На правах рукописи

Прохорова Мария Сергеевна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ СРЕДСТВА ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ РИСКАМИ

Специальность 05.13.17 – теоретические основы информатики

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2016

Работа выполнена на кафедре Теоретической информатики и дискретной математики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский педагогический государственный университет»

Научный руководитель **Горелик Виктор Александрович**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Брусов Петр Никитович**
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики факультета прикладной математики и информационных технологий ФГОБУ ВПО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

Тараканов Андрей Федорович
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики, информатики, физики и методики их преподавания Борисоглебского филиала
ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет»

Ведущая организация Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова»

Защита диссертации состоится «06» октября 2016 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Д002.073.05 в Федеральном государственном Учреждении «Федеральном исследовательском центре «Информатика и управление» Российской академии наук» по адресу: 119 333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного Учреждения «Федеральном исследовательском центре «Информатика и управление» Российской академии наук» и на сайте www.frccsc.ru.

Автореферат разослан «____» ____________ 2016 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета Д002.073.05
доктор физико-математических наук, профессор В.В. Рязанов

Актуальность темы. В настоящее время нельзя назвать область человеческой деятельности, в которой в той или иной степени не использовались бы математические методы теории принятия решений. Особенно это относится к сфере управления сложными системами, где процессы принятия решений основаны на анализе разнообразной информации. В условия неполноты исходных данных о состоянии системы математическая постановка задачи принятия решений может быть сформулирована только на основе некоторой информационной модели. Неточность информации может быть связана с любым элементом системы: функциями цели, ограничениями, состоянием внешней среды, воздействием других систем. Существуют различные подходы к моделированию поведения в условиях неопределенности, однако главным при этом является информационный аспект.

Проблемой принятия решений в условиях неполной информации занимались такие известные математики как Р.Беллман, Ю.Б.Гермейер, Л.Заде, Н.Н.Моисеев, Дж.Нейман и др.

Если имеется неопределенность в формализации цели, как правило, связанная с наличием нескольких критериев эффективности, то понятие оптимального решения становится неоднозначным. Первым понятие оптимальности в многокритериальной задаче сформулировал В.Парето в 1904 году. Согласно принципу оптимальности по Парето возможные решения следует искать среди альтернатив, улучшение которых по одним критериям приводит к их ухудшению по другим критериям. Позднее появились другие подходы, позволяющие отбраковывать неприемлемые альтернативы.

В задачах управления в условиях неопределенности отсутствие единого принципа оптимальности является принципиальным. В работах Ю.Б.Гермейера получил развитие принцип максимального гарантированного результата как единственное строгое математическое понятие решения, исключающее риск. Обобщенный принцип гарантированного результата основывается на различных предположениях об информированности управляющего органа и оценках риска. Можно считать крайним его воплощением теорию нечетких множеств Л.Заде, который предложил правила выбора формулировать в терминах функций принадлежности.

Идеи процесса последовательного анализа вариантов и отсеивания неконкурентоспособных решений восходят к А.А.Маркову, А.Вальду, Р.Айзексу. Они привели к появлению метода динамического программирования Р.Беллмана. В.С.Михалевич разработал общую схему формализованного описания последовательного анализа, включающую динамическое программирование и метод ветвей и границ.

Как было сказано, при формализации задачи принятия решений в условиях неполной информации требуется построение информационной модели. Математическое моделирование за последние годы стало важнейшим инструментом исследований. Большой вклад в разработку информационных моделей и имитацию сложных процессов внесли Ю.И.Журавлев, А.А.Петров, Ю.Н.Павловский, И.Г.Поспелов и др.

При моделировании процессов управления в сложных системах неизбежно возникает проблема соотношения эффективности и устойчивости. Устойчивость вообще – это способность системы сохранять текущее состояние при наличии внешних воздействий. Близкое понятие гомеостазис означает саморегуляцию, способность открытой системы сохранять постоянство своего внутреннего состояния посредством скоординированных реакций, направленных на поддержание динамического равновесия. Взаимодействие с окружающей средой характеризуется высокой степенью неопределенности. Сочетание устойчивости и эффективности функционирования сложных систем или процессов связано с обработкой информации при выборе управлений таким образом, чтобы критерий эффективности достигал оптимального значения в области гомеостазиса. Разумное использование имеющейся информации позволяет минимизировать влияние неопределенности в задачах принятия решений и достичь наибольшего возможного значения эффективности. Само появление понятия «риск» является следствием неточности исходной информации. Под риском понимается непредсказуемость состояния системы или течения процесса как результат неполноты информации. Ситуация риска связана с возможностью нарушения устойчивого состояния системы или прогнозируемого течения процесса вследствие возникновения непредвиденных событий.

В последнее время появилось много работ по управлению риском, и в основном они относятся к финансово-экономической сфере деятельности. Управление риском включает как непременный атрибут процедуры оценки факторов риска и максимального снижения неопределенности при принятии решений, обеспечивающие безопасность функционирования системы. Методы управления риском, который возникает в результате случайного или неопределенного воздействия внешней среды, внутрисистемного нарушения гомеостазиса в условиях децентрализации управления, неточности или противоречивости исходных данных, были развиты в работах Г.Александера, В.А.Горелика, В.И.Жуковского, Г.Марковица, У.Шарпа и др.

Исследование информационных моделей управления риском представляет собой проблему теоретических основ информатики. Она относится к следующим научным направлениям: разработка и анализ моделей информационных процессов, разработка и исследование моделей и алгоритмов анализа данных, исследование, в том числе с помощью средств вычислительной техники, информационных процессов.

Так как в задачах принятия решений в условиях неполной информации (риска) не может быть единого принципа оптимальности и существует много моделей оценки и управления риском, то возникает вопрос о связи между ними и выборе того или иного подхода в конкретной ситуации. Анализ современных российских и зарубежных работ позволяют сделать вывод, что эти аспекты детально не исследованы.

