На правах рукописи

Данилишин Артём Ростиславович

Риск-нейтральная динамика ARIMA-GARCH моделей с ошибками, распределенными по закону S_u Джонсона

Специальность 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва - 2022

Работа выполнена на кафедре исследования операций факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: Голембиовский Дмитрий Юрьевич

доктор технических наук, профессор кафедры исследования операций факультета вычислительной математики и кибернетики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» (г. Москва)

Официальные оппоненты: Крянев Александр Витальевич

доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (г. Москва)

Официальные оппоненты: Шорохов Сергей Геннадьевич

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий факультета физико-математически и естественных наук федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет дружбы народов» (г. Москва)

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования **«Южный федеральный университет»** (ФГАОУ ВО "ЮФУ") (г. Ростов-на-Дону)

Защита состоится «____» ___________ 2022 г. в ___ часов на заседании диссертационного совета 24.1.224.01 на базе ФИЦ ИУ РАН по адресу: 117312, Москва, проспект 60-летия Октября, 9 (конференц-зал, 1-ый этаж).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФИЦ ИУ РАН по адресу: Москва, ул. Вавилова, д. 40 и на официальном сайте ФИЦ ИУ РАН: http://www.frccsc.ru.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба высылать по адресу: 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2, ФИЦ ИУ РАН, диссертационный совет 24.1.224.01.

Автореферат разослан «____» ___________ 2022 г.
Телефон для справок: +7(925) 466-38-70

Учёный секретарь
диссертационного совета 24.1.224.01,
кандидат физико-математических наук, доцент И. В. Смирнов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Моделирование ценовой динамики финансовых активов является одной из актуальных задач финансовой математики. Данная задача возникает, в частности, при оценке справедливой стоимости производных финансовых инструментов и при оценке ценовых рисков. Существует множество моделей, решающих поставленную задачу, которые основаны на одном из двух следующих подходов. Первый подход предполагает использование физической вероятностной меры, а второй – риск-нейтральной (мартингальной) меры. Проблема первого подхода заключается в том, что физическая вероятностная мера является ретроспективной, что затрудняет прогнозирование будущих цен финансовых активов. Поэтому все большую актуальность приобретает использование моделей на основе риск-нейтральной меры. Риск-нейтральная вероятностная мера – это такая мера, для которой стоимость финансового инструмента на текущий момент времени равна математическому ожиданию стоимости цены в будущем, дисконтированному к текущему моменту времени (по безрисковой ставке процента).

Теория расчета премии опционов европейского типа на одномерном полном рынке включает огромное количество публикаций, среди которых в целях диссертации следует выделить работы Блэка Ф. и Шоулза М., Харрисона Дж. и Крепса Д., Кокса Дж., Росса Р., Рубинштейна М., Ширяева А. Н., Кабанова Ю. М., Крамкова Д. О., Мельникова А. В., Фёльмера Г. и Шида А., Волкова С. Н., Крамкова Д. О. В данных исследованиях доказывается, что в полных рынках риск-нейтральная вероятностная мера существует и она единственна, также приводится ее явный вид, что, в свою очередь, позволяет найти стоимость опциона и построить совершенный хеджирующий портфель.

Однако, в случае неполного рынка, риск-нейтральная мера не единственна. Существует несколько основных методов выбора риск-нейтральной меры, большинство из которых основаны на следующих принципах:

1. Максимум индивидуальной функции полезности инвестора;
2. Минимум энтропии мартингальной вероятностной меры;
3. Минимум затрат при несовершенном хеджировании опциона.

В работе “Option pricing in incomplete markets” выводится локальная риск-нейтральная мера, которая отвечает стратегии максимизации индивидуальной функции полезности инвестора, однако в работе рассматривается только случай нормального распределения. В работе “A Discrete Time Equivalent Martingale Measure” доказывается, что расширенный принцип Гирсанова отвечает единственной риск-нейтральной мере, которая получается минимизацией условного математического ожидания квадрата затрат по физической мере.

Если функцию полезности представить в виде прибыли инвестора, то задача минимизации затрат будет соответствовать двойственной задаче, отвечающей максимуму функции полезности. Таким образом, инвестору будет невыгодно отклоняться от оптимальной стратегии, которой будет соответствовать единственная мера, а соответственно и единственное значение премии опционного контракта.

В работе также описывается случай неполного рынка, для которого характерно то, что стоимость хеджирующего портфеля в момент экспирации может оказаться как выше, так и ниже функции обязательств инвестора. Оптимальной стратегией для инвестора будет та, которая соответствует минимальному отклонению стоимости портфеля базовых активов от функции обязательств. Данной стратегии отвечает значение начального капитала инвестора, равное математическому ожиданию функции обязательств по риск-нейтральной мере, дисконтированной по безрисковой ставке процента.

Объединяя результаты вышеупомянутых работ, можно заключить, что оптимальной, с точки зрения инвестора, будет являться мера, получаемая с помощью расширенного принципа Гирсанова, и, в условиях неполного рынка, стоимости премий опционных контрактов будут оцениваться с помощью, данной риск-нейтральной меры. Однако, во всех работах, посвященных расширенному принципу Гирсанова, не рассматриваются случаи, когда производящая функция моментов для распределения не определена, что сильно ограничивает применение расширенного принципа Гирсанова для оценки премий опционов. Существуют работы, в которых используются подходы построения риск-нейтральной меры, включающие использование приближения производящей функции моментов (до 4-го порядка). Недостатком данных методов является их неточность, из-за чего требуется проводить дополнительные исследования оценки точности приближения функции степенным рядом (оценка остатка ряда) и устойчивости метода трансформации вероятностной меры. Поэтому разработка методов нахождения риск-нейтральных мер для таких случаев является актуальной задачей.

В работе, посвященной расширенному принципу Гирсанова, рассматривается случай многомерного случайного процесса, что позволяет находить риск-нейтральную меру для моделирования совместной динамики множества базовых активов. На практике оценивание параметров таких моделей как ARIMA-GARCH для многомерного случайного процесса сопряжено с большими вычислительными сложностями. Это связано с тем, что приходится решать оптимизационную задачу для параметров всех уравнений моделей базовых активов, а также моделей их ковариаций. Данная проблема может быть решена с помощью одного из методов сокращения размерности – метода главных компонент, либо метода независимых компонент.

Метод главных компонент позволяет выражать каждый случайный процесс через линейную комбинацию независимых компонент. В силу того, что в новой системе координат компоненты получаются статистически независимыми, оценку параметров можно проводить отдельно для каждой компоненты. В результате возникает вопрос о возможности построения риск-нейтральной динамики для базовых активов через линейную комбинацию динамик главных компонент. При выводе риск-нейтральной динамики в случае одного актива используют понятие безрисковой процентной ставки базового актива, которое лежит в основе безарбитражности, однако главные компоненты не имеют экономического смысла, поэтому для них не существует безрисковая ставка. На данный момент, в современной литературе не представлены методы, объединяющие методы декомпозиции случайных процессов и нахождение риск-нейтральных мер. Разработка таких подходов является актуальной.

Предмет исследования – риск-нейтральная динамика случайных процессов, имеющих распределение S_u Джонсона.

