МОСКОВСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

на правах рукописи

Прохорова Мария Сергеевна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ СРЕДСТВА ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ РИСКАМИ

Специальность 05.13.17 – теоретические основы информатики

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,

профессор ГОРЕЛИК В.А.

Москва 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. В настоящее время нельзя назвать область человеческой деятельности, в которой в той или иной степени не использовались бы математические методы теории принятия решений. Особенно это относится к сфере управления сложными системами, где процессы принятия решений основаны на анализе разнообразной информации. Поэтому теория принятия решений в условиях неполной информации базируется на научных знаниях о процессах обработки информации, составляющих предмет теоретической информатики [6, 50, 51, 63, 87].

В условия неполноты исходных данных о состоянии системы математическая постановка задачи принятия решений может быть сформулирована только на основе некоторой информационной модели [47, 55]. Неточность информации может быть связана с любым элементом системы: функциями цели, ограничениями, состоянием внешней среды, воздействием других систем. Существуют различные подходы к моделированию поведения в условиях неопределенности [20, 22, 57, 58, 59], однако главным при этом является информационный аспект.

Проблемой принятия решений в условиях неполной информации занимались такие известные математики как Р. Беллман, Ю.Б. Гермейер, Л. Заде, Н.Н. Моисеев, Дж. Нейман и другие. Если имеется неопределенность в формализации цели, как правило, связанная с наличием нескольких критериев эффективности [68, 69], то понятие оптимального решения становится неоднозначным. Первым понятие оптимальности в многокритериальной задаче сформулировал В. Парето в 1904 году. Согласно принципу оптимальности по Парето [101] возможные решения следует искать среди альтернатив, улучшение которых по одним критериям приводит к их ухудшению по другим критериям. Позднее появились другие подходы, позволяющие отбраковывать неприемлемые альтернативы, например, принцип равновесия Нэша [1, 3, 19, 46, 100].

В задачах управления в условиях неопределенности отсутствие единого принципа оптимальности является принципиальным. В работах Ю.Б. Гермейера [20, 21] получил развитие принцип максимального гарантированного результата как единственное строгое математическое понятие решения, исключающее риск. Обобщеный принцип гарантированного результата основывается на различных предположениях об информированности управляющего органа и оценках риска. Можно считать крайним его воплощением теорию нечетких множеств Л. Заде [37, 110, 111], который предложил правила выбора формулировать в терминах функций принадлежности.

Идеи процесса последовательного анализа вариантов и отсеивания неконкурентоспособных решений восходят к А.А. Маркову [49], А. Вальду [15, 109], Р. Айзексу [93]. Они привели к появлению метода динамического программирования Р. Беллмана [4, 5]. В.С. Михалевич [53, 54] разработал общую схему формализованного описания последовательного анализа, включающую динамическое программирование и метод ветвей и границ.

Как было сказано, при формализации задачи принятия решений в условиях неполной информации требуется построение информационной модели. Математическое моделирование за последние годы стало важнейшим инструментом исследований. Большой вклад в разработку информационных моделей и имитацию сложных процессов внесли Ю.И. Журавлев, А.А. Петров, Ю.Н. Павловский, И.Г. Поспелов [36, 60, 61, 62, 64-67, 71, 72, 114].

При моделировании процессов управления в сложных системах (т. е. системах, состоящих из разнотипных элементов с разнотипными связями) неизбежно возникает проблема соотношения эффективности и устойчивости. Существуют различные понятия устойчивости (гомеостазиса), применяемые в макроэкономике, метеорологии, механике, социологии, теории автоматического управления, теории вероятностей, численном анализе, авиации и др. Устойчивость вообще – это способность системы сохранять текущее состояние при наличии внешних воздействий. Близкое понятие гомеостазис означает саморегуляцию, способность открытой системы сохранять постоянство своего внутреннего состояния посредством скоординированных реакций, направленных на поддержание динамического равновесия. Открытой является система, которая не может считаться изолированной по отношению к окружающей среде в каком-либо аспекте – информационном, материальном, энергетическом. Взаимодействие с окружающей средой характеризуется высокой степенью неопределенности.

Сочетание устойчивости и эффективности функционирования сложных систем или процессов связано с обработкой информации при выборе управлений таким образом, чтобы критерий эффективности достигал оптимального значения в области гомеостазиса. Под устойчивостью системы может пониматься безопасность ее функционирования. Тогда она обеспечивается такими управлениями, которые снижают в максимальной степени возможность появления неблагоприятных ситуаций. Разумное использование имеющейся информации позволяет минимизировать влияние неопределенность в задачах принятия решений и достичь наибольшего возможного значения эффективности.

Само появление понятия «риск» является следствием неточности исходной информации [18, 44, 80, 83]. Под риском понимается непредсказуемость состояния системы или течения процесса как результат неполноты информации [28]. Ситуация риска связана с возможностью нарушения устойчивого состояния системы или прогнозируемого течения процесса вследствие возникновения непредвиденных событий.

В последнее время появилось много работ по управлению риском, и в основном они относятся к финансово-экономической сфере деятельности [8, 10-14, 31, 32, 45, 48, 79, 81]. Управление риском включает как непременный атрибут процедуры оценки факторов риска и максимального снижения неопределенности при принятии решений, обеспечивающие безопасность функционирования системы. Методы управления риском, который возникает в результате случайного или неопределенного воздействия внешней среды, внутрисистемного нарушения гомеостазиса в условиях децентрализации управления, неточности или противоречивости исходных данных, были развиты в работах Г. Александера, В.А. Горелика, В.И. Жуковского, Г. Марковица, У. Шарпа [23-28, 33-35, 77, 78, 85, 97, 98, 113] и др.

Разработаны различные математические модели управления риском при стратегическом и фондовом инвестировании, в условиях децентрализованного управления и др. Однако вопросы взаимосвязи этих моделей управления риском, чувствительности оптимальных управлений к объемам используемой информации не были исследованы. Среди разнообразия разработанных моделей управления риском возникает неопределенность в выборе той или иной модели, поэтому данные вопросы становятся актуальными при принятии решения.

Исследование информационных моделей управления риском представляет собой проблему теоретических основ информатики. Она относится к следующим научным направлениям: разработка и анализ моделей информационных процессов, разработка и исследование моделей и алгоритмов анализа данных, исследование, в том числе с помощью средств вычислительной техники, информационных процессов.

Так как в задачах принятия решений в условиях неполной информации (риска) не может быть единого принципа оптимальности и существует много моделей оценки и управления риском, то возникает вопрос о связи между ними и выборе того или иного подхода в конкретной ситуации. Анализ современных российских и зарубежных работ, например, [9, 82, 88, 89, 91, 95, 104, 105, 112], позволяют сделать вывод, что эти аспекты детально не исследованы.

Таким образом, актуальной **задачей** теоретической информатики является исследование взаимосвязи различных математических моделей управления риском и разработка на их основе инструментальных средств обработки информации для нахождения оптимальных решений в условиях неполной информации. Решению этой задачи и посвящено настоящее исследование.

Целью работы является исследование взаимосвязи типичных моделей управления риском и идентификация параметров моделей с точки зрения их эквивалентности, а также разработка программных средств, реализующих методы обработки информации и принятия решений.

Объект исследования – математические модели информационных процессов и алгоритмы анализа данных как основа принятия решений в условиях неполной информации.

