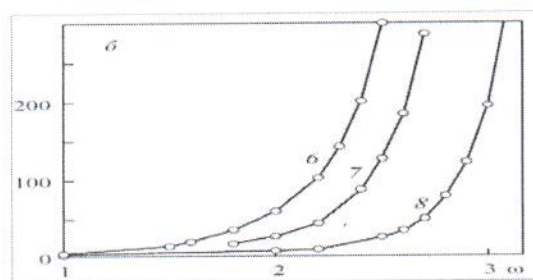


Рис.30

В Главе 5 описано обтекание слабоискривленного тупого торца кругового цилиндра Рис.31, содержащего центральное тело невязким газом в рамках теории тонкого тела. Хейз, Пробстин (1962), Лунев (1975).

$$\varepsilon = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_\infty^2} \rightarrow 0, \quad \gamma \rightarrow 1, \quad M_\infty \rightarrow \infty$$

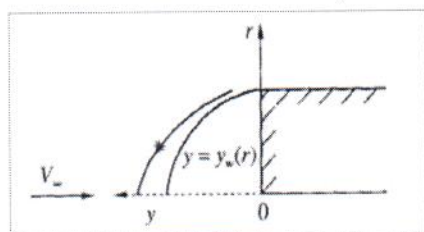


Рис.31

Асимптотическое разложение решения уравнений Эйлера за скачком уплотнения ищем в виде (в цилиндрической системе координат)

$$v_r = \varepsilon^{1/2} u_0(r, Y) + \varepsilon u_1(r, Y) + \dots, \quad p = 1 + \varepsilon p_0 + \varepsilon^{3/2} p_1 + \dots$$

$$v_y = \varepsilon (g'(r) u_0 + v_0) + \varepsilon^{3/2} (g'(r) u_1 + v_1) + \dots$$

$$\rho = \frac{1}{\varepsilon} + \rho_0 + \varepsilon^{1/2} \rho_1 + \dots, \quad H = \frac{1}{2} + \varepsilon H_0 + \varepsilon^{3/2} H_1 + \dots$$

$$y_s = \varepsilon^{1/2} f_0(r) + \varepsilon f_1(r) + \dots, \quad Y = \varepsilon^{-1/2} \left(y - \varepsilon^{1/2} g(r, h) \right)$$

Для скачка уплотнения найдется уравнение, $f_0' = -1$ - особая, звуковая точка

$$r f_0'^2 + (f_0 - (rg)') f_0' + r = 0$$

Оно решалось численно для формы тела $g = h e^{-4r^2} + 7r^2(1-r)$

при различных высотах центрального тела. Спектр наклонов скачка для разных высот центрального тела, включая критическое значение $h_* = 1.425$ (кривые 6 и 8, Рис. 32): Кривые 1-7: $h=0; 1; 1.3; 1.4; 1.42; 1.425; 1.6$. На Рис. 33 показаны две возможные формы скачка уплотнения.

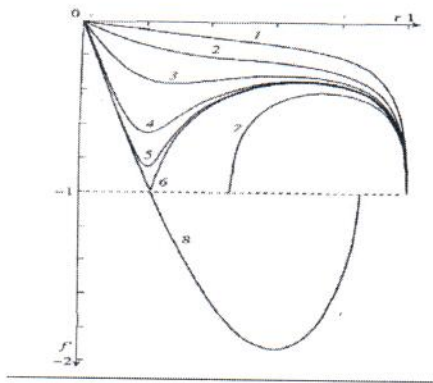


Рис.32

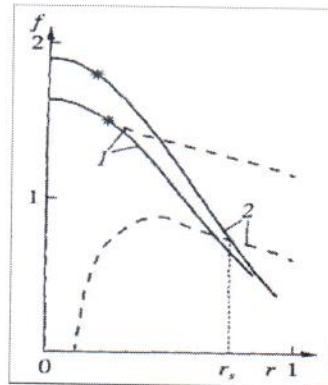


Рис.33 кривые 1,2 - $h=1.425; 1.7$

Вблизи особой точки возникает область взаимодействия между скачком уплотнения, основной частью тонкого ударного слоя и тонкой пристенной струйкой, $\Theta = F'(R), A_2(R)$

$$2\Theta\Theta' - \Theta - 2dR = A''$$

$$\gamma A'' - A = 2(\Theta - kR)$$

$$R \rightarrow -\infty: \quad \Theta = kR - \frac{\Gamma}{(-R)^{\alpha+1}} + \dots, \quad A \rightarrow 0$$

$$R \rightarrow +\infty: \quad \Theta = k_+ R + \dots, \quad A = -2(k_+ - k)R + \dots$$