Целью исследования является построение риск-нейтральной меры для ARIMA-GARCH случайного процесса с ошибками, имеющими распределение S_u Джонсона, и использование этой меры для расчета стоимости опционов. При помощи метода главных компонент данный результат обобщается на случай многомерного распределения базовых активов.

Задачи исследования:

1. Поиск производящей функции моментов для распределения S_u Джонсона в виде степенного ряда, анализ данного ряда на сходимость.
2. Построение модификации расширенного принципа Гирсанова для получения моментов случайного процесса относительно риск-нейтральной меры.
3. Поиск коэффициентов модели ARIMA-GARCH, обеспечивающих риск-нейтральную динамику случайного процесса (одномерный случай).
4. Применение метода главных компонент и модификации расширенного принципа Гирсанова для нахождения коэффициентов моделей ARIMA-GARCH, обеспечивающих риск-нейтральную динамику случайного многомерного процесса.

5. Разработка пакета компьютерных программ для численной оценки справедливой стоимости опционов относительно физической и риск-нейтральной меры.
6. Разработка пакета компьютерных программ для численной оценки VaR (value at risk, стоимостная мера риска) портфеля опционов относительно физической и риск-нейтральной меры.
7. Проведение численных экспериментов для оценки эффективности полученной теории.

Методы исследования. Основные результаты получены методами теории рядов, теории меры, теории оптимизации, теории вероятностей, эконометрики.

Научная новизна. 1) Осуществлена модификация расширенного принципа Гирсанова, в которой вместо логарифмических приращений рассматриваются относительные приращения случайного процесса. 2) На основе модификации расширенного принципа Гирсанова получена новая риск-нейтральная вероятностная мера позволяющая совершать переход от физической меры случайных процессов к их риск-нейтральным аналогам. Данная мера обобщает результаты расширенного принципа Гирсанова на случай распределений, не имеющих производящей функции моментов. 3) Показано, что полученная вероятностная мера на основе модификации расширенного принципа Гирсанова дает возможность оценивать моменты любого порядка относительно риск-нейтральной меры для случайных процессов, функции плотности распределения которых не имеют производящей функции моментов. 4) На основе модификации расширенного принципа Гирсанова получена аналитическая форма ARIMA-GARCH модели случайного процесса, с ошибками, распределенными по закону S_u Джонсона, обеспечивающая риск-нейтральную динамику процесса. 5) На основе модификации расширенного принципа Гирсанова и метода главных компонент получен метод, позволяющий моделировать совместную риск-нейтральную динамику случайных процессов.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Модификация расширенного принципа Гирсанова. Риск-нейтральная мера, полученная на основе модификации расширенного принципа Гирсанова. Аналитический вид модели ARIMA-GARCH на основе риск-нейтральной меры для одномерного и многомерного случайного процесса. Результаты опубликованы в [1].
2. Модификация численного метода Монте-Карло (на основе метода главных компонент) для поиска цен/мер риска на основе риск-нейтральной динамики базовых активов. Результаты опубликованы в [3].

3. Программный комплекс “Калькулятор расчета стоимости и риск-метрик опционов на основе риск-нейтральной динамики базовых активов” для численного решения задачи поиска цен/мер риска опционных контрактов на основе риск-нейтральных цен базовых активов. Результаты экспериментов сравнения оценки премий опционов с рыночными ценами. Результаты экспериментов бэк-тестирования оценки однодневного VaR портфеля опционных контрактов Результаты опубликованы в [2;3].

Эти положения соответствуют областям исследования 2,5,6 из паспорта специальности 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Практическая значимость. Работа носит как теоретический, так и практический характер. Разработанные методы моделирования риск-нейтральной динамики случайных процессов позволяют оценивать справедливую стоимость производных финансовых инструментов, а также их риски. Проведенные численные эксперименты показывают эффективность разработанных методов. Данные методы могут быть использованы в крупных финансовых организациях.

Достоверность результатов подтверждается строгими математическими рассуждениями и численными экспериментами.

Апробация результатов исследования. Основные результаты работы докладывались на:

- Научном семинаре кафедры Исследования операций ВМК МГУ.
- Научном семинаре кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ.
- Ломоносов-2020 секция «Вычислительная математика и кибернетика».
- Научная конференция «Тихоновские чтения 2020».
- Ломоносовские чтения 2020. «Секция вычислительной математики и кибернетики».

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных изданиях ([1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]). Первые две статьи опубликованы в журнале, входящем в список SCOPUS, третья статья - в журнале, входящем в список ВАК. Получено Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и двух приложений. Полный объем диссертации составляет 126 страниц с 54 рисунками и 38 таблицами. Список литературы содержит 91 наименование.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулированы цели и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Первая глава посвящена описанию основных положений расширенного принципа Гирсанова. В рамках данной модели рассматривается логарифмическая доходность цен базовых активов $Y_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$, где S_t – стоимость базового актива в момент времени t. При переходе к дисконтированным ценам базового актива $\left(\widetilde{S_t} = e^{-rt}S_t\right)$, где $r -$ безрисковая процентная ставка по базовому активу, условие риск-нейтральности имеет следующий вид: $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\widetilde{S_t}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right] = \tilde{S}_{t-1}$, где $\mathbb{E}^{\mathbb{P}} -$ математическое ожидание относительно меры $\mathbb{P}$, $\mathcal{F}_{t-1} -$ фильтрация относительно меры $\mathbb{P}$. Динамика дисконтированных цен базового актива описывается случайным процессом $\widetilde{S_t} = \tilde{S}_{t-1}e^{-r+\ln\left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{Y_t}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]\right)}W_t = \tilde{S}_{t-1}e^{v_t}W_t$, где $W_t = \frac{M_t}{M_{t-1}}$, а M_t является мартингальным случайным процессом. В расширенном принципе Гирсанова утверждается, что случайный процесс Z_t, соответствующий производной Радона-Никодима $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_{t-1}}$, определяется соотношением

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_{t-1}} = Z_t = \prod_{k=1}^{t}\frac{g_{W_k}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right)e^{v_k}}{g_{W_k}^{\mathbb{P}}\left(e^{-v_k}\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right)}, \tag{1}$$

где $g_{W_k}^{\mathbb{P}}$ – условная (относительно $\mathcal{F}_{k-1}$) плотность распределения величины W_k по мере $\mathbb{P}$, обеспечивает риск-нейтральную динамику для $\tilde{S}_t$ в новой мере $\mathbb{Q}$. Таким образом, процесс $\tilde{S}_t$ в новой мере $\mathbb{Q}$ относительно старой $\mathbb{P}$ должен являться мартингалом.