Предмет исследования – математические модели управления риском и связь между решениями задач управления для этих моделей, а также их реализация в виде инструментальных средств поддержки принятия решений.

Методы исследования. В диссертации используются методы линейной алгебры, математического анализа, математического программирования, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей, математической статистики, компьютерной обработки данных.

Для реализации поставленной цели решались следующие **задачи**:

- определение необходимых и достаточных условий совпадения оптимального управления при использовании различных стохастических моделей управления риском;

- определение необходимых и достаточных условий совпадения оптимального управления при использовании различных моделей управления риском в условиях неопределенности;

- применение результатов исследования связи задач управления риском при разработке инструментальных средств обработки информации и поддержки принятия решений на фондовом рынке.

Научная новизна и теоретическая значимость. В работе представлены подходы к решению проблемы соотношения устойчивости и эффективности функционирования систем в условиях неполной информации. Исследованы вопросы взаимосвязи решений задач для разных моделей управления риском в стохастических условиях и в условиях неопределенности. Наиболее важные теоретические результаты, характеризующие новизну работы:

- получены условия, характеризующие принадлежность оптимальных портфелей задачи максимизации доходности с ограничением по дисперсии и задачи минимизации дисперсии с ограничением по доходности множеству эффективных портфелей;

- получены значения коэффициента риска, дающие одинаковые оптимальные решения в задачах управления риском, использующих линейную свертку критериев «математическое ожидание – дисперсия», свертку этих критериев типа отношения, перевод одного критерия в ограничение;

- получено значение коэффициента риска, при котором решения задач максимизации линейной свертки критериев «доходность – дисперсия» и минимизации вероятностной функции риска совпадают в предположении нормального или экспоненциального распределения случайных величин доходностей;

- получены значения коэффициента риска в условиях неопределенности, при котором решение задачи максимизации линейной свертки критериев «прибыль – максимальный риск» совпадает с решением задач управления риском, использующих свертку этих критериев типа отношения и перевод одного критерия в ограничение;

- получены достаточные условия существенности ограничений по максимальному риску в производственной задаче;

- получено значение коэффициента риска, при котором решение задачи минимизации отношения риска, заданного в метрике l_1, к ожидаемой прибыли и задачи максимизации линейной свертки критериев «прибыль – максимальный риск» совпадают.

Практическая значимость. Результаты проведенного исследования позволяют определять отношение к риску (коэффициент риска), если для нахождения решения использовалась модель с ограничением по одному из критериев, модель со сверткой типа отношения или с вероятностной функцией риска. Это дает возможность ранжировать различные портфели проектов (ценные бумаги, производственные задания) по степени избегания риска и определять портфель проектов с наименее или наиболее значимым риском. Построена автоматизированная система поддержки принятия решений, которая позволяет проводить сравнительный анализ рассмотренных моделей и оценивать чувствительность оптимальных управлений к объему используемой статистической информации.

Основные положения, выносимые на защиту:

- предлагаемые математические методы обработки информации в стохастических задачах управления риском и в задачах управления риском в условиях неопределенности могут служить теоретической основой реальных процедур определения уровня риска и принятия решений в условиях неполной информации;

- проведенная классификация задач управления риском (в стохастических условиях и в условиях неопределенности) в сложных системах и исследование их взаимосвязи обеспечивают научную обоснованность выбора метрики при построении функции риска и способа свертки двух критериев: эффективности и риска;

- решения двухкритериальных задач оптимального выбора при наличии случайных или неопределенных неконтролируемых факторов совпадают при выполнении определенных условий, налагаемых на исходные данные типичных моделей управления риском.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на 39-й научно-технической конференции аспирантов и студентов «Научно-техническое творчество аспирантов и студентов» (Комсомольск-на-Амуре, КнАГТУ, 2009 г.); на 40-й научно-технической конференции аспирантов и студентов «Научно-техническое творчество аспирантов и студентов» (Комсомольск-на-Амуре, КнАГТУ, 2010 г.); на 41-й научно-технической конференции аспирантов и студентов «Научно-техническое творчество аспирантов и студентов» (Комсомольск-на-Амуре, КнАГТУ, 2011 г.); VIII Всероссийской школе-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (Магнитогорск, МГТУ, 2011 г.); V международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (Москва, ИПУ РАН, 2011 г.); на 42-й научно-технической конференции аспирантов и студентов «Научно-техническое творчество аспирантов и студентов» (Комсомольск-на-Амуре, КнАГТУ, 2012 г.); X Всероссийской школе-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (Уфа, УГАТУ, 2013 г.).

Публикации. Основное содержание диссертации отражено в 5 научных статьях [30, 42, 43, 75, 76], опубликованных в журналах, рекомендованных ВАК, и в материалах научных конференций [29, 38, 39, 40, 41, 73, 74].

Основное содержание работы. Работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, одного приложения. В первой главе (1.1 – 1.2) рассматриваются задачи принятия решений при воздействии на систему случайных неконтролируемых факторов с заданными законами распределения.

В 1.1 приведены методы статистической обработки информации. В задачах оценки финансовых рисков обработка статистической информации приводит к таким понятиям, как случайная доходность, математического ожидание доходности, ковариационная матрица портфеля ценных бумаг, функция риска в метрике l_2^2 (дисперсия) и в метрике и l_2 (СКО), вероятностная функции риска. Рассмотренные здесь функции риска используются далее в задачах управления риском на фондовом рынке.

В 1.2 проведено исследование связи решений задач нахождения оптимального портфеля ценных бумаг с использованием линейной свертки математического ожидания доходности портфеля и функции риска портфеля, заданной в метрике l_2^2 (дисперсия), свертки типа отношения, в которой функция риска портфеля задана в метрике l_2 (СКО – среднеквадратическое отклонение), модели с ограничением по дисперсии и с ограничением по доходности, с вероятностной функцией риска. Оптимизационные задачи с использованием свертки типа отношения и с вероятностной функцией риска сведены к классическим задачам квадратического программирования. Для каждой пары задач получено значение коэффициента риска, при котором решение задачи максимизации линейной свертки критериев «доходность – дисперсия» совпадает с решением задачи управления риском с использованием другой свертки этих критериев и/или другой функции риска.

Вторая глава (2.1 – 2.3) посвящена задачам принятия решений в условиях неопределенности, когда неопределенность в системе связана с воздействием внешних факторов, влияющих на параметры модели, но может зависеть и от деятельности подсистем сложной системы.

В 2.1 представлены минимаксные задачи управления риском, которые соответствуют неопределенным неконтролируемым факторам, но могут быть при определенных предположениях сформулированы и для некоррелированных стохастических процессов. Этим случаям соответствует оценка риска системы в метрике l_∞. В работе рассмотрены линейная свертка, свертка типа отношения критериев ожидаемой эффективности (прибыли) и функции риска, модель с ограничением по риску. Все оптимизационные задачи сведены к задачам линейного программирования. Для каждой пары задач получено значение коэффициента риска, при котором решение задачи максимизации линейной свертки критериев «прибыль – максимальный риск» совпадает с решением задачи управления риском в производственной системе с использованием другой свертки этих критериев.