Таким образом, актуальной **задачей** теоретической информатики является исследование взаимосвязи различных математических моделей управления риском и разработка на их основе инструментальных средств обработки информации для нахождения оптимальных решений в условиях неполной информации. Решению этой задачи и посвящено настоящее исследование.

Целью работы является исследование взаимосвязи типичных моделей управления риском и идентификация параметров моделей с точки зрения их эквивалентности, а также разработка программных средств, реализующих методы обработки информации и принятия решений.

Объект исследования – математические модели информационных процессов и алгоритмы анализа данных как основа принятия решений в условиях неполной информации.

Предмет исследования – математические модели управления риском и связь между решениями задач управления для этих моделей, а также их реализация в виде инструментальных средств поддержки принятия решений.

Методы исследования. В диссертации используются методы линейной алгебры, математического анализа, математического программирования, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей, математической статистики, компьютерной обработки данных.

Для реализации поставленной цели решались следующие **задачи**:

- определение необходимых и достаточных условий совпадения оптимального управления при использовании различных стохастических моделей управления риском;
- определение необходимых и достаточных условий совпадения оптимального управления при использовании различных моделей управления риском в условиях неопределенности;
- применение результатов исследования связи задач управления риском при разработке инструментальных средств обработки информации и поддержки принятия решений на фондовом рынке.

Научная новизна и теоретическая значимость. В работе представлены подходы к решению проблемы соотношения устойчивости и эффективности функционирования систем в условиях неполной информации. Исследованы вопросы взаимосвязи решений задач для разных моделей управления риском в стохастических условиях и в условиях неопределенности. Наиболее важные теоретические результаты, характеризующие новизну работы:

- получены условия, характеризующие принадлежность оптимальных портфелей задачи максимизации доходности с ограничением по дисперсии и задачи минимизации дисперсии с ограничением по доходности множеству эффективных портфелей;
- получены значения коэффициента риска, дающие одинаковые оптимальные решения в задачах управления риском, использующих линейную свертку критериев «математическое ожидание – дисперсия»,

свертку этих критериев типа отношения, перевод одного критерия в ограничение;

- получено значение коэффициента риска, при котором решения задач максимизации линейной свертки критериев «доходность – дисперсия» и минимизации вероятностной функции риска совпадают в предположении нормального или экспоненциального распределения случайных величин доходностей;

- получены значения коэффициента риска в условиях неопределенности, при котором решение задачи максимизации линейной свертки критериев «прибыль – максимальный риск» совпадает с решением задач управления риском, использующих свертку этих критериев типа отношения и перевод одного критерия в ограничение;

- получены достаточные условия несущественности ограничений по максимальному риску в производственной задаче;

- получено значение коэффициента риска, при котором решение задачи минимизации отношения риска, заданного в метрике l_1, к ожидаемой прибыли и задачи максимизации линейной свертки критериев «прибыль – максимальный риск» совпадают.

Практическая значимость. Результаты проведенного исследования позволяют определять отношение к риску (коэффициент риска), если для нахождения решения использовалась модель с ограничением по одному из критериев, модель со сверткой типа отношения или с вероятностной функцией риска. Это дает возможность ранжировать различные портфели проектов (ценные бумаги, производственные задания) по степени избегания риска и определять портфель проектов с наименее или наиболее значимым риском. Построена автоматизированная система поддержки принятия решений, которая позволяет проводить сравнительный анализ рассмотренных моделей и оценивать чувствительность оптимальных управлений к объему используемой статистической информации.

Основные положения, выносимые на защиту:

- предлагаемые математические методы обработки информации в стохастических задачах управления риском и в задачах управления риском в условиях неопределенности могут служить теоретической основой реальных процедур определения уровня риска и принятия решений в условиях неполной информации;

- проведенная классификация задач управления риском (в стохастических условиях и в условиях неопределенности) в сложных системах и исследование их взаимосвязи обеспечивают научную обоснованность выбора метрики при построении функции риска и способа свертки двух критериев: эффективности и риска;

- решения двухкритериальных задач оптимального выбора при наличии случайных или неопределенных неконтролируемых факторов совпадают при выполнении определенных условий, налагаемых на исходные данные типичных моделей управления риском.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на 39-й научно-технической конференции аспирантов и студентов «Научно-техническое творчество аспирантов и студентов» (Комсомольск-на-Амуре, КнАГТУ, 2009 г.); на 40-й научно-технической конференции аспирантов и студентов «Научно-техническое творчество аспирантов и студентов» (Комсомольск-на-Амуре, КнАГТУ, 2010 г.); на 41-й научно-технической конференции аспирантов и студентов «Научно-техническое творчество аспирантов и студентов» (Комсомольск-на-Амуре, КнАГТУ, 2011 г.); VIII Всероссийской школе-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (Магнитогорск, МГТУ, 2011 г.); V международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (Москва, ИПУ РАН, 2011 г.); на 42-й научно-технической конференции аспирантов и студентов «Научно-техническое творчество аспирантов и студентов» (Комсомольск-на-Амуре, КнАГТУ, 2012 г.); X Всероссийской школе-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (Уфа, УГАТУ, 2013 г.).

Публикации. Основное содержание диссертации отражено в 5 научных статьях, опубликованных в журналах, рекомендованных ВАК, и в 7 публикациях в материалах научных конференций.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, содержащего 117 источников, одного приложения. Общий объем диссертации составляет 157 страниц, в том числе основного текста работы - 105 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении содержится анализ подходов к исследованию задач принятия решений в условиях риска, обосновывается актуальность темы исследования, определяется цель работы, формулируются математические задачи, которые необходимо было решить для реализации поставленной цели, указывается методологическая основа исследования, раскрывается научная новизна и практическая значимость диссертационной работы, выдвигаются основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе «Математические методы обработки информации в стохастических задачах управления риском» (1.1, 1.2) рассматриваются задачи принятия решений при воздействии на систему случайных неконтролируемых факторов с заданными законами распределения. Получены соотношения между их параметрами, при которых соответствующие оптимизационные задачи становятся эквивалентными. Эти вопросы рассмотрены на весьма типичном и распространенном примере фондового инвестирования. Решением здесь является выбор оптимального портфеля.

