УТВЕРЖДАЮ
Ректор Сколковского института науки и технологий

_____ Ю.Г. Горбунова

«21» июля 2026 г.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ
Автономной некоммерческой образовательной организации высшего образования «Сколковский институт науки и технологий»

Диссертация «Параметрические методы вычисления обобщенных оптимальных транспортных отображений и барицентров» прошла апробацию на семинаре Центра Искусственного Интеллекта Сколковского института науки и технологий (Сколтех).

В период подготовки диссертации с 2022 г. по 2025 г. соискатель **ГАЗДИЕВА Милена Джамбулатовна** обучалась в очной аспирантуре Автономной некоммерческой образовательной организации высшего образования «Сколковский институт науки и технологий» по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ и работала в центре искусственного интеллекта Сколтеха в должности инженера-исследователя.

В 2018 г. Газдиева М. Д. окончила с отличием «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова», очная программа специалитета по направлению подготовки 01.05.01 «Фундаментальные математика и механика».

В 2020 г. Газдиева М. Д. окончила «Сколковский институт науки и технологий», очная магистерская программа по направлению подготовки 02.04.01 «Математика и компьютерные науки».

Справка с результатами сдачи кандидатских экзаменов выдана в 2025 г. в Автономной некоммерческой образовательной организации высшего образования «Сколковский институт науки и технологий».

Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор РАН, Евгений Владимирович Бурнаев. Основное место работы – Автономная некоммерческая образовательная организация высшего образования «Сколковский институт науки и технологий», профессор, вице-президент по развитию искусственного интеллекта, директор Центра Искусственного Интеллекта.

По итогам презентации и обсуждения диссертации «Параметрические методы вычисления обобщенных оптимальных транспортных отображений и барицентров» ***принято следующее заключение***.

Тема диссертации является актуальной, поскольку работа посвящена разработке новых численных методов математического моделирования, основанных на математической концепции обобщенного (несбалансированного,

частичного) оптимального транспорта (ОТ), – а численные методы на основе ОТ доказали свою практическую значимость и применимость в различных задачах математического моделирования, начиная с задачи построения генеративных моделей данных, позволяющих синтезировать новые данные, и заканчивая задачей агрегации данных, приходящих из разных доменов (к примеру, МРТ снимков, полученных на разных устройствах).

В последние годы стали активно развиваться методы ОТ, основанные на идее, что многие прикладные задачи генеративного моделирования могут быть сформулированы как задачи ОТ между непрерывными распределениями. При этом предполагается, что сами распределения неизвестны и заданы только выборками, по которым требуется построить решение задачи ОТ, называемое ОТ отображением. Такие методы обыкновенно используют выразительную параметризацию транспортных отображений, например, на основе глубоких нейронных сетей и именуются *непрерывными* или *параметрическими* ОТ методами. Однако, несмотря на то, что такие методы ОТ продемонстрировали определенные успехи в решении ряда прикладных задач генеративного моделирования, существующие модели страдают от ряда существенных недостатков, ограничивающих их практическую применимость. А именно, такие методы не являются устойчивыми к потенциальным неточностям в данных, вызванных, к примеру, ошибками в измерениях, выбросами и пр.

Для преодоления данной проблемы все чаще разрабатываются параметрические методы на основе обобщенной (несбалансированной, частичной) постановки ОТ задачи. Такие методы позволяют строить эффективные аппроксимации решений ОТ задач все зависимости от наличия погрешностей в данных, что позволяет эффективно применять данные методы в реальных приложениях, к примеру, в задаче обработки медицинских снимков, где неточности в данных неизбежны. Численные параметрические несбалансированные ОТ методы могут быть разделены на минимаксные методы и методы, базирующиеся на использовании решений дискретных несбалансированных ОТ задач и не имеющих каких-либо теоретических гарантий. Минимаксные методы предполагают использование нескольких глубоких нейронных сетей и требуют решения задачи поиска седловой точки, что на практике приводит к неустойчивой и времязатратной процедуре оптимизации. Между тем для методов без теоретических обоснований точность аппроксимации действительных решений ОТ задачи остается открытым вопросом, что ставит под сомнение возможность их применения в ряде важных реальных приложений, к примеру, в медицине. В то же время, до сих пор не было разработано ни одного параметрического численного ОТ метода для решения других задач обобщенного ОТ – задач частичного ОТ и несбалансированного ОТ барицентра, которые также могут использоваться для повышения устойчивости методов к неточностям в данных.