Для случайного процесса Y_k с условной плотностью распределения $f_{Y_k}^{\mathbb{P}}$ производная Радона-Никодима примет следующий вид;

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_{t-1}} = Z_t = \prod\nolimits_{k=1}^{t}\frac{f_{Y_k}^{\mathbb{P}}\left(Y_k - r + \ln\left(M_{Y_k|\mathcal{F}_{k-1}}(1)\right)\right)}{f_{Y_k}^{\mathbb{P}}(Y_k)}, \tag{2}$$

где $M_{Y_k|\mathcal{F}_{k-1}}(1)$ – значение условной производящей функции моментов в точке 1. Для перехода к распределению по мере $\mathbb{Q}$ используется производящая функция моментов

$$M_{Y_t}^{\mathbb{Q}}(c) = e^{-c\left(-r+\ln\left(M_{Y_k|\mathcal{F}_{t-1}}(1)\right)\right)}M_{Y_t}^{\mathbb{P}}(c). \tag{3}$$

Формула (3), полученная на основе формул (1) и (2), позволяет перейти к случайному процессу относительно риск-нейтральной вероятностной меры. В качестве случайного процесса рассматривался процесс $ARIMA(p,d,q)-GARCH(P,Q)$, являющийся комбинацией моделей ARIMA (autoregressive integrated moving average (интегрированная модель авторегрессии и скользящего среднего)) и GARCH (AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity (обобщенная авторегрессионная условная гетероскедастичность)):

$$\begin{cases} \Delta^d Y_t = m_t + \sqrt{h_t}\varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim iid(0,1); \\ m_t = \mathbb{E}[\Delta^d Y_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \phi_0 + \phi_1\Delta^d Y_{t-1} + \cdots + \phi_p\Delta^d Y_{t-p} + \theta_1\sqrt{h_{t-1}}\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\sqrt{h_{t-q}}\varepsilon_{t-q}; \\ h_t = Var[\Delta^d Y_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \cdots + \alpha_P h_{t-P} + \beta_1 h_{t-1}\varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \beta_Q h_{t-Q}\varepsilon_{t-Q}^2. \end{cases}$$

В качестве примера приведены известные формулы ARIMA-GARCH случайных процессов относительно риск-нейтральной вероятностной меры для ошибок, имеющих обобщенное экспоненциальное бета распределение второго типа:

$$\begin{gathered} \mathrm{Y_t} = r - ln\frac{B\left(\alpha+\delta_t\bar{\delta},\beta-\delta_t\bar{\delta}\right)}{B(\alpha,\beta)} + \delta_t\bar{\delta}\varpi(\alpha,\beta) + \delta_t\varepsilon_t, \\ \varepsilon_t|_{\mathcal{F}_{t-1}} \sim EGB2\left(\alpha,\beta,\bar{\delta},\bar{\mu}\right), \\ \bar{\delta} = 1/\sqrt{l(\alpha,\beta)}, \\ \bar{\mu} = -\frac{\varpi(\alpha,\beta)}{\sqrt{l(,\beta)}}, \end{gathered} \tag{4}$$

и нормальное распределение:

$$\begin{gathered} \mathrm{Y_t} = r - \frac{1}{2}\delta_t^2 + \delta_t\varepsilon_t, \\ \varepsilon_t|_{\mathcal{F}_{t-1}} \sim N(0,1). \end{gathered} \tag{5}$$

Во второй главе рассматривается вопрос о возможности построения риск-нейтральной вероятностной меры для распределений, не имеющих производящей функции моментов. В качестве такого распределения было рассмотрено распределение S_u Джонсона (четырех-параметрическое вероятностное распределение). Для данного распределения была получена производящая функция моментов в виде степенного ряда

$$M_Y(c) = e^{\xi c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c\lambda}{2}\right)^n \frac{1}{n!}\sum\nolimits_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}C_n^j\, e^{\frac{(n-2j)^2}{2\delta^2}+\frac{\gamma(n-2j)}{\delta}}. \tag{6}$$

Также проведен анализ сходимости данного степенного ряда, и показано, что ряд (6) имеет нулевой радиус сходимости. Использование выражения расширенного принципа Гирсанова

(3) предполагает существование значений производящей функции моментов в точке 1, что делает невозможным использование формулы (3) для распределения S_u Джонсона.

Далее приводится модификация расширенного принципа Гирсанова, позволяющая избавиться от необходимости существования производящей функции моментов моделируемого случайного процесса. Для этого предлагается рассматривать доходность цен базовых активов $\widetilde{Y_t} = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1$ (вместо логарифмической доходности $Y_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$), а также заменить выражение $\left(\widetilde{S_t} = e^{-rt} S_t\right)$ на дискретный аналог $\left(\widetilde{S_t} = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-nt} S_t\right)$, где n – количество начислений безрисковой ставки в году (в рамках диссертации значение n = 260). Тогда динамика дисконтированных цен базовых активов $\tilde{S}_t = \tilde{S}_{t-1} e^{v_t} W_t$ примет вид $\widetilde{S_t} = \tilde{S}_{t-1}(1 + \mu_t) W_t$, где $\mu_t = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\widetilde{Y_t} + 1 \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right]}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^n} - 1$. Теоремы 1, 2, позволяют получить риск-нейтральную вероятностную меру при сделанных предположениях модификации расширенного принципа Гирсанова. Утверждение 1 показывает, как преобразуется производящая функция моментов при переходе к риск-нейтральной вероятностной мере.

Теорема 1.

Процесс Z_t обеспечивает риск-нейтральную динамику для $\widetilde{S_t}$ по новой мере $\mathbb{Q}$ относительно старой $\mathbb{P}$ [1],

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_{t-1}} = Z_t = \prod_{k=1}^{t} \frac{g_{W_k}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right)(1 + \mu_k)}{g_{W_k}^{\mathbb{P}}\left((1 + \mu_k)^{-1} \frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right)}. \tag{7}$$

Теорема 2.

Случайный процесс Z_t, выраженный через условную плотность распределения $g_{W_t}^{\mathbb{P}}$ случайного процесса W_t, можно представить через условную плотность распределения $f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}$ по фильтрации $\mathcal{F}_{t-1}$ случайного процесса $\widetilde{Y}_t$ [1]:

$$\prod_{k=1}^{t} \frac{g_{W_k}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right)(1 + \mu_k)}{g_{W_k}^{\mathbb{P}}\left((1 + \mu_k)^{-1} \frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right)} = \prod_{k=1}^{t} \frac{f_{\tilde{Y}_k}^{\mathbb{P}}(\widetilde{Y}_k(1 + \mu_k) + \mu_k)(1 + \mu_k)}{f_{\tilde{Y}_k}^{\mathbb{P}}(\widetilde{Y}_k)}. \tag{8}$$

Утверждение 1.

$$M_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{Q}}(c) = e^{-\frac{\mu_t c}{1+\mu_t}} M_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}\left(\frac{c}{1 + \mu_t}\right). \tag{9}$$

Выражение (9), полученное на основе выражений (7), (8), является аналогом выражения (3), но уже не требует существования производящей функции моментов в заданной точке и позволяет получать динамику случайных процессов относительно риск-нейтральной вероятностной меры. В завершении главы приводится вывод ARIMA-GARCH случайного процесса относительно риск-нейтральной меры с ошибками, распределенными по закону S_u Джонсона:

$$\tilde{Y}_t = \left(1+\frac{r}{n}\right)^n - 1 + \delta_t \frac{\left(1+\frac{r}{n}\right)^n}{1+m_t}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_{t|\mathcal{F}_{t-1}\sim JS(\tilde{\xi},\tilde{\lambda},\gamma,\delta)},$$
$$\tilde{\xi} = \tilde{\lambda} e^{\frac{1}{2\delta^2}} \sinh\left(\frac{\gamma}{\delta}\right),$$
$$\tilde{\lambda} = \sqrt{2}\left(\left(e^{\frac{1}{\delta^2}}-1\right)\left(e^{\frac{1}{\delta^2}}\cosh\left(\frac{2\gamma}{\delta}\right)+1\right)\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Результаты этой главы отражены в публикации [1].