Решение представлено на Рис.34 для различных приращений высот центрального тела кривые 1-5: $\Gamma = -5, -3, -1.5, -1, -0.99$. Взаимодействие усугубляет процесс разрушения решения при нарастании высоты бугорка.

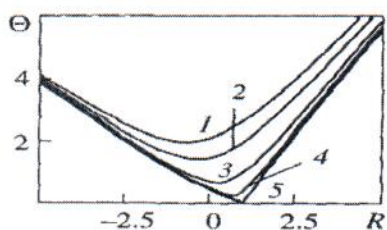


Рис. 34

Заключение

В диссертации разработана методология исследования асимптотическими методами предотрывных и отрывных состояний ламинарных течений жидкости и газа около трехмерных тел при больших числах Рейнольдса. Показано, что гладкие решения уравнений пространственного пограничного слоя стремятся к особому критическому решению (сингулярному пределу) при нарастании соответствующих характерных параметров задачи до точки бифуркации. Изучены критические состояния вязких отрывных пространственных течений жидкости и газа в пограничных слоях с вязко-невязким взаимодействием и их глобальная перестройка при превышении некоторого предельного значения соответствующего параметра задачи. Построены топологические картины предельных линий тока на поверхности рассмотренных тел в пространственных течениях, которые имеют сложную структуру.

Наиболее важные результаты диссертации:

1. Изучены предотрывные режимы обтекания вязкой несжимаемой жидкостью тонкого конуса (угол полураствора $\theta \leq 7,5^\circ$) установленного под углом атаки ($\alpha = 0,6\theta$), удовлетворительно совпавшие количественно с экспериментальными данными ($\theta = 7,5^\circ$, $\alpha = 4,5^\circ$, $Re = 27.000$), приведенными Чженом [1973].
2. Аналитически и численно описаны локальные предотрывные и отрывные состояния несжимаемого пограничного слоя на поверхности вытянутого эллипсоида вращения, установленного под углом атаки ($\alpha \leq 40^\circ$) вблизи подветренной линии симметрии. Результаты подтверждаются известными расчетами пограничных слоев [Себеси и др. 1980, 1981], из которых следует появление в картине поверхностных линий тока точки, с выходящей из нее особой линией, разделяющей области доступности и недоступности для жидких частиц.
3. Исследовано зарождение отрыва потока несжимаемой вязкой жидкости при обтекании тонких осесимметричных тел при воздействии неблагоприятного градиента давления, а также изучено взаимодействие вихревой нити с двухмерным предотрывным пограничным слоем. Учтено ее влияние на зарождение трехмерного отрыва на дне пограничного слоя, при возрастании циркуляции нити.

4. Впервые численно решена классическая задача, сформулированная Дэниэльсом [1977], о смещении взаимодействующих пограничных слоев, стекающих с задней плоской кромки крыла, имеющих разные скорости на внешних границах $0 < u_+ / u_- \leq 1$ и различные коэффициенты напряжения трения $0 < \lambda_+ / \lambda_- \leq 1$. Специально разработанный для данной задачи численный метод проверен Менгалдо и др. [2015] сопоставлением с расчетами полных уравнений Навье-Стокса (расчет обтекания бугорка высотой 5% от толщины пограничного слоя, $M_\infty = 0,5$, $Re = 400.000$).
5. Описано возбуждение неограниченно нарастающих собственных колебаний в локально непараллельном сжимаемом пограничном слое со взаимодействием, обтекающем точку излома выпуклой поверхности.
6. Проанализировано гиперзвуковое невязко-невязкое взаимодействие газа в тонком ударном слое со скачком уплотнения вблизи звуковой точки, при обтекании почти плоского торца круглого цилиндра.