В 2.2 представлены задачи управления риском, в которых оценка риска определена в метрике l_1. Рассмотрены линейная свертка и свертка типа отношения критериев ожидаемой эффективности (прибыли) и функции риска. Все оптимизационные задачи сведены к известным задачам математического программирования. Получено значение коэффициента риска, при котором решение производственной задачи минимизации отношения риска, заданного в метрике l_1, к ожидаемой прибыли и задачи максимизации линейной свертки критериев «прибыль – максимальный риск» совпадают.

В 2.3 рассмотрена непрерывная минимаксная динамическая задача управления риском в системе, для которой процесс функционировании описывается дифференциальными уравнеими. Критерий функционирования системы, состоящей из n подсистем, в предположении гарантированной оценки риска представляет собой интегральный функционал с негладкой подынтегральной функцией. Сформулированные необходимые условия оптимальности в случае линейности по переменной управления были использованы при решении задачи о распределения инвестиций.

В третьей главе (3.1 – 3.5) предложен автоматизированный метод нахождения решения, демонстрирующий результаты проведенного исследования.

В 3.1, 3.2 приведена постановка задачи построения автоматизированной системы поддержки принятия решений на фондовом и дано краткое описание системы. Созданная программа использует статистические данные для нахождения математических ожиданий случайных значений доходностей и ковариационной матрицы ценных бумаг, а также различные математические модели для нахождения оптимального портфеля инвестора и оценки чувствительности параметров этих моделей.

В 3.3 представлены результаты вычислительных экспериментов, подтверждающие обоснованность и работоспособность предлагаемых методов. Во фрейме (GroupBox) «Обработка статистической информации» выводятся математические ожидания доходностей ценных бумаг за каждый рабочий день, СКО и ковариации всех ценных бумаг. Во фрейме «Модель с ограничением по дисперсии» пользователь задает пороговое значение дисперсии, во фрейме «Модель с ограничением по доходности» пользователь задает пороговое значение доходности, во фрейме «Модель с задаваемым отношением к риску» пользователь задает коэффициент риска. Во всех случаях программа автоматически определяет оптимальный портфель.

В 3.4 рассмотрены процедуры оценки чувствительности решения к объему статистической информации, а в 3.5 – оценки устойчивости стратегии инвестора.

В заключении сформулированы основные результаты работы.

В приложении приведен код программы, написанной на языке программирования VB.NET.

ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ В СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ РИСКОМ

1.1. Методы статистической обработки информации в задачах оценки рисков (на примере фондового рынка)

В стохастических моделях управления эффективность обычно определяется как математическое ожидание некоторой функции выигрыша, а риск - как математическое ожидание потерь в некоторой метрике в результате отклонения параметров системы или процесса от плановых величин. В работе [97] Г. Марковиц сформулировал задачу определения оптимального состава портфеля ценных бумаг в виде максимизации линейной свертки критериев эффективности и риска, а именно, их разности с весовым коэффициентом, равным единице. В так называемой задаче Г. Марковица риск задается в метрике l_2^2 как дисперсия доходности инвестиционного портфеля. У. Шарп и Г. Александер в задаче управления портфелем использовали метрику l_2 , т.е. среднеквадратическое отклонение (СКО) [85]. В исследованиях У. Шарпа, Г. Александера предлагается критерий эффективности управления в виде свертки критериев эффективности и риска типа отношения. Эта свертка использует математическое понятие коэффициента вариации. Г. Конно и Г. Ямазаки оценивали риск в метрике l_1 [94]. Существует понятие риска в стохастических моделях управления как вероятности возникновения неблагоприятного события или заданного уровня потерь [13].

Заметим, что задача управления портфелем ценных бумаг является весьма типичным и удобным примером для интерпретации стохастических моделей управления риском, однако указанные математические подходы к определению оптимальных решений могут быть распространены на другие проблемы оценки устойчивости сложных систем и процессов.

Одна из основных функций финансового рынка – преобразование риска. Рыночный механизм производит оценку различных типов рисков (так называемая премия за риск). Однако даже если рынок находится в равновесии, т. е. все риски оценены справедливо, это не значит, что все ценные бумаги одинаково привлекательны для различных инвесторов. На предпочтения инвесторов влияют их финансовое положение, индивидуальное отношение к риску, наличная структура активов и пассивов, положение на рынке и многое другое. Процесс управления риском включает определение видов риска, которые являются существенными для инвестора и должны быть исключены, оценку риска для различных ценных бумаг и формирование портфеля с заданными характеристиками доходности и риска.

Принято выделять следующие *виды риска*:

- рыночный риск, связанный с изменением общего уровня процентных ставок,

- профильный риск, связанный с изменением временной структуры ставок,

- риск изменчивости, связанный с колебанием доходности и несимметричным влиянием ее роста и падения,

- секторный риск, связанный с разным поведением различных групп ценных бумаг,

- валютный риск, связанный с изменением обменных курсов,

- кредитный риск, связанный с возможным неисполнением эмитентом своих финансовых обязательств,

- риск ликвидности, связанный с возможными изменениями спреда между ценой спроса и предложения,

- остаточный риск, т. е. специфический несистемный риск, связанный с поведением конкретной бумаги.

Таким образом, каждая ценная бумага имеет целый набор атрибутов, связанных с разного вида рисками. Если еще учесть, что каждый вид риска может оцениваться с той или иной степенью точности разными показателями, то ясно, что портфель ценных бумаг характеризуется вектором критериев оценки риска. С другой стороны, эффективность портфеля также может оцениваться разными величинами (простая или эффективная доходность, доходность к аукциону или погашению, доход или чистая прибыль и т. д.), причем в качестве их измерителя для простоты часто берутся те или иные приближенные показатели. Поэтому портфель ценных бумаг в общем случае характеризуется вектором оценок эффективности и риска и этот вектор должен, вообще говоря, формироваться инвестором.

Большинство разумных инвесторов не склонно к риску, т. е. стремится по возможности исключить неопределенность в своих результатах. Следует иметь в виду, что в условиях рыночного равновесия полное исключение риска приводит к доходности портфеля, равной ставке безрискового вклада, что вряд ли может быть приемлемо для инвестора. Поэтому необходимо выделять виды риска, которые должны быть исключены полностью или частично, и соотносить прирост эффективности с увеличением риска.

Существует множество различных стратегий управления риском, однако при этом могут быть условно выделены два направления. Первое связано с диверсификацией портфеля, состоящего из первичных финансовых инструментов (акций, облигаций), таким образом, чтобы взаимно погасить воздействие тех или иных факторов. Второе связано с использованием имеющихся или конструированием новых производных финансовых инструментов (фьючерсов, опционов), специально предназначенных для страхования от риска. Управление портфелем, основанное на использовании первичных инструментов, не учитывает будущей информации, поэтому по терминологии теории управления может быть отнесено к программному управлению (соответствующие модели управления портфелем иногда называют моделями финансовой оптимизации). Управление портфелем, основанное на использовании производных инструментов, учитывает будущую информацию (т. к. дает возможность использовать приобретаемое право в зависимости от будущей конъюнктуры), поэтому может назваться управлением с обратной связью или синтезом (соответствующие модели иногда называют моделями финансового инжиниринга). Здесь мы остановимся только на моделях финансовой оптимизации.

Как уже говорилось выше, портфель ценных бумаг характеризуется вектором критериев оценки эффективности и риска, т. е. задачи формирования и реструктуризации портфеля относится к разделу векторной оптимизации. Такие задачи в исходном виде не имеют четкой постановки, поэтому важная роль аналитика состоит в формализации задачи. Существуют разные подходы к многокритериальным задачам.