Третья глава посвящена совместному риск-нейтральному моделированию нескольких случайных процессов, а также модификации численного метода Монте-Карло для решения задачи оценивания справедливой стоимости опционных контрактов и их мер риска. В качестве вспомогательного инструмента был рассмотрен метод главных компонент, который позволяет перейти от исходных случайных процессов к относительно небольшому числу некоррелированных компонент, каждая из которых может затем моделироваться независимо от других.

Рассматривается случайный процесс $Y_t^j = \ln\left(\frac{S_t^j}{S_{t-1}^j}\right)$, где $j = 1, \dots, l$ —номер случайного процесса в общей совокупности. Используя метод главных компонент, можно получить компоненты X_t^i, которые при помощи матрицы коэффициентов $A = \alpha_j^i$ приближенно восстанавливают динамику исходного случайного процесса: $Y_t^j = \sum_{i=1}^m \alpha_j^i X_t^i$, где m —общее количество компонент X_t^i в случае сокращения размерности исходного случайного вектора $m < l$. Каждая компонента (случайный процесс) описывается моделью $ARIMA(p,d,q) - GARCH(P,Q)$:

$$\begin{cases} X_t^i = m_t^i + \epsilon_t^i \\ \epsilon_t^i = \sqrt{h_t^i}\varepsilon_t^i, \quad \varepsilon_t^i \big| \sim iid(0,1) \\ m_t^i = \phi_0^i + \phi_1^i X_{t-1}^i + \dots + \phi_p^i X_{t-p}^i + \theta_1^i \epsilon_{t-1}^i + \dots + \theta_q^i \epsilon_{t-q}^i \\ h_t^i = \alpha_0^i + \alpha_1^i h_{t-1}^i + \dots + \alpha_P^i h_{t-P}^i + \beta_1^i {\epsilon_{t-1}^i}^2 + \dots + \beta_Q^i {\epsilon_{t-Q}^i}^2 \end{cases} \tag{11}$$

Из $Y_t^j = \sum_{i=1}^m \alpha_j^i X_t^i$, системы (11) и некоррелированности компонент очевидны следующие соотношения:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[Y_t^j \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\textstyle\sum_{i=1}^m \alpha_j^i X_t^i \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] = \sum_{i=1}^m \alpha_j^i \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[X_t^i \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] = \sum_{i=1}^m \alpha_j^i m_t^i,$$
$$Var^{\mathbb{P}}\left[Y_t^j \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] = Var^{\mathbb{P}}\left[\textstyle\sum_{i=1}^m \alpha_j^i X_t^i \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] = \sum_{i=1}^m {\alpha_j^i}^2 Var^{\mathbb{P}}\left[X_t^i \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] = \sum_{i=1}^m {\alpha_j^i}^2 h_t^i. \tag{12}$$

Из выражений (4), (5) видно, что случайная ошибка $ARIMA - GARCH$ модели при преобразовании расширенного принципа Гирсанова не меняется, таким образом можно получить закон линейного преобразования ошибки базового актива через ошибки компонент. Для этого заметим, что из того, что $Y_t^j = \sum_{i=1}^m \alpha_j^i X_t^i$, следует, что базовый актив будет также описываться $ARIMA - GARCH$ процессом

$$Y_t^j = M_t^j + \Omega_t^j E_t^j,$$

где M_t^i и Ω_t^i соответствуют выражениям (12). Тогда очевидно, что случайная ошибка модели динамики базового актива имеет вид

$$E_t^j = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_j^i \sqrt{h_t^i} \varepsilon_t^i}{\sqrt{\sum_{i=1}^m {\alpha_j^i}^2 h_t^i}}. \tag{13}$$

Легко убедиться, что полученная ошибка имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию равную единице. Таким образом, выполняется условие ошибок $ARIMA - GARCH$ модели $\left(\varepsilon_t^i \middle| \sim iid(0,1)\right)$. Объединяя выражения (3), (12), (13), получим $ARIMA(p,d,q) - GARCH(P,Q)$ модель динамики базовых активов Y_t^j, относительно риск-нейтральной меры:

$$Y_t^j = -\Lambda_{\mathrm{t}}^j + \sum_{i=1}^m \alpha_j^i m_t^i + \sqrt{\sum_{i=1}^m {\alpha_j^i}^2 h_t^i}\, E_t^j, \quad E_t^j = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_j^i \sqrt{h_t^i} \varepsilon_t^i}{\sqrt{\sum_{i=1}^m {\alpha_j^i}^2 h_t^i}}\Bigg|_{\mathcal{F}_{t-1}} \sim iid(0,1). \tag{14}$$

Подставляя в выражение (14) $\Lambda_{\mathrm{t}}^j = -r_j + \ln\left(M_{Y_t^j}^{\mathbb{P}}(1)\right)$, можно получить риск-нейтральную динамику базовых активов по динамикам компонент. Однако в силу того, что компоненты не являются независимыми (они линейно независимыми), не представляется возможным вывести аналитический вид производящей функции моментов Y_t^j, так как требуется знать совместную плотность распределения компонент, которая отлична от произведения маргинальных плотностей. Для решения данной проблемы были использованы результаты главы 2. Применение выражения (9) позволяет получить условные математическое ожидание и дисперсию в риск-нейтральной мере [3]:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{Y}_t^j \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] = \left(1+\frac{r_j}{n}\right)^n - 1,$$

$$Var^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{Y}_t^j \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] = \left(\frac{\left(1+\frac{r_j}{n}\right)^n}{1+\sum_{i=1}^m \alpha_j^i m_t^i}\right)^2 \sum_{i=1}^m {\alpha_j^i}^2 h_t^i.$$

Тогда уравнение динамики базовых активов (14) примет вид

$$\tilde{Y}_t^j = \left(1+\frac{r_j}{n}\right)^n - 1 + \left(\frac{\left(1+\frac{r_j}{n}\right)^n}{1+\sum_{i=1}^m \alpha_j^i m_t^i}\right) \sqrt{\sum_{i=1}^m {\alpha_j^i}^2 h_t^i}\, E_t^j. \tag{15}$$

Выражение (15) уже не зависит от производящей функции моментов, что дает возможность, зная оценки параметров $ARIMA - GARCH$ моделей главных компонент, безрисковые процентные ставки базовых активов, частоту их начисления (зависит от шага по времени, рассматриваемого временного ряда) и коэффициенты матрицы перехода от базовых активов к компонентам, получить риск-нейтральную динамику цен базовых активов.

Основным результатом главы является параграф 3.4 “Алгоритм численного решения задачи генерирования риск-нейтральных цен базовых активов”, который позволяет совместно моделировать риск-нейтральную динамику цен базовых активов, а также понижать размерность задачи генерирования сценариев для метода Монте-Карло, что значительно увеличивает скорость работы алгоритма.

Результаты этой главы отражены в публикации [3].