Таким образом, существует необходимость в разработке новых параметрических численных методов решения непрерывной задачи несбалансированного ОТ, обладающих строгими теоретическими обоснованиями и не требующих неустойчивой и времязатратной оптимизации в задаче поиска

седловой точки. Кроме того, необходима разработка масштабируемых вычислительных методов, позволяющих находить решения задач несбалансированного барицентра и частичного оптимального транспорта.

Диссертационная работа Газдиевой Милены Джамбулатовны посвящена разработке новых численных методов математического моделирования, использующих нейросетевую или гауссовскую параметризацию и основанных на решении непрерывных обобщенных задач оптимального транспорта. В частности, были установлены следующие ***направления и цели работы***:

- Разработка численного метода вычисления несбалансированных транспортных отображений между непрерывными вероятностными распределениями;
- Разработка численного метода нахождения несбалансированных барицентров семейства непрерывных распределений;
- Разработка численного метода вычисления частичных транспортных отображений между непрерывными вероятностными распределениями.

Для достижения поставленных целей, ***методология и методы данного исследования*** были определены, и диссертационная работа была направлена на решение следующих ***задач***, соответствующих главам диссертации:

- Разработать численный метод, основанный на двойственной формулировке несбалансированного ОТ, для вычисления оптимального отображения между непрерывными распределениями с параметризацией через смеси гауссовых распределений; вывести теоретические оценки, устанавливающие связь между ошибками аппроксимации решений предложенных прямой и двойственной задач; получить теоретическую верхнюю границу статистической ошибки для предложенной двойственной задачи;
- Разработать численный метод, основанный на двойственной формулировке несбалансированного ОТ, для вычисления (полу)несбалансированных барицентров ОТ для семейства непрерывных вероятностных распределений с использованием нейронных сетей; вывести теоретические оценки, устанавливающие связь между ошибками аппроксимации решений предложенных прямой и двойственной задач;
- Разработать численный метод, основанный на двойственной формулировке задачи (полу)частичного оптимального транспорта, для вычисления оптимального отображения между непрерывными распределениями с использованием нейронных сетей.

Основные результаты диссертации:

- Разработан неминимаксный алгоритм вычисления несбалансированных транспортных отображений между непрерывными распределениями, основанный на использовании смесей гауссовых распределений для параметризации потенциалов в двойственной задаче. Выведены теоретические оценки, устанавливающие связь между ошибкой

минимизации разработанного функционала оптимизации и ошибкой решения исходной задачи несбалансированного оптимального транспорта. Получена теоретическая оценка статистической ошибки для предложенного функционала оптимизации.

- Разработан алгоритм вычисления (полу)несбалансированных оптимальных транспортных барицентров для семейства непрерывных вероятностных распределений, основанный на использовании нейронных сетей и условия m-согласованности двойственных переменных задачи несбалансированного барицентра. Выведены теоретические оценки, устанавливающие связь между ошибкой минимизации разработанного функционала оптимизации и ошибкой решения исходной задачи несбалансированного ОТ барицентра.

- Разработан алгоритм вычисления (полу)частичных транспортных отображений между непрерывными распределениями, основанный на использовании нейронных сетей.

Научная новизна работы заключается в следующем.

- Впервые предложен теоретически обоснованный метод вычисления несбалансированных транспортных отображений между непрерывными распределениями, который включает всего один этап обучения, не требует сложной минимаксной оптимизации и использует лёгкую параметризацию. Метод основан на новой идее применения специальной замены переменных в двойственной формулировке задачи несбалансированного оптимального транспорта и параметризации с помощью смесей гауссовых распределений. В отличие от существующих неминимаксных подходов, предложенный метод не опирается на решения дискретной задачи несбалансированного ОТ, которые вносят смещение в получаемые результаты;

- Впервые предложен масштабируемый и теоретически обоснованный метод вычисления (полу)несбалансированного оптимального транспортного барицентра для семейства непрерывных распределений. Метод основан на введении нового регуляризатора, обеспечивающего m-согласованность решений двойственной задачи, и использовании нейронных сетей. Данный подход является первым, позволяющим вычислять несбалансированные ОТ барицентры для непрерывных распределений. Ранее эффективные численные методы вычисления несбалансированных барицентров в высокоразмерных пространствах отсутствовали - все существующие подходы рассматривали лишь дискретный случай;

- Впервые предложен масштабируемый и теоретически обоснованный метод вычисления (полу)частичных транспортных отображений между непрерывными распределениями. Этот метод является первым подходом, позволяющим вычислять (полу)частичные транспортные отображения для непрерывных распределений. Ранее эффективные численные методы

решения (полу)частичных оптимальных транспортных задач в высокоразмерных пространствах отсутствовали - все существующие подходы рассматривали только дискретный случай.