Помимо проблемы многокритериальности аналитик должен решить и упомянутую проблему неполноты информации, т. е. выбрать способы оценки будущих результатов. При этом, во-первых, необходимо установить какого типа неконтролируемые факторы: случайные (т. е. с заданными законами распределения) или неопределенные (т. е. с заданной областью значений), и, во-вторых, какие виды оценки параметров приемлемы (в финансовой оптимизации чаще всего факторы считают случайными, а в качестве оценки эффективности берут математическое ожидание, однако это допустимо только при большом количестве операций на рынке с незначительными возможными ущербами, в крупных единичных операциях лучше оценка по гарантированному результату).

Выбор того или иного подхода к проблемам многокритериальности, неопределенности и риска приводит к строго формализованной задаче математического программирования, для решения которой уже можно применять существующие методы оптимизации (важно также выбрать подходящий метод для данного типа задачи, однако в современных пакетах оптимизации этот процесс в определенной степени автоматизирован). Таким образом, чрезвычайно важная роль финансового менеджера и аналитика состоит в выборе адекватных целей и ограничений, видов ценных бумаг с нужными атрибутами, анализе соотношения доходностей и рисков, точной формулировке задачи финансовой оптимизации. При этом существующий аппарат прогнозирования и оптимизации помогает, но не снимает с них этих функций.

Введем в рассмотрение характеристики случайных величин, которые будут использоваться в дальнейшем [17].

Математическое ожидание случайной величины – среднее значение случайной величины, одна из числовых характеристик распределения вероятностей случайной величины. В англоязычной литературе математическое ожидание случайной величины Y обозначается через $E(Y)$ (например, от англ. Expected value или нем. Erwartungswert), в русской $M(Y)$ – (возможно, от англ. Mean value или нем. Mittelwert, а возможно от рус. Математическое ожидание). Математическое ожидание дискретной случайной величины вычисляется по формуле $M(Y)=\sum_{k=1}^{N} p_k y_k$, где y_k – значение случайной величины Y (например, доходности ценной бумаги); p_k – вероятность возникновения значения y_k; N – количество значений случайной величины. Если значения случайной величины равновероятны, то $p_k = \frac{1}{N}$, i=1,…,N.

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания. Обозначается $D(Y)$ в русской литературе и $var\, x$ (англ. variance) в зарубежной. В статистике часто употребляется обозначение σ_Y^2 или σ^2. Квадратный корень из дисперсии, равный σ, называется средним квадратическим отклонением (СКО), стандартным отклонением или стандартным разбросом. Стандартное отклонение измеряется в тех же единицах, что и математическое ожидание случайной величины, а дисперсия измеряется в квадратах этой единицы измерения. Дисперсия рассчитывается по формуле $D(Y)=M(Y-M(Y))^2$.

Математическая статистика занимается разработкой методов анализа экспериментальных данных. Одной из ее задач является задача экспериментального определения числовых характеристик случайных величин. Пусть произведено N опытов, в результате которых получено множество $\{y_1, \ldots, y_N\}$ значений случайной величины Y. Естественно определить математическое ожидание этой величины по формуле

$$M^*(Y) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k\ , \tag{1.1.1}$$

а дисперсию – по формуле

$$D^*(Y) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(y_k - M(Y))^2\ . \tag{1.1.2}$$

Рассмотрим величины $M^*(Y)$ и $D^*(Y)$ как случайные, определенные формулами (1.1.1) и (1.1.2). Математическое ожидание величины $M^*(Y)$ равно $M(Y)$, а математическое ожидание $D^*(Y)$ равно $\dfrac{D(Y)(N-1)}{N}$. Эти факты принято выражать следующим образом: экспериментальная оценка (1.1.1) математического ожидания является несмещенной, а экспериментальная оценка (1.1.2) дисперсии является смещенной. Это означает, что если повторять много раз серию из N опытов, получая каждый раз экспериментальные значения случайной переменной X и вычислять каждый раз значение $D^*(Y)$, то оно будет колебаться не около $D(Y)$, а около $\dfrac{D(Y)(N-1)}{N}$. Несмещенная оценка величины дисперсии дается формулой $D(Y) = \dfrac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(y_k - M(Y))^2$.

Пусть на фондовом рынке случайная величина доходности r некоторой ценной бумаги за N предыдущих периодов принимала значения $r_1, \ldots, r_N$. Тогда $M(r)$ (можно обозначить также $\bar{r}$) есть $M(r) = \dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} r_k$, а дисперсия доходности $D(r)$ (или σ^2) этой ценной бумаги равна $D(r) = \dfrac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(r_k - \bar{r}))^2$.

Отметим, что для расчета, например, дневной доходности ценной бумаги используется формула $r_k = \frac{S_k - S_{k-1}}{S_{k-1}}$, где r_k – доходность ценной бумаги k-й день, S_k – стоимость ценной бумаги при закрытии на k-й день, S_{k-1} – стоимость ценной бумаги при закрытии на (k-1)-й день. Аналогично рассчитывается доходность ценной бумаги за любой период.

Для описания системы случайных величин кроме математических ожиданий и дисперсий используют и другие характеристики; к их числу относятся корреляционный момент (ковариация) и коэффициент корреляции.

Корреляционным моментом $\sigma_{Y_1Y_2}$ (*ковариацией*) случайных величин Y_1 и Y_2 называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин от своих математических ожиданий $\sigma_{Y_1Y_2} = M([Y_1 - M(Y_1)][Y_2 - M(Y_2)])$.

Корреляционный момент дискретных случайных величин вычисляют по формуле $\sigma_{Y_1Y_2} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{S}[y_{1k} - M(Y_1)][y_{2l} - M(Y_2)]p(y_{1k}, y_{2l})$, где y_{1k} – значение случайной величины Y_1, k=1, …, N, y_{2l} – значение случайной величины Y_2, l=1, …, S, $p(y_{1k}, y_{2l})$ – вероятность того, что система (Y_1, Y_2) случайных величин принимает значения (y_{1k}, y_{2l}).

Корреляционный момент служит для характеристики связи между величинами Y_1 и Y_2. Если корреляционный момент не равен нулю, то случайные величины Y_1 и Y_2 являются зависимыми. Положительный корреляционный момент указывает на то, что две случайные величины меняются в одну сторону (одновременно увеличиваются или уменьшаются), при отрицательном – в разные.

Если имеется N измерений двух случайных величин, то статистический корреляционный момент имеет вид

$$\sigma_{Y_1Y_2} = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}[y_{1k} - M(Y_1)][y_{2l} - M(Y_2)].$$

Для двух ценных бумаг, доходности которых r_1 и r_2 принимали значения за N предыдущих периодов $(r_{11}, \ldots, r_{1N})$ и $(r_{21}, \ldots, r_{2N})$ соответственно, корреляционный момент имеет вид $\sigma_{r_1 r_2} = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}[r_{1k} - \bar{r}_1][r_{2l} - \bar{r}_2]$, где $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ – математические ожидания доходностей двух ценных бумаг.

Коэффициентом корреляции $\rho_{Y_1 Y_2}$ случайных величин Y_1 и Y_2 называют отношение корреляционного момента к произведению СКО этих величин: $\rho_{Y_1 Y_2} = \frac{\sigma_{Y_1 Y_2}}{\sigma_{Y_1}\sigma_{Y_2}}$.