Глава 4 посвящена решению прикладной задачи, встречающейся в финансовой математике, а именно оцениванию справедливой стоимости опционных контрактов европейского типа. Для этого была реализован программный продукт, созданный в среде программирования RStudio с применением оптимизационной библиотеки “Rsolnp”, предназначенной для решения нелинейных оптимизационных задач методом множителей Лагранжа, и пакета “MASS”, решающего задачи прикладной статистики.

Базовый актив	Даты экспирации	Страйк	Валюта
Индекс DAX	22.06.19; 22.12.2023	9 400 - 13 000 пунктов (шаг 200)	Евро
Индекс SMI	22.06.19; 22.12.2020	2 400 - 2 590 пунктов (шаг 10)	Швейц. франк
GBP / USD	22.06.19; 22.03.2020	124 - 133 (шаг 1)	Доллар США
GBP / EUR	22.06.19; 22.03.2020	111 до 119 (шаг 1)	Евро
Light Sweet Crude Oil	20.07.19; 22.06.2020	51,0 - 55,5 (шаг 0,5)	Доллар США
Natural Gas	20.07.19; 22.07.2020	2 250 - 2 500 (шаг переменный)	Доллар США

Таблица 1. Набор опционных контрактов (оценка справедливой стоимости).

В качестве исходных данных были выбраны опционы на шесть разных базовых активов (табл. 1) с разными валютами и сроками погашения. Расчет проводился на 03.06.2019 года.

Оценка справедливой стоимости опционных контрактов проводилась по методу Монте-Карло. Европейские CALL и PUT опционы с ценой исполнения X и стоимостью базового актива S_T в день экспирации T характеризуются функциями выплат $b_c(S_T, X) = \max(S_T - X, 0)$, $b_p(S_T, X) = \max(X - S_T, 0)$. Тогда стоимость опционов определяется как среднее значение соответствующей функции выплаты относительно риск-нейтральной меры $\mathbb{Q}$, приведенное к текущему моменту времени:

$$CALL/PUT = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[b_{c/p}(S_T, X)\right]}{(1+r)^T} = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[b_{c/p}(S_T, X)\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right]}{(1+r)^T},$$

где $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ –производная Радона-Никодима риск-нейтральной меры (в рамках данной работы это мера, полученная на основе расширенного принципа Гирсанова (4), (5) или модификации расширенного принципа Гирсанова (10)) относительно физической меры $\mathbb{P}$. Метод Монте-Карло позволяет по реализациям построенного $ARIMA - GARCH$ процесса произвести оценку среднего значения относительно риск-нейтральной меры $\mathbb{Q}$:

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} b_{c/p}(S_T, X)\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(m) \xrightarrow[M\to\infty]{P} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[b_{c/p}(S_T, X)\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right]. \tag{16}$$

Число траекторий реализации $ARIMA - GARCH$ процесса $M = 100\,000$ для опционов с датой экспирации в 2020 году и $M = 10\,000$ для остальных опционов. Эффективность каждой $ARIMA - GARCH$ модели оценивается по абсолютной ошибке (AE (absolute error))

$$AE(Moneyness) = |call^m/put^m(Moneyness) - call/put(Moneyness)|,$$

где $\frac{CALL^m}{PUT^m}$ – рыночные котировки опциона CALL или PUT, $Moneyness = \frac{X}{S_0}$ –денежность опциона.

Рисунки (1) – (4) демонстрируют то, что модель ARIMA-GARCH с ошибками, распределенными по закону S_u, более точна по сравнению с моделями, построенными на основе классического принципа Гирсанова. Это становится особо заметно для опционных контрактов с датой экспирации 2023 года. Также по графикам видно, что результаты, полученные на основе расширенного принципа Гирсанова и модификации расширенного принципа Гирсанова для моделей ARIMA-GARCH с одинаковой ошибкой распределения, схожи (линии ARIMA-GARCH-N и ARIMA-GARCH-N-mod). Это говорит, о том, что риск-нейтральная мера, полученная в главе 2, обеспечивает результаты не хуже, чем мера обычного расширенного принципа Гирсанова (серая линия совпадает с оранжевой).

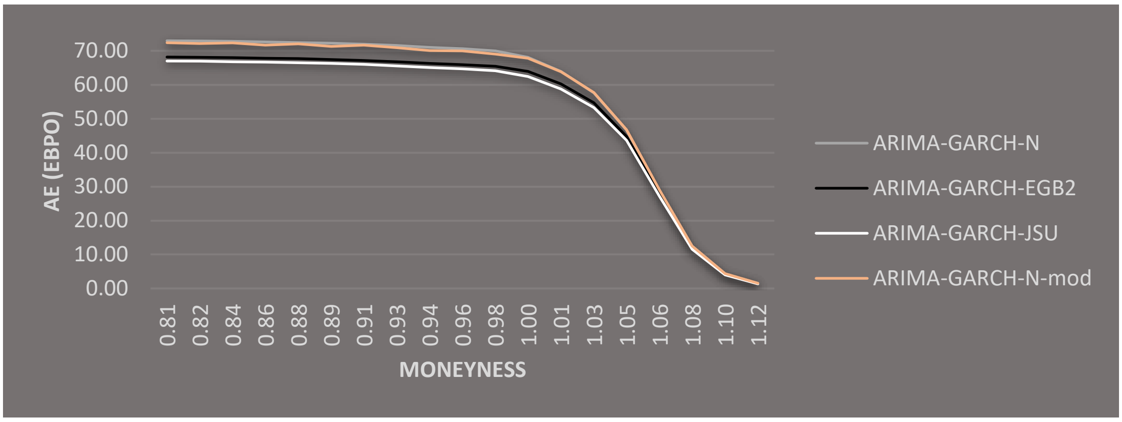

Рисунок 1. Абсолютные ошибки цен опционов CALL на индекс DAX (дата экспирации 22 июня 2019 года).

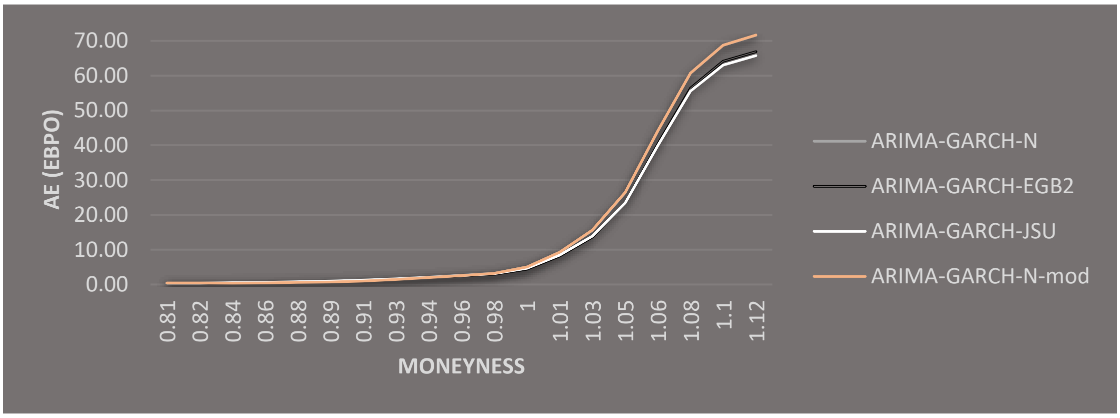

Рисунок 2. Абсолютные ошибки цен опционов PUT на индекс DAX (дата экспирации 22 июня 2019 года).