Теоретическая значимость работы заключается в том, что предложенные новые подходы, основанные на численных методах обобщённого ОТ, позволяют эффективно решать ряд задач математического моделирования, для которых ранее либо не существовало методов решения, либо существующие подходы имели существенные ограничения. Особенностью предложенного метода вычисления несбалансированных транспортных отображений является то, что он устраняет недостатки существующих методов, связанные с необходимостью минимаксной оптимизации и отсутствием строгих теоретических обоснований. Предложенные подходы к вычислению несбалансированных барицентров и частичных транспортных отображений с использованием нейронных сетей являются первыми методами данного типа, применимыми к случаю непрерывных распределений. В частности, данные методы позволяют проводить строгий теоретический анализ получаемых решений. Например, они дают возможность выводить оценки для статистических ошибок, характеризующих влияние конечного размера выборок на качество решений.

Практическая ценность полученных результатов определяется тем, что предложенные подходы математического моделирования, основанные на численных методах обобщенного оптимального транспорта, обладают широким спектром потенциальных приложений в различных областях – медицине, промышленности и других. Разработанные методы несбалансированного и частичного оптимального транспорта протестированы в задачах переноса доменов на синтетических и модельных данных и могут быть применены в ряде задач компьютерного зрения, включая обучение моделей для сверхразрешения изображений, переноса стиля и других. Дополнительные области применения предложенных методов связаны с задачами в области одноклеточной биологии, например, сопоставлением несогласованных распределений клеток на различных стадиях лечения онкологических заболеваний. Разработанный метод оценки несбалансированного ОТ барицентра также имеет потенциал применения в задачах агрегации данных. В частности, возможны применения для поиска общего представления снимков, полученных с МРТ-сканеров разных клиник, или данных геологических симуляторов, моделирующих различные аспекты строения подземных пластов. Такая агрегация данных может повысить качество работы моделей сегментации и классификации, обучаемых на этих данных.

Обоснованность и достоверность результатов и выводов обеспечивается строгим применением теории обобщённого (несбалансированного и частичного) оптимального транспорта и связанных с ней математических инструментов, корректность которых хорошо установлена в научной литературе. Предложенные вычислительные алгоритмы были всесторонне протестированы на множестве синтетических и реальных задач обобщённого оптимального транспорта. Все теоретические результаты сопровождаются полными формальными

доказательствами. Подробные экспериментальные протоколы и открытый исходный код обеспечивают полную воспроизводимость экспериментов. Все результаты, выносимые на защиту, опубликованы в научных журналах и трудах ведущих международных конференций, что подтверждает их достоверность.

Основные результаты по теме диссертации изложены в **4** работах, включая **1** работу в изданиях из списка ВАК и приравненных к ним, опубликованную в международном журнале уровня **SJR rank Q1** и индексируемую в базе данных **Scopus**. Другие **3** работы опубликованы в трудах международных конференций уровня **Core rank A*** и индексируются в **Scopus**.

1. Gazdieva, M., Mokrov, P., Rout, L., Korotin, A., Kravchenko, A., Filippov, A., & Burnaev, E. An optimal transport perspective on unpaired image super-resolution // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2025. – Vol. 207. – Art. 40. **Scopus (Q1)**.
2. Gazdieva, M., Asadulaev, A., Burnaev, E., & Korotin, A. Light unbalanced optimal transport // Advances in Neural Information Processing Systems. – 2024. – Vol. 37. – P. 93907-93938. **Scopus (A*).**
3. Gazdieva, M., Choi, J., Kolesov, A., Choi, J., Mokrov, P., & Korotin, A. Robust Barycenter Estimation using Semi-Unbalanced Neural Optimal Transport // International Conference on Learning Representations. – 2025. [Electronic resource] URL: https://openreview.net/pdf?id=CI5Cj0vktS (date of reference 20.08.2025). **Scopus (A*).**
4. Gazdieva, M., Korotin, A., Selikhanovych, D., & Burnaev, E. Extremal domain translation with neural optimal transport // Advances in Neural Information Processing Systems. – 2023. – Vol. 36. – P. 40381-40413. **Scopus (A*).**