В задачах оценки финансовых рисков обработка статистической информации приводит к таким понятиям, как случайная доходность, математического ожидание доходности, ковариационная матрица портфеля ценных бумаг, функция риска в метрике l_2^2 (дисперсия) и в метрике и l_2 (среднеквадратическое отклонение – СКО), вероятностная функции риска. Рассмотренные функции риска используются далее в задачах управления риском на фондовом рынке.

Проведено исследование связи между решениями задач нахождения оптимального портфеля ценных бумаг с использованием линейной свертки математического ожидания доходности и функции риска, заданной в метрике l_2^2, свертки типа отношения, в которой функция риска портфеля задана в метрике l_2, модели с ограничением по дисперсии и с ограничением по доходности, с вероятностной функцией риска. Оптимизационные задачи с использованием свертки типа отношения и с вероятностной функцией риска сведены к задачам квадратичного программирования. Для каждой пары задач получено значение коэффициента риска, при котором решение задачи максимизации линейной свертки критериев «доходность – дисперсия» совпадает с решением задачи управления риском с использованием другой свертки этих критериев и/или другой функции риска.

Определим сначала оптимальный портфель как решение задачи на максимум линейной свертки критериев математического ожидания и дисперсии случайного значения доходности портфеля:

$$\max_x [\bar{r}x - \alpha(xKx)], \quad xe = 1,\ x \geq 0, \tag{1}$$

где x вектор инструментальных переменных (в данном случае состав портфеля), $\bar{r} = (\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_i, \ldots, \bar{r}_n)$ – вектор математических ожиданий доходностей финансовых инструментов, $K = (\sigma_{ij})_{n \times n}$ – ковариационная матрица, $\alpha > 0$ – весовой коэффициент, определяющий отношение инвестора к риску (коэффициент риска), e = (1,…,1). Как видно из (1), случайные значения доходностей предполагаются коррелированными.

Как известно, ковариационная матрица неотрицательно определена. Везде в дальнейшем мы будем предполагать, что она положительно определена и, следовательно, существует обратная к ней матрица. Кроме того, для краткости все соотношения выводятся в предположении, что оптимальный портфель является полноразмерным, т. е. у вектора x, определяющего состав портфеля, все компоненты больше нуля. Если часть компонент вектора x равны нулю, то в полученных далее формулах матрицу K надо просто заменить на соответствующую квадратную подматрицу, а при наличии коротких продаж любой портфель можно считать полноразмерным.

Теперь рассмотрим нахождение оптимального портфеля как решение задачи на минимум дисперсии при ограничении по математическому ожиданию доходности портфеля:

$$\min_x xKx, \quad \bar{r}x = r_p,\ xe = 1,\ x \geq 0, \tag{2}$$

где r_p – требуемое значение математического ожидания доходности портфеля. Для задач (1) и (2) получены условия, при которых их решения совпадают для случая оптимального полноразмерного портфеля (т. е. $x^0 > 0$).

Теорема 1.2.1. Если для $\bar{r}, K$ и r_p, удовлетворяющих условию

$$\max\left(\frac{\bar{r}K^{-1}e}{r_p(eK^{-1}e)}, \frac{(eK^{-1}\bar{r})^2}{(\bar{r}K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e)}\right) < 1 \vee \min\left(\frac{\bar{r}K^{-1}e}{r_p(eK^{-1}e)}, \frac{(eK^{-1}\bar{r})^2}{(\bar{r}K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e)}\right) > 1, \tag{3}$$

коэффициент риска $\alpha = \dfrac{(\bar{r}K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e) - (eK^{-1}\bar{r})^2}{2(r_p(eK^{-1}e) - (\bar{r}K^{-1}e))}$, то решения задач (1) и (2) совпадают для полноразмерных портфелей.

Соотношения (3) есть необходимое и достаточное условие принадлежности решения задачи (2) множеству паретооптимальных портфелей.

Определим теперь оптимальный портфель как решение задачи на экстремум математического ожидания доходности при ограничении по дисперсии:

$$\max_x \bar{r}x, \quad xKx = \sigma_p^2,\ xe = 1,\ x \ge 0, \tag{4}$$

где σ_p^2 – требуемое значение дисперсии портфеля.

В теореме 1.2.2. получено значение коэффициента риска, при котором задача максимизации доходности с ограничением по дисперсии эквивалентна задаче максимизации линейной свертки критериев «доходность-дисперсия».

Теорема 1.2.2. Если для $\bar{r}, K$ и σ_p^2, удовлетворяющих условиям

$$(\bar{r}K^{-1}e)^2(\sigma_p^2(eK^{-1}e) - 1)^2 - (eK^{-1}e)(1 - \sigma_p^2(eK^{-1}e))(\bar{r}K^{-1}\bar{r} - \sigma_p^2(eK^{-1}\bar{r})^2) \ge 0, \tag{5}$$

$$\lambda_4^0 < \frac{\bar{r}K^{-1}e}{(eK^{-1}e)}, \tag{6}$$

где λ_4^0 – множитель Лагранжа, являющийся решением квадратного уравнения с дискриминантом из левой части (5), коэффициент риска $\alpha = \frac{1}{2}((\bar{r}K^{-1}e) - \lambda_4^0(eK^{-1}e))$, то решения задач (1) и (4) совпадают для полноразмерных портфелей.

Соотношения (5) есть необходимое и достаточное условие принадлежности решения задачи (4) множеству паретооптимальных портфелей.