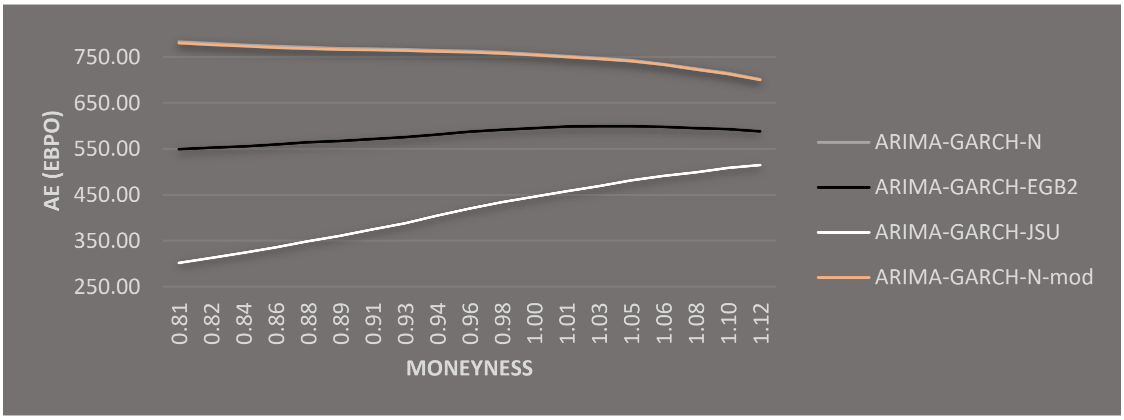

Рисунок 3. Абсолютные ошибки цен опционов CALL на индекс DAX (дата экспирации 22 декабря 2023 года).

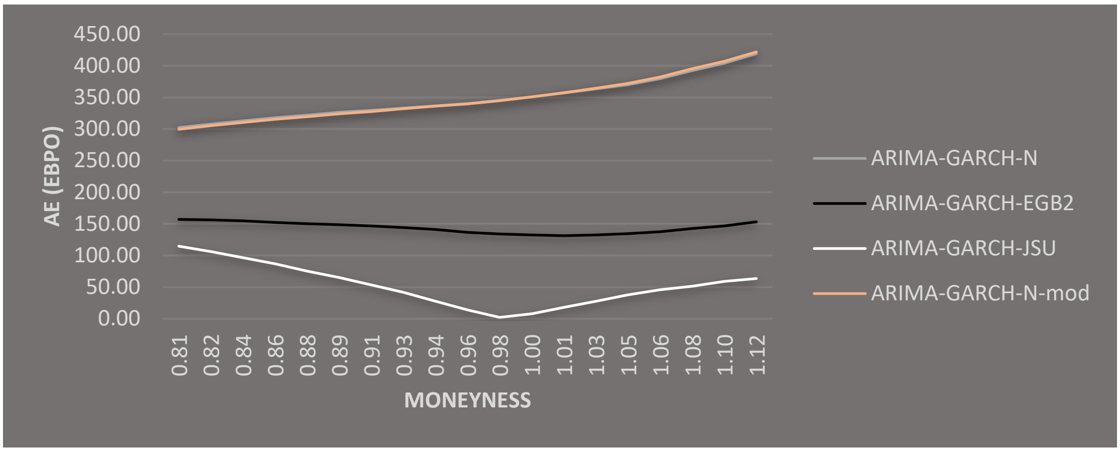

Рисунок 4. Абсолютные ошибки цен опционов put на индекс DAX (дата экспирации 22 декабря 2023 года).

Результаты данной главы отражены в публикации [2].

В **пятой главе** применяются результаты третьей главы для решения прикладной задачи риск-менеджмента. В рамках данного примера необходимо оценить однодневный VaR портфеля пяти опционных контрактов на пять различных базовых активов (табл. 2) относительно физической и риск-нейтральной вероятностной меры и сравнить эффективность данных моделей. В качестве распределения ошибок также рассматривалось распределение S_u Джонсона.

Базовый актив	Цена исполнения	Дата исполнения	Валюта	Тип контракта
Индекс DAX	10750	19.06.2020	Евро	CALL
Индекс SMIM	2340	19.06.2020	Швейц. франк	PUT
GBP/USD	128	06.05.2020	Доллар США	PUT
Natural Gas	2,25	25.06.2020	Доллар США	CALL
Light Sweet Crude Oil	70	16.11.2022	Доллар США	CALL

Таблица 2. Набор опционных контрактов (оценка однодневного VaR).

При использовании метода главных компонент было установлено, что первые две компоненты описывают 67,4% дисперсии цен базовых активов, а три первые компоненты - 82,8%. Для задачи оценивания VaR портфеля были использованы три первые главные компоненты.

Однодневный VaR портфеля опционных контрактов оценивался по методу Монте-Карло. Для этого генерировались траектории главных компонент на основе ARIMA-GARCH моделей, начиная с момента времени t (текущий момент времени) до момента экспирации. По формуле (15) делался переход к риск-нейтральной динамике базовых активов. По полученным траекториям рассчитывались справедливые стоимости опционных контрактов (16) на момент времени $t+1$ и складывались в одной валюте (Евро). Данная процедура выполнялась 10 000 раз, затем полученная выборка сортировалась по возрастанию и в качестве значения VaR с уровнем значимости α выбиралось значение из выборки с номером $[N \times \alpha] + 1,$ где $[x] -$ наибольшее целое число, не превосходящее x.

Для проверки состоятельности модели проводился тест Купика. Суть теста заключается в проведении расчетов меры риска VaR портфеля активов для заданного исторического промежутка времени и сравнении полученных результатов с рыночными данными стоимости портфеля (бэк-тестирование). В качестве примера был рассмотрен временной промежуток с 19 августа 2019 года по 23 марта 2020 года (количество рабочих дней между ними составило 150). Тест Купика позволяет сравнить модельную и эмпирическую частоту событий, когда историческая стоимость портфеля активов опускалась ниже значения VaR. Если N −объем выборки, K −количество превышений VaR, $\alpha_0 = K/N$ −эмпирическая частота превышений кривой VaR, тогда нулевая гипотеза теста Купика: $\mathbb{H}_0: \alpha_0 = \alpha,$ против $\mathbb{H}_1: \alpha_0 \neq \alpha$. Проверка гипотезы осуществляется при помощи статистики $S_{Cup} = -2\ln((1-\alpha)^{N-K}\alpha^K) + 2\ln((1-\alpha_0)^{N-K}\alpha_0^K)$, которая, в случае истинности нулевой гипотезы имеет распределение $\chi^2(1)$.

Бэк тестирование проводилось для 95% и 99% однодневного VaR портфеля опционов. В таблице 3 представлены результаты теста Купика для уровня значимости 95%. Из таблицы видно, что обе модели проходят бэк-тестирование (значение статистики находится между критическими значениями). Для 95% однодневного VaR обе модели показывают примерно одинаковый результат. Однако в случае 99% VaR модель, построенная на основе риск-нейтральной меры, показывает результаты существенно лучше.