Коэффициент корреляции характеризует степень тесноты линейной зависимости между случайными величинами. Если случайные величины Y_1 и Y_2 связаны точной линейной функциональной зависимостью $Y_1 = aY_2 + b$, то $\rho_{Y_1 Y_2} = \pm 1$, причем знак «плюс» или «минус» берется в зависимости от того, положителен или отрицателен коэффициент a. В общем случае, когда величины Y_1 и Y_2 связаны произвольной вероятностной зависимостью, имеем $-1 < \rho_{Y_1 Y_2} < +1$. Для независимых случайных величин коэффициент корреляции равен нулю $\rho_{Y_1 Y_2} = 0$. Коэффициент корреляции нормирует ковариацию для облегчения сравнения с другими параметрами случайных переменных.

Минимальное число характеристик, с помощью которых может быть охарактеризована система n случайных величин $Y_1, \ldots, Y_n$, сводится к вычислению n математических ожиданий, характеризующих среднее значение величин; n дисперсий, характеризующих их рассеяние; $n(n\text{-}1)$ корреляционных моментов, характеризующих попарную корреляцию всех величин, входящих в систему.

Все корреляционные моменты и дисперсии удобно расположить в виде матрицы $K = (\sigma_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$, которая называется корреляционной матрицей системы случайных величин. Таким образом, если на фондовом рынке имеются n финансовых инструментов, то случайные величины их доходностей $r_1, \dots, r_n$ могут быть охарактеризованы вектором математических ожиданий $\bar{r} = (\bar{r}_1, ..., \bar{r}_n)$ и корреляционной матрицей $K=(\sigma_{ij})_{n\times n}$. Известно, что корреляционная матрица неотрицательно определена, далее везде в работе предполагается, что она положительно определена, и, следовательно, невырождена (это не очень сильное предположение, исключающее только вырожденные случаи).

В моделях принятия решений в условиях случайного воздействия риск чаще всего определяется как математическое ожидание отрицательных последствий, которые в свою очередь представляют собой отклонение результата деятельности системы или процесса от запланированной величины в некоторой метрике. Для оценки риска можно использовать подход, связанный с введением функции риска.

Пусть x – стратегия ЛПР, которая может быть скалярной или векторной величиной; $r(x)$ – случайная функция, определяющая результат деятельности ЛПР (например, инвестора) в случае возникновения неблагоприятного события; $d(x)$ – функция, определяющая ожидаемый результат деятельности ЛПР, не связанный с возможностью возникновения неблагоприятного события, приводящего к убыткам или потерям. В данном случае имеется в виду, что $d(x)$ не обязательно математическое ожидание величины $r(x)$, и возможно $d(x) \geq r(x), \forall x$, но, в частности, $d(x) = Mr(x) = \bar{r}(x)$.

Отклонение $r(x)$ от $d(x)$ представляет собой функцию потерь ЛПР. Функцию риска будем задавать в соответствии с выбранной метрикой, считая вероятности возникновения неблагоприятных событий известными.

В метрике l_1 классическая функция риска имеет вид

$$R_{absl_1}(x) = M\,|\,r(x) - d(x)\,|, \tag{1.1.3}$$

Согласно метрике l_2^2 оценка риска есть дисперсия

$$R_{absl_2^2}(x) = M(r(x) - d(x))^2. \tag{1.1.4}$$

Метрика l_2 приводит к функции риска в виде СКО

$$R_{absl_2}(x) = (M(r(x) - d(x))^2)^{1/2}. \tag{1.1.5}$$

Для функций риска (1.1.3)-(1.1.5) $d(x) = Mr(x) = \bar{r}(x),$ т. е. представляет собой математическое ожидание величины $r(x)$. Оценки риска (1.1.3) – (1.1.5) представляют собой абсолютные функции риска.

Иногда требуется оценить риск на единицу выгоды или выигрыша. В этой ситуации можно использовать относительные функции риска. В соответствии с выбранной метрикой определим *относительные функции риска*.

Метрика l_2^2 дает относительную функцию риска вида

$$R_{rell_2^2}(x) = \frac{M(r(x) - d(x))^2}{d(x)}, \tag{1.1.6}$$

Метрика l_2 приводит относительную функцию риска к виду

$$R_{rell_2}(x) = \frac{(M(r(x) - d(x))^2)^{1/2}}{d(x)}, \tag{1.1.7}$$

Аналогично определяются относительная функция риска, использующая метрику l_1.

Вероятностные функции риска могут быть определены по-разному. Пусть известно некоторое требуемое значение результата деятельности ЛПР (например, инвестора) $r_{тр}$ (требуемой доходности). Тогда функцию риска можно представить в виде

$$R_{prob\,\text{тр}}(x) = P(r(x) < r_{\text{тр}}). \qquad (1.1.8)$$

Для ожидаемого результата деятельности системы $d(x)$ функции риска имеют вид

$$R_{probr}(x) = P(r(x) < d(x)), \qquad R_{prob\delta}(x) = P(d(x) - r(x) \geq \delta),\ \delta > 0. \qquad (1.1.9)$$

Другой оценкой риска, используемой инвесторами при принятии решений на фондовом рынке, является Value at Risk.

Value at Risk (VaR) – это стоимостная мера риска. Это выраженная в денежных единицах оценка величины, которую не превысят ожидаемые в течение данного периода времени потери с заданной вероятностью.

Таким образом, VaR портфеля – это наименьшая доходность, которую предполагается получить на рассматриваемом временном горизонте с вероятностью α: $\mathrm{VaR}_{\alpha}(Y) = \max(\vartheta | P(Y \geq \vartheta) \geq \alpha)$, где $P(Y \geq \vartheta)$ – вероятность того, что случайная величина Y (например, доходности портфеля) принимает значение не меньше ϑ (границы минимальной доходности). С точки зрения теории вероятностей VaR – это α-квантиль заданного распределения. Существуют различные методы нахождения VaR, к основным из них относят историческое моделирование, вариационно-ковариационный (или аналитический) подход и имитационное моделирование по методу Монте-Карло. Каждый из представленных методов имеет свои достоинства и недостатки.

Рассмотрим один из способов расчета VaR, предполагающий использование исторических (статистических) данных о ценах на акции в инвестиционном портфеле для прогнозирования будущих потерь. Основным принципом действия метода VaR является то, что цены на акции в будущем будут вести себя так же, как и в прошлом. В этом и заключается метод использования исторических данных. При расчете VaR, как правило, подразумевается, что доходность акций имеет нормальный закон распределения. В неявном виде VaR изображается формулой $P(\mathrm{VaR} \geq Y) = \alpha$

или $\alpha = \int_{-VaR}^{\infty} f(Y)dY$, где $f(Y)$ – плотность нормального распределения, Y – потери портфеля, выраженные в денежных единицах. Под потерями в данном случае понимается отрицательное изменение стоимости портфеля, т. е. отрицательная разница между стоимостью портфеля в конце и в начале периода. Стоимостная мера риска VaR позволяет рассчитать рыночный риск, т. е. риск понести потери из-за неблагоприятных движений рынка. Величина VaR рассчитывается следующим образом: $VaR_p = u_\alpha \sigma_p W$, где u_α – α-квантиль нормального распределения (определяется из таблицы значений), σ_p – СКО портфеля, W – общий объем портфеля в денежных единицах.