Иногда требуется оценить риск на единицу выгоды или выигрыша. Тогда можно использовать относительные функции риска. В этом случае естественно определить оптимальный портфель как решение задачи

$$\min_x \frac{(xKx)^{1/2}}{\bar{r}x}, \quad xe = 1,\ x \ge 0. \tag{7}$$

Задача (7) сводится к задаче квадратичного программирования

$$\min_y yKy, \quad \bar{r}y = 1,\ y \ge 0, \tag{8}$$

а ее решение имеет вид

$$x^0 = \frac{K^{-1}\bar{r}}{eK^{-1}\bar{r}}. \tag{9}$$

В теореме 1.2.3. получено значение коэффициента риска, при котором задача (7) эквивалентна задаче максимизации линейной свертки критериев «доходность-дисперсия».

Теорема 1.2.3. Если для $\bar{r}$ и K, удовлетворяющих условию

$$K^{-1}\bar{r} > 0, \tag{10}$$

коэффициент риска $\alpha = \frac{1}{2} eK^{-1}\bar{r}$, то решения задач (1) и (7) совпадают и определяют оптимальный полноразмерный портфель (9).

Рассмотрим задачу с вероятностной функцией риска, в которой отсутствует условие неотрицательности (в терминах инвестирования это означает наличие коротких продаж или продаж без покрытия)

$$\min_x P(rx < r_p), \quad xe = 1, \tag{11}$$

где r_p – требуемое значение математического ожидания доходности портфеля, P – вероятность. Такая оценка риска называется VAR (value at risk).

В данном случае мы исследуем взаимосвязь на примере коротких продаж (случай отсутствия коротких продаж при условии полноразмерности портфеля уже исследован). Задача (1) при наличии коротких продаж принимает вид

$$\max_x [\bar{r}x - \alpha(xKx)], \quad xe = 1. \tag{12}$$

В теореме 1.2.5 сформулированы условия, включая гипотезу нормального распределения, при выполнении которых решение задач (11) и (12) совпадают.

Теорема 1.2.5. Если $\{r_i\}$ – система нормально распределенных случайных величин доходностей r_i с математическими ожиданиями $\bar{r}_i$ и ковариационной матрицей $K = (\sigma_{ij})_{n\times n}$, $\bar{r}, K$, r_p удовлетворяют условию

$$eK^{-1}(\bar{r} - r_p e) > 0, \tag{13}$$

коэффициент риска $\alpha = \frac{1}{2} eK^{-1}(\bar{r} - r_p e)$, то решения задач (11) и (12) совпадают и определяют оптимальный портфель $x^0(\alpha) = \dfrac{K^{-1}e}{eK^{-1}e} + (K^{-1}\bar{r} - \dfrac{eK^{-1}\bar{r}}{eK^{-1}e} K^{-1}e)\dfrac{1}{2\alpha}$.

Результаты проведенного в первой главе исследования дают возможность определять отношение инвестора к риску (коэффициент риска), если для нахождения оптимального портфеля использовалась модель с ограничением по доходности, с ограничением по дисперсии, модель со сверткой типа отношения или с вероятностной функцией риска.

Вторая глава «Математические методы обработки информации в задачах управления риском в условиях неопределенности» (2.1 – 2.3) посвящена задачам принятия решений в условиях неопределенности, когда неопределенность в системе связана с воздействием внешних факторов, влияющих на параметры модели, но может зависеть и от деятельности подсистем сложной системы. Получены соотношения между параметрами моделей, при которых соответствующие оптимизационные задачи становятся эквивалентными.

Применяется гарантированный подход к оценке риска, т. е. для оценки риска всей системы используется функция риска, определенная в метрике l_∞. В работе рассмотрены линейная свертка, свертка типа отношения критериев ожидаемой эффективности и функции риска, модель с ограничением по риску. Все оптимизационные задачи сведены к задачам линейного программирования. Для каждой пары задач получено значение коэффициента риска, при котором решение задачи максимизации линейной свертки критериев «прибыль – максимальный риск» совпадает с решением задачи управления риском с использованием другой свертки этих критериев.

Рассмотрим двухкритериальную задачу с линейным критерием эффективности и гарантированной оценкой риска, формализованную в виде их свертки:

$$\max_{x\in X}\Big(\sum_{i=1}^{n}\pi_i x_i - \alpha \max_{1\le i\le n} a_i x_i\Big), \tag{14}$$

где $X=\{x \mid x_i \ge 0, i=1,\dots,n, Ax\le b\}$, $A=(a_{ji})_{m\times n}$ и $b=(b_1,\dots,b_m)$ – технологическая матрица и вектор ограничений на ресурсы предприятия соответственно; $\alpha > 0$ – коэффициент риска, π_i – математическое ожидание прибыли с единицы продукции i-го производственного процесса, a_i – ущерб (или риск) на единицу продукции i-го производственного процесса, $R_\infty(x)=\max\limits_{1\le i\le n} a_i x_i$ – функция риска предприятия (вообще говоря, x может являться не только вектором продукции предприятия, но и вектором инвестиций в проекты, интенсивностей функционирования подсистем и т.п.).

Введением новой переменной $z=\max\limits_{1\le i\le n} a_i x_i$ задачу (14) можно привести к задаче линейного программирования (ЛП)

$$\max_{x,z}\Big(\sum_{i=1}^{n}\pi_i x_i - \alpha z\Big),$$
$$a_i x_i \le z,\quad Ax\le b,\quad x_i\ge 0, i=1,\dots,n, z\ge 0. \tag{15}$$

Наряду с этой задачей рассмотрим свертку типа отношения

$$\min_{x\in X}\frac{\max\limits_{1\le i\le n} a_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\pi_i x_i}. \tag{16}$$

В теореме 2.1.1 сформулированы условия, при выполнении которых решение задач (15) и (16) совпадают.