	Модель	**Количество превышений VaR**	**Значение статистики**	**Нижнее критическое значение**	**Верхнее критическое значение**	**P-Value**
VaR 95%	Риск-нейтральная мера	7	0,0359	0,0010	5,0239	0,8498
	Физическая мера	8	0,0344			0,8529
VaR 99%	Риск-нейтральная мера	2	0,1524			0,6962
	Физическая мера	4	2,8890			0,0892

Таблица 3. Результаты теста Купика для уровня значимости $\tilde{\alpha} = 95\%$.

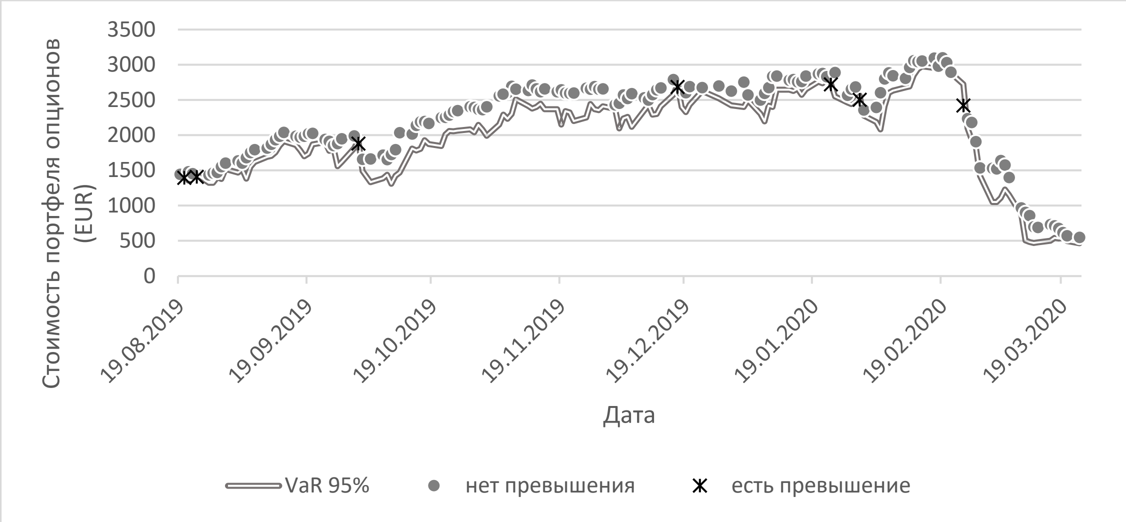

Рисунок 5. Результаты оценки однодневного VaR 95% портфеля активов (риск-нейтральная мера).

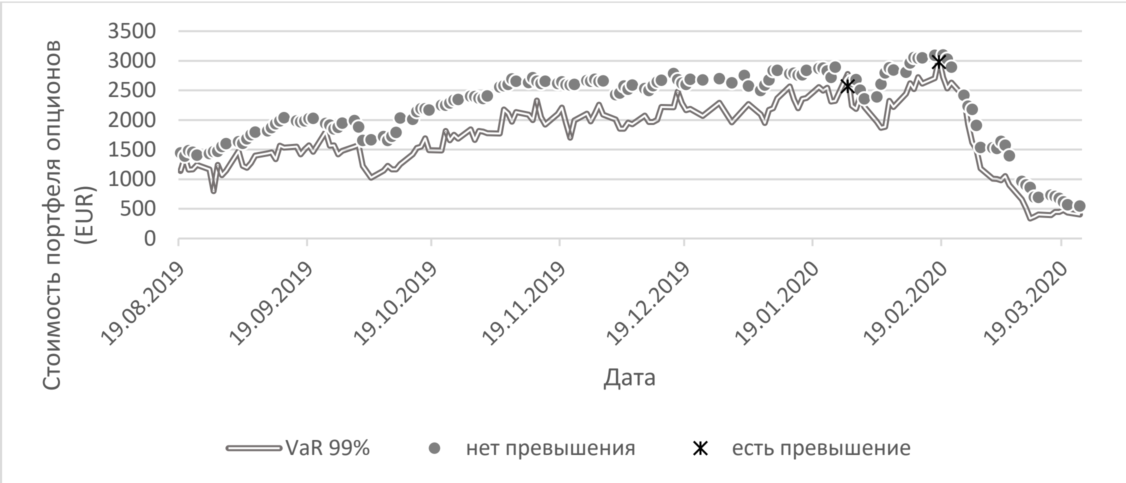

Рисунок 6. Результаты оценки однодневного VaR 99% портфеля активов (риск-нейтральная мера).

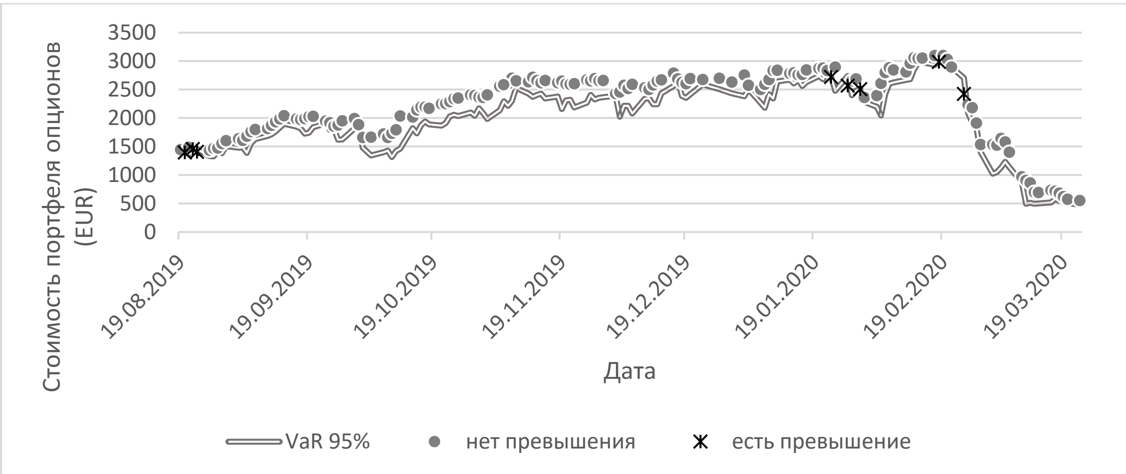

Рисунок 7. Результаты оценки однодневного VaR 95% портфеля активов (физическая мера).