1.2. Исследование связи решений стохастических задач управления для разных моделей оценки риска (на примере фондового рынка)

Моделирование поведения инвесторов на фондовом рынке при формировании своих портфелей ценных бумаг предполагает решение вопроса о соотношении доходности и риска портфеля [85, 97, 98]. Отметим, что доходность портфеля представляет собой случайную величину, характеризующуюся математическим ожиданием и дисперсией. Последняя характеристика есть величина отклонения действительного значения доходности от ожидаемого, которая в данном случае является оценкой риска. Более подробно об оценках риска и их использовании при моделировании различных процессов изложено в [23-28]. Различные ценные бумаги отличаются как по доходности, так и по степени надежности. Поэтому инвесторы, диверсифицируя портфели (т. е. вкладывая средства в ценные бумаги нескольких видов), стремятся достичь лучшего соотношения риск – доходность. При этом риск и доходность портфеля становятся функциями от объема средств, инвестируемых в каждую ценную бумагу. Начала портфельного анализа были положены в работах Г. Марковица [97]. Им была впервые разработана модель нахождения оптимального портфеля. При этом в качестве оценки риска Г. Марковиц использовал функцию риска в метрике l_2^2

(дисперсия). В книге [98] задача поиска оптимального портфеля была поставлена им как задача минимизации разности дисперсии и математического ожидания доходности портфеля (коэффициент риска при дисперсии равен 1). Кроме того, в той же книге рассмотрена задача на максимум математического ожидания доходности при ограничении на дисперсию, а наиболее распространена сейчас задача минимизации дисперсии при ограничении по доходности. В работе [23] авторами предложена задача минимизации свертки типа отношения с функцией риска, заданной в метрике l_2 (СКО), а также задача с вероятностной функцией риска. Однако любая задача, решением которой является эффективный портфель, эквивалентна задаче максимизации линейной свертки критериев «математическое ожидание – дисперсия» (в силу свойств выпуклости она представляет собой необходимые и достаточные условия парето-оптимальности). В настоящей главе рассмотрены методы многокритериальной оптимизации: линейная свертка критериев «математическое ожидание – дисперсия», перевод одного критерия в ограничение, где в ограничение переводится ожидаемая доходность или дисперсия портфеля, свертка типа отношения, а также задача с вероятностной функцией риска. Найдены соотношения между параметрами этих методов, при которых они являются эквивалентными, т. е. дают одинаковые оптимальные портфели.

1.2.1. Модель управления риском с линейной сверткой «математическое ожидание–дисперсия»

В основе рассматриваемых нами математических моделей фондового рынка лежит предположение, что теоретически существует вероятностное распределение n-мерного вектора случайных величин доходностей r_i финансовых инструментов на фондовом рынке. При этом известно, что доходности представляют собой взаимосвязанные случайные величины и мерой, определяющей эту взаимосвязь, служит ковариация доходностей.

Будем считать, что фондовый рынок характеризуется вектором математических ожиданий доходностей финансовых инструментов $\bar{r} = (\bar{r}_1,...,\bar{r}_i,...,\bar{r}_n)$ и ковариационной матрицей $K = (\sigma_{ij})_{n\times n}$. Предположим, что инвесторы основывают свое поведение на этой информации. Различие между ними заключается в отношении к риску, выражающееся в значении коэффициента в целевой функции, представляющей собой линейную свертку двух критериев: математического ожидания и дисперсии случайных доходностей портфелей.

Рассмотрим индивидуальное поведение инвестора, управление которого представляет собой вектор x (портфель инвестиций). Компонентами x_i вектора x являются доли средств, вкладываемые в финансовые инструменты из конечного списка (i=1,…,n). Определим оптимальный портфель как решение задачи на максимум линейной свертки критериев математического ожидания и дисперсии случайного значения доходности портфеля:

$$\max_x[\bar{r}x - \alpha(xKx)], \quad xe = 1,\ x \geq 0, \qquad (1.2.1)$$

где $\alpha > 0$ – весовой коэффициент, определяющий отношение инвестора к риску (коэффициент риска), e = (1,…, 1).

Как известно, ковариационная матрица $K = (\sigma_{ij})_{n\times n}$ неотрицательно определена. Везде в дальнейшем мы будем предполагать, что она положительно определена и, следовательно, существует обратная к ней матрица. Кроме того, для кратости все соотношения выводятся в предположении, что оптимальный портфель является полноразмерным [24], т.е. у вектора x, определяющего состав портфеля, все компоненты больше нуля. Если часть компонент вектора x равны нулю, то в полученных далее формулах матрицу K надо просто заменить на соответствующую квадратную подматрицу, а при наличии коротких продаж любой портфель можно считать полноразмерным.

Решение задачи (1.2.1) для полноразмерных портфелей приведено в работе [23], а именно, функция Лагранжа для задачи (1.2.1) имеет вид

$$L(x,\lambda) = \bar{r}x - \alpha(xKx) + \lambda(1 - xe), \tag{1.2.2}$$

условия оптимальности полноразмерного портфеля дают систему линейных алгебраических уравнений:

$$\bar{r} - 2\alpha Kx^0 = \lambda^0 e,\ x^0 e = 1. \tag{1.2.3}$$

Из (1.2.3) состав оптимального полноразмерного портфеля имеет вид

$$x^0(\alpha) = \frac{K^{-1}e}{eK^{-1}e} + (K^{-1}\bar{r} - \frac{eK^{-1}\bar{r}}{eK^{-1}e}K^{-1}e)\frac{1}{2\alpha}, \tag{1.2.4}$$

Здесь и далее обозначение вектора-строки и вектора-столбца не будут различаться. При этом они считаются соответствующими требованиям операций умножения матриц и векторов.

1.2.2. Модель управления риском с ограничением по доходности

Определим оптимальный портфель как решение задачи на минимум дисперсии при ограничении по математическому ожиданию доходности портфеля:

$$\min_x xKx, \quad \bar{r}x = r_p,\ xe = 1,\ x \geq 0, \tag{1.2.5}$$

где r_p – требуемое значение математического ожидания доходности портфеля. Функция Лагранжа для задачи (1.2.5) имеет вид

$$L_1(x,\lambda_1,\lambda_2) = xKx + \lambda_1(r_p - \bar{r}x) + \lambda_2(1 - xe). \tag{1.2.6}$$

Условия оптимальности полноразмерного портфеля приводят к системе линейных алгебраических уравнений:

$$2Kx^0 = \lambda_1^0\bar{r} + \lambda_2^0 e, \quad \bar{r}x^0 = r_p, \quad x^0 e = 1. \tag{1.2.7}$$

Из первой группы уравнений (1.2.7) выразим x^0:

$$x^0 = \frac{K^{-1}}{2}(\lambda_1\bar{r} + \lambda_2 e). \tag{1.2.8}$$

Подставив его в остальные уравнения (1.2.7), получаем систему для нахождения множителей Лагранжа λ_1, λ_2:

$$\frac{\bar{r}K^{-1}}{2}(\lambda_1^0\bar{r}+\lambda_2^0 e)=r_p,$$
$$\frac{eK^{-1}}{2}(\lambda_1^0\bar{r}+\lambda_2^0 e)=1,$$