Теорема 2.1.1. Если $\pi_i>0, b_j>0, a_i>0, a_{ji}>0$, $i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m$, в задаче (15) коэффициент риска $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\pi_i}{a_i}$, то решения задач (15) и (16) совпадают.

Во многих практических мероприятиях по управлению риском также используется концепция приемлемого риска. При этом механизм управления риском предполагает перевод критерия риска в ограничение. Тогда задачу управления риском можно формализовать в виде

$$\max_x \sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i, \tag{17}$$

$$Ax \le b, \quad a_i x_i \le R, \quad x_i \ge 0, i = 1, \ldots, n,$$

где R – значение приемлемого риска.

Теорема 2.1.3 формулирует достаточные условия несущественности ограничения по риску в задаче (17).

Теорема 2.1.3. Пусть $b_j > 0, \quad a_i > 0, a_{ji} > 0, \quad i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, m$. Для того, чтобы в задаче (17) ограничения по риску $a_i x_i \le R, i = 1, \ldots, n$, были несущественными достаточно выполнения условия $R \ge \max\limits_{1 \le i \le n} \min\limits_{1 \le j \le m} \dfrac{b_j}{\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{ji}}{a_i}}$.

Замечание. Для того, чтобы найти наименьшее R, при котором ограничения по риску $a_i x_i \le R, i = 1, \ldots, n$, становятся несущественными, нужно решить задачу (16) без ограничений по риску. Если x^0 – решение такой задачи, то наименьшее значение приемлемого риска есть $R_н = \max\limits_{1 \le i \le n} a_i x_i^0$.

В теореме 2.1.5 для случая существенных ограничений сформулированы условия, при которых решения задач (15) и (17) совпадают.

Теорема 2.1.5. Если $\pi_i > 0, b_j > 0, \ a_i > 0, a_{ji} > 0, \ i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, m$, то в задаче (15) максимальное значение коэффициента риска $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi_i}{a_i}$ соответствует минимальному приемлемому значению риска в задаче (17) $R = \min\limits_{0 \le j \le m} \dfrac{b_j}{\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{ji}}{a_i}}$, при этом решения задач (15) и (17) совпадают.

Если R несущественно, то в задаче (14) $\alpha = 0$.

Представлены также статические задачи управления риском, в которых для оценки риска системы использовалась функция риска, определенная в метрике l_1. Рассмотрены линейная свертка и свертка типа отношения критериев ожидаемой эффективности (прибыли) и функции риска. Все оптимизационные задачи сведены к задачам линейного программирования. Получено значение коэффициента риска, при котором решение производственной задачи минимизации отношения риска, заданного в метрике l_1, к ожидаемой прибыли и задачи максимизации линейной свертки критериев «прибыль – максимальный риск» совпадают.

Рассмотрим ситуацию, когда центральное управление в системе, например, руководство предприятия заинтересовано в минимальном отклонении от плановых характеристик деятельности x_i^* каждой подсистемы, а в качестве оценки риска используется функция риска, заданная в метрике l_1.

Возьмем линейную свертку критериев типа суммы и рассмотрим следующую постановку задачи управления риском:

$$\max_{x\in X}(\sum_{i=1}^{n}\pi_i x_i - \text{α}\sum_{i=1}^{n}\beta_i \mid x_i - x_i^* \mid), \tag{18}$$

где $X=\{x \mid x_i \geq 0, i=1,\dots,n, Ax\leq b\}$, x_i^* – плановые характеристики деятельности каждой подсистемы, $\beta_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1$ – весовые коэффициенты.

Вводя новые переменные $y_i = x_i - x_i^*$, $i=1,\dots,n$, можно привести задачу (18) к задаче ЛП:

$$\max_{x,y}(\sum_{i=1}^{n}\pi_i x_i - \text{α}\sum_{i=1}^{n}\beta_i y_i), \tag{19}$$

$$y_i \geq x_i - x_i^*,\ y_i \geq x_i^* - x_i,\quad Ax\leq b,\quad x_i\geq 0,\ y_i\geq 0,\ i=1,\dots,n.$$

Рассмотрим теперь постановку задачи управления риском, основанную на свертке критериев типа отношения

$$\min_{x\in X}\frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_i \mid x_i - x_i^* \mid}{\sum_{i=1}^{n}\pi_i x_i}. \tag{20}$$

Представим задачу (20) в виде задачи ЛП. Для этого введем переменные $\mu = (\sum_{i=1}^{n}\pi_i x_i)^{-1}$, $y_i = x_i - x_i^*$, $i=1,\dots,n$. Тогда задача (20) примет вид

$$\min_{\overline{w},\mu,\overline{\eta}}\sum_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\pi_i w_i = 1,\ A\overline{w} - b\mu \leq 0,\quad \eta_i \geq w_i - x_i^*\mu,\quad \eta_i \geq x_i^*\mu - w_i, \tag{21}$$

$$w_i \geq 0, \eta_i \geq 0, i=1,\dots,n,\ \mu\geq 0.$$

Пусть $(\overline{w}^0, \mu^0, \overline{\eta}^0)$ – решение задачи (21), тогда $x_i^0 = \dfrac{w_i^0}{\mu^0}$, $i=1,\dots,n$, – компоненты оптимального плана задачи (20).

Имеет место следующая теорема о связи решений задач (18) и (20).

Теорема 2.2.1. Если $\pi_i > 0, b_j > 0, a_i > 0, a_{ji} > 0$, $i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m$, коэффициент риска $\text{α} = \dfrac{1}{c\max\limits_{1\leq j\leq m}\min\limits_{1\leq i\leq n}(\dfrac{a_{ji}}{\pi_i b_j} + \dfrac{1}{\pi_i x_i^*})}$, где $c = \min\limits_{1\leq i\leq n} x_i^*\beta_i$, то решения задач (18) и (20) совпадают.