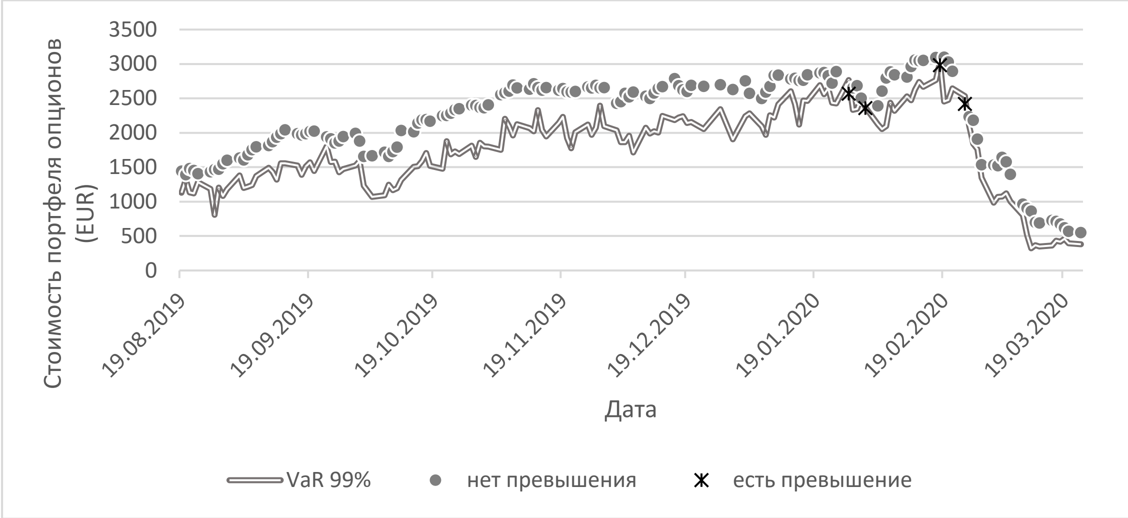

Рисунок 8. Результаты оценки однодневного VaR 99% портфеля активов (физическая мера).

Результаты данной главы отражены в публикации [3].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Предложена модификация расширенного принципа Гирсанова, позволяющая строить риск-нейтральные вероятностные меры для распределений, не имеющих производящей функции моментов. Полученная теория применена к распределению S_u Джонсона, производящая функция моментов которого имеет вид расходящегося степенного ряда. Получена аналитическая форма $ARIMA-GARCH$ случайного процесса с ошибками, распределенными по закону S_u Джонсона, относительно риск-нейтральной меры.
2. Предложен способ применения расширенного принципа Гирсанова к методу главных компонент, позволяющий снижать размерность исходной задачи и независимо моделировать случайные процессы относительно риск-нейтральной вероятностной меры.
3. При помощи модификации расширенного принципа Гирсанова выведена аналитическая форма случайных процессов относительно риск-нейтральной вероятностной меры, выраженных через главные компоненты. Предложенный метод, позволяет снизить размерность задачи генерирования сценариев численного метода Монте-Карло, и получить прирост в скорости работы алгоритма решения задачи оценки стоимости/мер риска опционных контрактов.
4. На основе полученных теоретических результатов разработан программный комплекс “Калькулятор расчета стоимости и риск-метрик опционов на основе риск-нейтральной динамики базовых активов”, позволяющий решать задачи оценивания стоимостей/мер риска опционного контракта/портфеля опционных контрактов.

5. Проведены численные эксперименты по оценке справедливой стоимости опционных контрактов (приведен программный код), показывающие преимущества модификации расширенного принципа Гирсанова. Проведены численные эксперименты по оценке однодневного VaR портфеля, а также бэк-тестирование (приведен программный код), показывающие эффективность использования риск-нейтральной меры вместо физической меры.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Данилишин А. Р., Голембиовский Д. Ю. Риск-нейтральная динамика для ARIMA-GARCH модели с ошибками, распределенными по закону S_U Джонсона // Информатика и ее применения, 2020. Vol. 14. Iss. 1. – P. 48 – 55. doi: 10.14357/19922264200107.
2. Данилишин А. Р., Голембиовский Д. Ю. Оценка стоимости опционов на основе ARIMA-GARCH моделей с ошибками, распределенными по закону S_u Джонсона // Информатика и ее применения, 2020. Vol. 14. Iss. 4. – P. 83 – 90. doi: 10.14357/19922264200412.
3. Данилишин А. Р. Риск-нейтральная динамика портфеля базовых активов при использовании метода главных компонент // Труды ИСА РАН, 2020. Vol. 70. Iss. 3. – P. 13 – 23. doi: 10.14357/20790279200302.
4. Данилишин А. Р., Голембиовский Д. Ю. Риск-нейтральная динамика для модели ARIMA-GARCH с ошибками, распределенными по закону S_U Джонсона // Ломоносовские чтения-2020. Секция «Вычислительной математики и кибернетики». Изд-во Моск. ун-та, 2020, С. 70-71.
5. Данилишин А. Р., Голембиовский Д. Ю. Модификация расширенного принципа Гирсанова и его применение к моделированию ARIMA-GARCH случайных процессов // Тихоновские чтения: Научная конференция / МГУ им. М. В. Ломоносова. – М.: МАКС Пресс, 2018., С. 90-90.
6. Данилишин А. Р. Динамика портфеля активов на основе физической и риск-нейтральной вероятностной меры // Научная конференция «Ломоносов-2020»: секция «Вычислительная математика и кибернетика» / Издательский отдел факультета ВМК МГУ Москва.
7. Данилишин А. Р., Голембиовский Д. Ю. Модификация расширенного принципа Гирсанова и результаты оценки опционов на основе ARIMA-GARCH моделей с ошибками, распределенными по закону Su Джонсона // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2020. Т. 27. № 2. С. 123 – 125.

СВЕДЕНИЯ О РЕГИСТРАЦИИ ПРОГРАММЫ

Калькулятор расчета стоимости и риск-метрик опционов на основе риск-нейтральной динамики базовых активов: Свид-во о гос. рег. программы для ЭВМ № 2021664083; Федеральная служба по интеллектуальной собственности / Данилишин А.Р.; заявитель и правообладатель Данилишин А.Р. - № 2021663143; заявл. 11.08.2021; 30.08.2021.

ЛИЧНЫЙ ВКЛАД АВТОРА

Личный вклад автора состоит в получении производящей функции моментов для распределения S_u Джонсона в виде степенного ряда, анализе его на сходимость, изменении предположений расширенного принципа Гирсанова, доказательстве основных теорем расширенного принципа Гирсанова при новых предположениях, получении случайного процесса ARIMA-GARCH на основе риск-нейтральной меры. Также автором рассматривается случай совместного моделирования портфеля базовых активов, в результате чего строится алгоритм получения коэффициентов ARIMA-GARCH системы базовых активов на основе риск-нейтральной вероятностной меры. В Главе 4 и Приложении А представлены программные реализации описанных в Главе 2 моделей ARIMA-GARCH случайных процессов на основе риск-нейтральной меры. Программный код позволяет оценивать параметры моделей и проводить расчет справедливой стоимости опционных контрактов европейского типа. В Главе 5 и Приложении Б представлены программные реализации описанного в Главе 3 метода моделирования риск-нейтральной динамики портфеля базовых активов для ARIMA-GARCH случайных процессов с ошибками, распределенными по закону S_u Джонсона. Программный код позволяет оценивать меру риска VaR (однодневный) и проводить процедуру бэк-тестирования с целью валидации построенной модели. Постановка задач и проведение научных исследований в рамках первых трех глав осуществлялись под руководством д.т.н. Голембиовского Д.Ю. Все основные результаты Глав 2-4 опубликованы с статьях [1;2] в соавторстве с проф. Голембиовским Д.Ю. Результаты Глав 3, 5 опубликованы в статье [3] без соавторства. В работах, опубликованных с соавтором, вклад диссертанта был определяющим.