которая эквивалентна системе

$$\begin{aligned}\lambda_1^0\frac{\bar{r}K^{-1}\bar{r}}{2}+\lambda_2^0\frac{\bar{r}K^{-1}e}{2}=r_p,\\ \lambda_1^0\frac{eK^{-1}\bar{r}}{2}+\lambda_2^0\frac{eK^{-1}e}{2}=1.\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

Выражая λ_1^0 и λ_2^0 из (1.2.9) по формулам Крамера при условии, что определитель системы $\frac{1}{4}(\bar{r}K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e)-(eK^{-1}\bar{r})^2$ отличен от нуля, получаем:

$$\lambda_1^0=\frac{2(r_p(eK^{-1}e)-\bar{r}K^{-1}e)}{(\bar{r}K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e)-(eK^{-1}\bar{r})^2},\ \lambda_2^0=\frac{2(\bar{r}K^{-1}\bar{r}-r_p(\bar{r}K^{-1}e))}{(\bar{r}K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e)-(eK^{-1}\bar{r})^2}. \tag{1.2.10}$$

Теорема 1.2.1. Если для $\bar{r}, K$ и r_p, удовлетворяющих условию

$$\max\left(\frac{\bar{r}K^{-1}e}{r_p(eK^{-1}e)},\frac{(eK^{-1}\bar{r})^2}{(\bar{r}K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e)}\right)<1\vee\min\left(\frac{\bar{r}K^{-1}e}{r_p(eK^{-1}e)},\frac{(eK^{-1}\bar{r})^2}{(\bar{r}K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e)}\right)>1, \tag{1.2.11}$$

коэффициент риска $\alpha=\dfrac{(\bar{r}K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e)-(eK^{-1}\bar{r})^2}{2(r_p(eK^{-1}e)-(\bar{r}K^{-1}e))}$, то решения задач (1.2.1) и (1.2.5) совпадают для полноразмерных портфелей.

Доказательство. Преобразуем функцию Лагранжа (1.2.6) к виду: $L_1(x,\lambda_1,\lambda_2)=-\lambda_1(\bar{r}x-\frac{1}{\lambda_1}xKx-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(1-xe)-r_p)$. Введем $\tilde{L}(x,\lambda_1,\lambda_2)=$ $=r_p-\frac{L_1(x,\lambda_1,\lambda_2)}{\lambda_1}=\bar{r}x-\frac{1}{\lambda_1}xKx-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(1-xe)$. Минимизация L_1 эквивалентна максимизации функции $\tilde{L}(x,\lambda_1,\lambda_2)$ и ее максимальное значение в точке $x^0,\lambda_1^0,\lambda_2^0$, определяемой согласно (1.2.8) и (1.2.10), равно $\tilde{L}(x^0,\lambda_1^0,\lambda_2^0)=\bar{r}x^0-\frac{1}{\lambda_1^0}x^0Kx^0-\frac{\lambda_2^0}{\lambda_1^0}(1-x^0e)$. Пусть $\frac{1}{\lambda_1^0}=\alpha$, тогда

$\widetilde{L}(x^0,\lambda_2^0)=\bar{r}x^0-\alpha x^0Kx^0-\alpha\lambda_2^0(1-x^0e)$. При этом x^0,λ_2^0 удовлетворяют условиям экстремума функции Лагранжа $\widetilde{L}(x,\lambda_2)$ для $x > 0$:

$$\bar{r}-2\alpha Kx^0=-\alpha\lambda_2^0e,\quad x^0e=1. \qquad (1.2.12)$$

Левые части первой группы уравнений в (1.2.3) и (1.2.12) равны, следовательно, равны и правые, т.е. $\lambda^0=-\alpha\lambda_2^0$. Значит (1.2.3) эквивалентно (1.2.12), следовательно, решения задач (1.2.1) и (1.2.5) совпадают для полноразмерных портфелей.

Так как по условию $\alpha > 0$, то необходимо $\lambda_1^0>0$, т.е. согласно (1.2.10) $\dfrac{(r_p(eK^{-1}e)-\bar{r}K^{-1}e)}{(\bar{r}K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e)-(eK^{-1}\bar{r})^2}>0$, что эквивалентно $sign[r_p(eK^{-1}e)-\bar{r}K^{-1}e]=sign[(\bar{r}K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e)-(eK^{-1}\bar{r})^2]$. В [28] показано, что $\forall\xi\quad \xi K^{-1}\xi>0$. Принимая во внимание последнее, имеем два случая:

1) $sign=+1$, т. е. $\dfrac{\bar{r}K^{-1}e}{r_p(eK^{-1}e)}<1\wedge\dfrac{(eK^{-1}\bar{r})^2}{(\bar{r}K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e)}<1$ или $\max[\dfrac{\bar{r}K^{-1}e}{r_p(eK^{-1}e)},\dfrac{(eK^{-1}\bar{r})^2}{(\bar{r}K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e)}]<1$;

2) $sign=-1$, т. е. $\dfrac{\bar{r}K^{-1}e}{r_p(eK^{-1}e)}>1\wedge\dfrac{(eK^{-1}\bar{r})^2}{(\bar{r}K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e)}>1$ или $\min[\dfrac{\bar{r}K^{-1}e}{r_p(eK^{-1}e)},\dfrac{(eK^{-1}\bar{r})^2}{(\bar{r}K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e)}]>1$.

Объединяя оба случая, получаем условие (1.2.11). Теорема доказана полностью.

По Марковицу в задачах (1.2.1) и (1.2.5) предполагается, что оптимальные портфели являются точками множества эффективных (паретооптимальных) портфелей. Для задачи (1.2.1) условием принадлежности оптимальных портфелей эффективному множеству является условие $\alpha > 0$. Если в задаче (1.2.5) вместо ограничения типа равенства

$\bar{r}x = r_p$ взять $\bar{r}x \ge r_p$, то получающиеся при различных значениях r_p оптимальные портфели такой задачи также будут принадлежать эффективному множеству. При ограничении $\bar{r}x = r_p$ это происходит не при всех r_p. Условие (1.2.11) характеризует принадлежность оптимальных портфелей задачи (1.2.5) множеству эффективных (паретооптимальных) портфелей, а соответствующее значение α, представленное в теореме 1.2.1 дает возможность получить одинаковые оптимальные решения задач (1.2.1) и (1.2.5) на паретооптимальном множестве.

В следующем примере показано влияние отношения к риску (значение коэффициента риска) при выборе предпочтительного оптимального портфеля.

Пример 1.2.1. Рассмотри ситуацию, когда инвестор имеет возможность вложить средства в одну из двух альтернатив, т. е. выбрать один из двух оптимальных портфелей, отличающихся по видам ценных бумаг. Инвестору нужно решить вопрос о выборе предпочтительного для него портфеля из двух возможных с требуемым значением доходности портфеля r_p=0,11. Значит он использует модель с ограничением по доходности (1.2.5). Пусть вектор математических ожиданий доходностей ценных бумаг $\bar{r} = (0{,}07;\, 0{,}12;\, 0{,}13)$, ковариационная матрица $K = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}01 & -0{,}015 \\ -0{,}01 & 0{,}15 & 0{,}03 \\ -0{,}015 & 0{,}03 & 0{,}16 \end{pmatrix}$.