В данной главе рассмотрена также постановка непрерывной минимаксной динамической задачи управления риском для некоррелированных стохастических процессов. Для данной минимаксной динамической задачи критерий функционирования системы, состоящей из n подсистем, в предположении гарантированной оценки риска представляет собой интегральный функционал с негладкой подынтегральной функцией.

Сформулированные необходимые условия оптимальности в случае линейности по переменной управления были использованы при решении практической задачи о распределения инвестиций.

В третьей главе «Инструментальные средства обработки информации в задачах управления риском» (3.1 – 3.5) приведена постановка задачи построения автоматизированной системы поддержки принятия решений на фондовом рынке и дано краткое описание системы.

Созданная программа использует статистические данные для нахождения математических ожиданий случайных значений доходностей и ковариационной матрицы ценных бумаг, а также различные математические модели для нахождения оптимального портфеля инвестора и оценки чувствительности параметров этих моделей.

Представлены результаты вычислительных экспериментов, подтверждающие работоспособность предлагаемых методов. В качестве источника статистических данных был выбран сайт www.finam.ru, так как холдинг «ФИНАМ» является одним из крупнейших брокеров в России и осуществляет брокерские услуги на основных мировых биржах. Во фрейме (GroupBox) «Обработка статистической информации» выводятся математические ожидания доходностей ценных бумаг, СКО и ковариации всех ценных бумаг. После того как пользователь определился с ценными бумагами осуществляется переход к вкладке: «Формирование портфеля», расположенной под полями для ввода номеров выбранных ценных бумаг.

В этой вкладке расположены пять фреймов для пяти различных моделей: модели с задаваемым отношением к риску, при выборе которой необходимо ввести в специальное поле коэффициент отношения к риску; модели с ограничением по дисперсии, при выборе которой необходимо ввести желаемое значение дисперсии портфеля; модель с ограничением по доходности, при выборе которой необходимо ввести желаемое значение доходности портфеля; модель с вероятностной функцией риска, при выборе которой также необходимо ввести доходность портфеля, вероятность неполучения которую будет минимальна; модель, использующая свертку типа отношения, не требующая дополнительных параметров.

После выбора определенной модели и ввода параметра, если это необходимо, требуется нажать на кнопку «Вычислить!». После чего в текстовом поле ниже появится информация о количестве выбранных бумаг и составе портфеля, а также математическое ожидание доходности и СКО портфеля.

Пример 3.3.3. Рассмотрим модель с задаваемым коэффициентом риска и модель, использующая свертку типа отношения. При выборе акций компаний «Аэрофлот», «МТС» и «Роснефть» имеем вектор доходностей $\bar{r} = \begin{pmatrix} 0{,}967 \\ 0{,}327 \\ 0{,}898 \end{pmatrix}$ и ковариационную матрицу $K = \begin{pmatrix} 0{,}65 & -0{,}18 & -0{,}297 \\ -0{,}18 & 0{,}379 & 0{,}056 \\ -0{,}297 & 0{,}056 & 0{,}299 \end{pmatrix}$. При этом условие (10) выполняется: $K^{-1}\bar{r}=\begin{pmatrix}6{,}11\\2{,}493\\8{,}606\end{pmatrix}$, т. е. $K^{-1}\bar{r}>0$. Тогда коэффициент риска по условию теоремы 1.2.3 равен $\alpha=8{,}605$. Решения задач для модели с задаваемым отношением к риску и модели со сверткой типа отношения совпадают (см. рис 1).