По результатам диссертационной работы можно сформулировать целый ряд практически важных научных задач, включая нестационарные, которые могут быть исследованы только приведенными методами. В частности, созданная в диссертации методология использована автором для анализа турбулентных пространственных пограничных слоев для дозвуковых течений, что подтверждается его последними опубликованными работами.

Чжен П. Отрывные течения // Изд-во МИР, Москва, 1973, 300 с.

Cebeci T., Stewartson K., Khattab A. K. On nose separation // J. Fluid Mech. 1980. V. 97. № 3. P. 435-454.

Cebeci T., Khattab A.K. and Stewartson K. Three-dimensional laminar boundary layers and the o.k. of accessibility // J. Fluid Mech., 1981, Vol. 107, pp. 435-454.

Daniels P.G. Viscous mixing at a trailing edge // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1977. V. 30. Pt. 3. P. 319-342.

Mengaldo G., Kravtsova M., Ruban A.I., and Sherwin S.J. Triple-deck and direct numerical simulation analyses of high-speed subsonic flow over a roughness element // Journal of Fluid Mechanics 774, 311–323 (2015).

Основное содержание диссертации изложено в следующих публикациях

Из списка ВАК:

1. Заметаев В.Б. Особое решение уравнений пограничного слоя на тонком конусе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. №2. С. 65–72.
2. Заметаев В.Б. Локальный отрыв на тонком конусе, предшествующий появлению вихревой пелены // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. №6. С. 21–28.
3. Заметаев В.Б. Формирование особенностей в пространственном пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. №2. С. 58–64.
4. Заметаев В.Б., Сычев Вик. В. О трехмерном отрыве около неровности на поверхности тела вращения // Изв. РАН. МЖГ. 1995. №3. С. 67–79.
5. Zametaev V.B. Marginal separation in three-dimensional flows // Theoret. Comput. Fluid Dynamics. 1996. V. 8. №3. P. 183–200.
6. Заметаев В.Б., Кравцова М.А. Влияние тонкого невязкого продольного вихря на двумерный предотрывный пограничный слой // Изв. РАН, МЖГ, 2003, №2, с. 98-113.
7. Zametaev V.B., Kravtsova M.A. & Ruban A.I. An effective numerical method for solving viscous-inviscid interaction problems. // Phil. Trans. Roy. Soc. A, 2005, v. 363, No.1830, p.1157-1167.
8. Заметаев В.Б., Кравцова М.А. Численное решение задачи о смешении пограничных слоев, стекающих с задней кромки крыла // Изв. РАН, МЖГ, 2006, №5, с. 160-173.
9. Заметаев В.Б., Кравцова М.А. Невязкое взаимодействие в тонком ударном слое при больших числах Маха.// Изв. РАН, МЖГ, 2007, №3, с. 180-192.
10. Заметаев В.Б., Кравцова М.А. Восприимчивость пограничного слоя к внешним звуковым волнам.// Изв. РАН, МЖГ, 2010, №2, с. 35-47.

Публикации в прочих изданиях

11. Zametaev V.B. Hypersonic Thin Shock Layer Theory with Interaction. Marginal regime // Intern. Workshop on Advances in Analytical Methods in Aerodynamics, Proceedings, July 12-14 1993, Miedzyzdroje, Poland.
12. Zametaev V.B. & Kravtsova M.A. 3D interacting flow theory and lateral edge stall. // 20 th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics ICTAM2000, 27 Aug.-2 Sep., Chicago 2000, Technical Report No. 950, Dept of Theoretical and Applied Mechanics, University of Illinois at Urbana-Champaign, (ISSN 0073-5264).

13. *Zametaev V.B., Kravtsova M.A. & Ruban A.I.* Effective numerical method for solving the interacting flows. // New Developments and Applications in Rapid Fluid Flows, LMS Workshop, Proceedings, 14-18 July 2003, Durham, UK.
14. *Zametaev V.B., Kravtsova M.A.* New Numerical Method for Complex Interacting Flows // ICTAM04 Proceedings of 21 International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, August 15-21, 2004, Warsaw, Poland, IPPT PAN.
15. *Zametaev V.B., Kravtsova M.A.* Receptivity of the boundary layer with separation bubble to external sound waves. // ICIAM 07, 2007, Zurich, Switzerland. Proc. Appl. Math. Mech., 7: 3010007–3010008. doi:10.1002/pamm.200701044/.