По материалам диссертации принята в печать статья в издании из списка ВАК:

5. Газдиева, М., Коротин, А. Обзор минимаксных параметрических методов вычисления оптимальных транспортных отображений. // Труды Института Системного Анализа Российской Академии Наук. – 2026. – Т. 76, № 3. **ВАК (К2).** Принята к печати.

Публикации полностью соответствуют теме диссертационного исследования и раскрывают её основные положения.

Все ***результаты диссертации, выносимые на защиту, получены лично соискателем***. В частности, все алгоритмы и теоретические результаты, представленные в диссертации и публикациях [2–4], разработаны и доказаны автором диссертации. Диссертация включает также результаты совместной работы: экспериментальное тестирование метода вычисления полунесбалансированного ОТ барицентра [3] выполнено в сотрудничестве с соавтором Дж. Чои; автор диссертации разработала подход для вычисления получастичных транспортных отображений [4], осуществила его предварительную реализацию и протестировала метод при различных параметрах, тогда как Д. Селиханович адаптировал данный подход для сравнения с

альтернативными методами. Все ключевые эксперименты в работах [1,2] выполнены автором диссертации; вспомогательные эксперименты в этих работах проведены соавторами А. Асадулаев, Л. Роут и А. Коротин. Теоретические результаты, представленные в статье [1], получены в соавторстве с П. Мокров и А. Коротин. Анализ методов в работе [5] проведен лично автором.

Результаты диссертационной работы получили ***квалифицированную апробацию*** на **трёх** ведущих международных научных конференциях уровня **Core rank A*** по машинному обучению и искусственному интеллекту:

1. The Thirty-seventh Annual Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS), 2023, Новый Орлеан, США;
2. The Thirty-eighth Annual Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS), 2024, Ванкувер, Канада;
3. The Thirteenth International Conference on Learning Representations (ICLR), 2025, Сингапур.

Кроме того, основные результаты диссертации ***докладывались*** в ходе **восьми** научных семинаров, лекций и локальных конференций по машинному обучению и искусственному интеллекту:

1. Семинар института AIRI, 2023, Москва, Россия;
2. Конференция Fall into ML в НИУ ВШЭ, 2023, Москва, Россия;
3. Семинар института AIRI, 2024, Москва, Россия;
4. Конференция Fall into ML в НИУ ВШЭ, 2024, Москва, Россия;
5. Конференция DataFest в Яндексе, 2025, Москва, Россия;
6. Конференция Fall into ML в НИУ ВШЭ, 2025, Москва, Россия;
7. Лекция в Beijing Institute of Mathematical Sciences and Applications, 2025, Пекин, Китай;
8. Научный семинар лаборатории LARSS Сколковского Института Науки и Технологий, 2025, Москва, Россия.

Разработанный алгоритм вычисления частичных транспортных отображений был **интегрирован в платформу** для мониторинга и прогнозирования природных катастроф на территории Российской Федерации. Данная платформа разработана Центром искусственного интеллекта Сколковского института науки и технологий, в котором работает автор диссертации.

Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, ***в частности, пунктам:***

- **п.1.** Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений;
- **п.2.** Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий;

- **п.3.** Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

Диссертация «Параметрические методы вычисления обобщенных оптимальных транспортных отображений и барицентров» **ГАЗДИЕВОЙ Милены Джамбулатовны** является законченной научно-квалификационной работой, которая рекомендуется к защите на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности ***1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.***

Заключение принято на семинаре, организованном Центром Искусственного Интеллекта Автономной некоммерческой образовательной организации высшего образования «Сколковский институт науки и технологий», «10» июля 2026 г., протокол № 2.

Присутствовало на заседании 6 членов программного комитета. Результаты голосования: «за» – 6 человек, «против» – 0 человек, «воздержалось» – 0 человек.

д. т. н., профессор, председатель семинара
Иван Юрьевич Тюкин