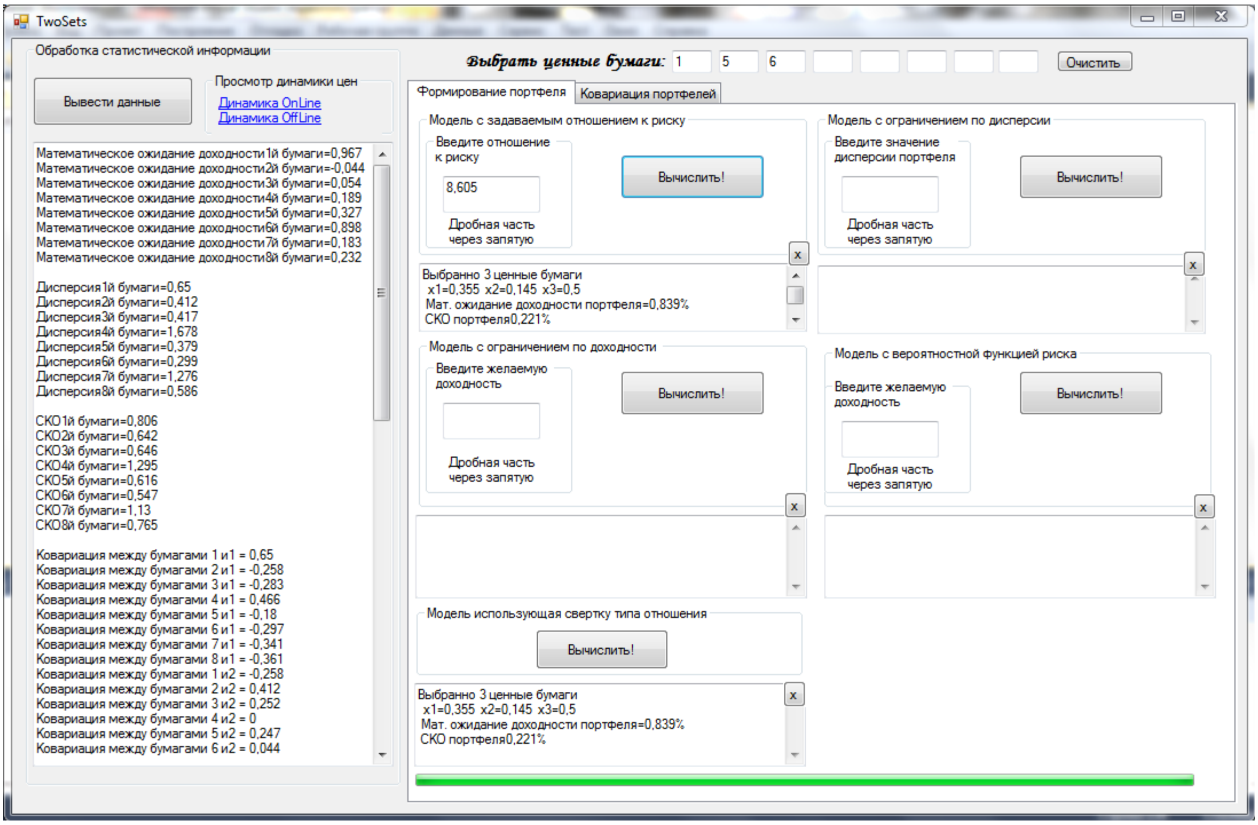

Рис. 1

В работе также исследовалась чувствительность решений к объему статистической информации. Рассматривались акции следующих компаний: «ГАЗПРОМ», «ЛУКОЙЛ», «Лензолото», «Полюс Золото», «Распадская», «Роснефть», «Уралкалий» и «Сургутнефтегаз» за период с января 2010 года по январь 2014 года (четыре года). Брались цены закрытия торговых сессий с периодами в один месяц, один квартал и за каждое полугодие. Для оценки чувствительности решений (оптимальных составов портфелей) по разным моделям использовалась евклидова метрика.

Расхождение между составами портфелей, полученными с помощью модели с задаваемым отношением к риску и с использованием данных за каждое полугодие и каждый квартал, составляет 0,027, а с использованием данных за каждый квартал и за каждый месяц – 0,659. Расхождение между составами портфелей, полученными с помощью модели с ограничением по доходности и с использованием данных за каждое полугодие и каждый квартал, составляет 0,217 (рис. 2), а с использованием данных за каждый квартал и за каждый месяц – 1,002. Расхождение между составами портфелей, полученными с помощью модели, использующей свертку типа отношение, с использованием данных за каждое полугодие и каждый квартал составляет 1,161, а с использованием данными за каждый квартал и за каждый месяц – 1,209. Расхождение между составами портфелей, полученными с помощью модели с ограничением по дисперсии, с использованием данных за каждое полугодие и каждый квартал составляет 0,166, а с использованием данных за каждый квартал и за каждый месяц – 0,727.

Было установлено, что наиболее чувствительной к объему статистических данных является модель, использующая свертку типа отношение. Модель с задаваемым отношением к риску наименее чувствительна к изменению параметров (математическое ожидание, СКО).

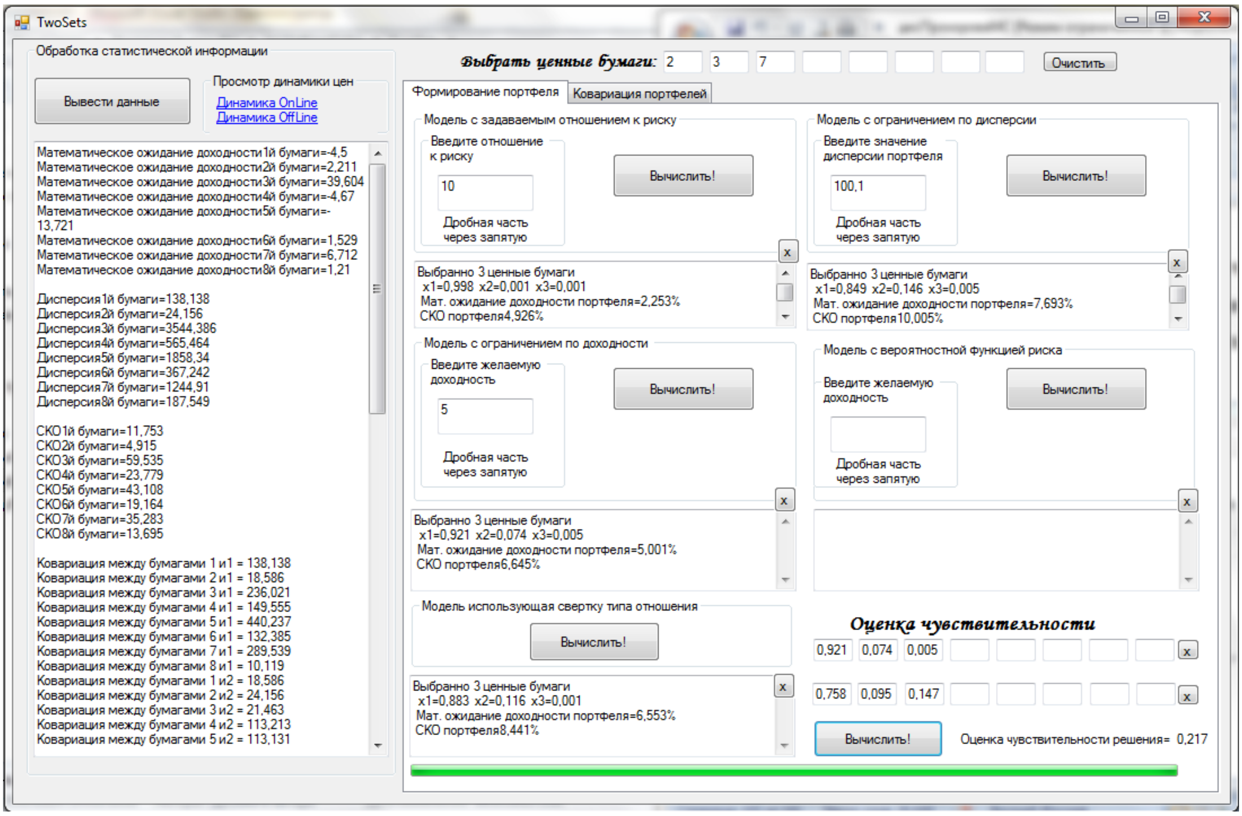

Рис. 2

В приложении приведен код программы, написанной на языке программирования VB.NET.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1) получены условия, характеризующие принадлежность оптимальных решений задачи максимизации доходности с ограничением по дисперсии и задачи минимизации дисперсии с ограничением по доходности множеству паретооптимальных портфелей, с помощью метода множителей Лагранжа получены значения коэффициента риска, позволяющие получить одинаковые решения в задачах управления риском, использующих линейную свертку критериев «математическое ожидание – дисперсия», свертку этих критериев типа отношения, перевод одного критерия в ограничение (теоремы 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3);

2) при наличии коротких продаж получено значение коэффициента риска, при котором решения задач минимизации вероятностной функции риска и максимизации линейной свертки критериев «доходность – дисперсия» совпадают в предположении нормального или экспоненциального распределения случайных величин доходностей (теорема 1.2.5);

3) с использованием теории двойственности получены значения коэффициента риска, при котором решение задачи максимизации линейной свертки критериев «прибыль – максимальный риск» совпадает с задачей управления риском, использующей свертку этих критериев типа отношения, перевод одного критерия в ограничение (теоремы 2.1.1, 2.1.4), получены достаточные условия несущественности ограничений по максимальному риску (теорема 2.1.3);

4) получено значение коэффициента риска, при котором решение задачи минимизации отношения риска, заданного в метрике l_1, к ожидаемой прибыли и задачи максимизации линейной свертки критериев «прибыль – максимальный риск» совпадают (теорема 2.2.1);

5) предложена автоматизированная система принятия решений, позволяющая сравнивать различные модели управления риском и выбирать их параметры, а также исследовать чувствительность решений к объему статистической информации.

Основное содержание диссертации отражено в работах:

1. Зверева (Прохорова) М.С. Вопросы автоматизации процесса оптимального выбора с учетом риска // **Вестник Магнитогорского государственного технического университета** им. Г. И. Носова – Магнитогорск: Изд-во МГТУ им. Г.И. Носова, 2011. №2. С. 42-44.
2. Горелик В.А., Золотова Т.В., Прохорова М.С. Динамическая минимаксная задача управления риском. // **Ученые записки КнАГТУ**. 2012. №II-1(4). «Науки о природе и технике». Комсомольск-на-Амуре: ГОУВПО «КнАГТУ». С. 38-47.
3. Золотова Т.В., Прохорова М.С. Информационные аспекты и инструментальные средства оценки устойчивости на фондовом рынке. //

Ученые записки КнАГТУ. 2014. №II-1(18). «Науки о природе и технике». Комсомольск-на-Амуре: ГОУВПО «КнАГТУ». С. 28-34.

4. Прохорова М.С. О связи решений задач управления портфелем с линейной сверткой «математическое ожидание-дисперсия» и с ограничением по величине риска // **Управление риском**. М.: ООО «Анкил», 2014. №. 3(71). С. 11-17.
5. Прохорова М.С. Исследование связи решений задач на максимум линейной свертки «математическое ожидание – дисперсия» и на минимум дисперсии при ограничении по доходности // **Экономика, Статистика и Информатика. Вестник УМО**. М.: МЭСИ, 2014. № 3. С. 162–166.
6. Зверева (Прохорова) М.С., Золотова Т.В., Литвинцева З.К. Проблема выбора оптимального набора товаров при ограничении по объему средств // Научно-техническое творчество студентов и аспирантов: материалы 39-й научно-технической конференции аспирантов и студентов. Ч. 1 - Комсомольск-на-Амуре: ГОУВПО «КнАГТУ», 2009. - С. 98-99.
7. Зверева (Прохорова) М.С., Золотова Т.В. О некоторых моделях управления портфелем ценных бумаг // Научно-техническое творчество студентов и аспирантов: материалы 40-й научно-технической конференции аспирантов и студентов. Ч. 1 - Комсомольск-на-Амуре: ГОУВПО «КнАГТУ», 2010. – С. 72-73.
8. Горелик В.А., Золотова Т.В., Зверева (Прохорова) М.С. Об одной динамической задаче управления риском // Управление развитием крупномасштабных систем: Материалы Пятой международной конференции, Т.1. – М.: ИПУ РАН, 2011. – С. 106-109.
9. Зверева (Прохорова) М.С., Золотова Т.В. Об одной системе поддержки принятия решений на фондовом рынке // Научно-техническое творчество аспирантов и студентов: материалы 41-й научно-технической конференции аспирантов и студентов. Ч. 1 - Комсомольск-на-Амуре: ГОУВПО «КнАГТУ», 2011. – С. 178-179.
10. Зверева (Прохорова) М.С. Автоматизация процесса управления риском на фондовом рынке // Управление большими системами: материалы VIII Всероссийской школы-конференции молодых ученых. Магнитогорск: Изд-во МГТУ им. Г.И. Носова, 2011. - С. 297-301.
11. Прохорова М.С. Золотова Т. В. Инструментальная система управления портфелем ценных бумаг // Научно-техническое творчество аспирантов и студентов: материалы 42-й научно-технической конференции аспирантов и студентов. Ч. 3 - Комсомольск-на-Амуре: ГОУВПО «КнАГТУ», 2012. – С.244-245.
12. Прохорова М.С. Линейная динамическая минимаксная задача управления риском // Управление большими системами: материалы X Всероссийской школы-конференции молодых ученых. Том 2/ Уфимск. гос. авиац. тех. ун-т. – Уфа: УГАТУ, 2013. – С. 189-193.