Условие (1.2.11) теоремы 1.2.1 при этом выполняется: $\dfrac{\bar{r}K^{-1}e}{r_p(eK^{-1}e)} = 0{,}895$, $\dfrac{(eK^{-1}\bar{r})^2}{(\bar{r}K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e)} = 0{,}945$ и max{0,895; 0,945}<1. Тогда по теореме 1.2.1 решения задач (1.2.1) и (1.2.5) совпадают при α=0,611 и дают оптимальный портфель $x1^0 = (0{,}277;\, 0{,}338;\, 0{,}385)$. Ожидаемая доходность портфеля есть $\bar{r}x1^0 = r_p = 0{,}11$, дисперсия портфеля равна 0,051. Пусть теперь

$\bar{r} = (0{,}07;\, 0{,}12;\, 0{,}13)$, $K = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}01 & -0{,}017 \\ -0{,}01 & 0{,}15 & 0{,}02 \\ -0{,}017 & 0{,}02 & 0{,}16 \end{pmatrix}$. Решения задач (1.2.1) и (1.2.5) совпадают при α=1,828 и дают оптимальный портфель $x2^0 = (0{,}39;\, 0{,}34;\, 0{,}27)$. При этом получаются те же ожидаемая доходность портфеля $\bar{r}x2^0 = r_p = 0{,}11$ и дисперсия портфеля 0,051.

Какой же портфель предпочтет инвестор с точки зрения риска? Коэффициент риска, соответствующий портфелю $x2^0$, больше. Это означает, что риск портфеля $x2^0$ (отклонение доходности от ожидаемого значения) для инвестора важнее, чем риск портфеля $x1^0$. Если для нахождения оптимального портфеля $x2^0$ взять α=0,611, то получим дисперсию 0,06. Инвестор, более избегающий риска, выберет портфель $x2^0$.

Таким образом, нами рассмотрены две постановки задач нахождения оптимального портфеля: с использованием линейной свертки критериев «математическое ожидание – дисперсия» и метода ограничений (ограничение накладывается на доходность портфеля). Для случая полноразмерных портфелей найдено значение коэффициента риска в модели «математическое ожидание – дисперсия», при котором решения этих двух задач совпадают при выполнении некоторого условия, налагаемого на исходные данные моделей. Отметим, что эквивалентность задач (1.2.1) и (1.2.5) справедлива без предположения о полноразмерности оптимальных портфелей, однако для нахождения связи между коэффициентом риска α и множителем Лагранжа λ_1 потребуется вводить некоторую подматрицу ковариационной матрицы, которая соответствует ненулевым значениям вектора x^0. При наличии коротких продаж, предполагающих отсутствие в моделях условия неотрицательности x, результат распространяется на произвольные оптимальные портфели.

1.2.3. Модель управления риском с ограничением по дисперсии

В данном пункте исследуется связь задачи с ограничением по дисперсии с задачей нахождения оптимального портфеля ценных бумаг с использованием свертки математического ожидания доходности портфеля и функции риска портфеля, заданной в метрике l_2^2 (дисперсия). Получено значение коэффициента риска, при котором задача максимизации доходности с ограничением по дисперсии эквивалентна задаче максимизации линейной свертки критериев «доходность – дисперсия».

Определим оптимальный портфель как решение задачи на экстремум математического ожидания доходности при ограничении по дисперсии портфеля:

$$\max_x \bar{r}x, \quad xKx = \sigma_p^2, \; xe = 1, \, x \geq 0, \tag{1.2.13}$$

где σ_p^2 – требуемое значение дисперсии портфеля.

Функция Лагранжа для задачи (13) имеет вид

$$L_2(x, \lambda_3, \lambda_4) = \bar{r}x + \lambda_3(\sigma_p^2 - xKx) + \lambda_4(1 - xe)\,. \tag{1.2.14}$$

Условия оптимальности полноразмерного портфеля приводят к системе алгебраических уравнений:

$$2\lambda_3^0 Kx^0 = \bar{r} - \lambda_4^0 e, \quad x^0 Kx^0 = \sigma_p^2, \quad x^0 e = 1. \tag{1.2.15}$$

Из первой группы уравнений (15) выразим x^0:

$$x^0 = \frac{K^{-1}}{2\lambda_3^0}(\bar{r} - \lambda_4^0 e)\,. \tag{1.2.16}$$

Подставив его в остальные уравнения (1.2.15), получаем систему для нахождения множителей Лагранжа λ_3^0, λ_4^0:

$$\bar{r}K^{-1}\bar{r} + (\lambda_4^0)^2 eK^{-1}e - 2\lambda_4^0 \bar{r}K^{-1}e = 4(\lambda_3^0)^2 \sigma_p^2, \qquad eK^{-1}\bar{r} - \lambda_4^0 eK^{-1}e = 2\lambda_3^0. \tag{1.2.17}$$

Выразив λ_3^0 из второго уравнения системы (1.2.17) и подставив его в первое уравнение, имеем квадратное уравнение относительно λ_4^0:

$$[eK^{-1}e-\sigma_p^2(eK^{-1}e)^2](\lambda_4^0)^2+2[\sigma_p^2(eK^{-1}e)(\bar{r}K^{-1}e)-\bar{r}K^{-1}e]\lambda_4^0+ \\ +[\bar{r}K^{-1}\bar{r}-\sigma_p^2(eK^{-1}\bar{r})^2]=0. \qquad (1.2.18)$$

Если дискриминант уравнения (1.2.18) неотрицателен, т. е.

$$(\bar{r}K^{-1}e)^2(\sigma_p^2(eK^{-1}e)-1)^2 \ge (eK^{-1}e)(1-\sigma_p^2(eK^{-1}e))(\bar{r}K^{-1}\bar{r}-\sigma_p^2(eK^{-1}\bar{r})^2), \qquad (1.2.19)$$

то λ_4^0 – решение уравнения (1.2.18), а λ_3^0 - соответствуещее ему решение системы (1.2.17).

Теорема 1.2.2. Если для $\bar{r}, K$ и σ_p^2, удовлетворяющих условию (1.2.19) и условию

$$\lambda_4^0 < \frac{\bar{r}K^{-1}e}{(eK^{-1}e)}, \qquad (1.2.20)$$

где λ_4^0 - множитель Лагранжа, являющийся решением уравнения (1.2.18), коэффициент риска $\alpha = \frac{1}{2}((\bar{r}K^{-1}e)-\lambda_4^0(eK^{-1}e))$, то решения задач (1.2.1) и (1.2.13) совпадают для полноразмерных портфелей.

Доказательство. Преобразуем функцию Лагранжа (1.2.14) к виду: $L_2(x,\lambda_3,\lambda_4)=\bar{r}x-\lambda_3 xKx+\lambda_4(1-xe)+\lambda_3\sigma_p^2$. Тогда имеем $\tilde{L}(x,\lambda_3,\lambda_4)=L_2-\lambda_3\sigma_p^2=\bar{r}x-\lambda_3 xKx+\lambda_4(1-xe)$. Экстремальное значение функции $\tilde{L}(x,\lambda_3,\lambda_4)$ в точке $x^0,\lambda_3^0,\lambda_4^0$, определяемой согласно (1.2.16) и (1.2.17) при выполнении условия (1.2.19), равно $\tilde{L}(x^0,\lambda_3^0,\lambda_4^0)=\bar{r}x^0-\lambda_3^0 x^0Kx^0+\lambda_4^0(1-x^0e)$. Пусть $\lambda_3^0=\alpha$, тогда $\tilde{L}(x^0,\lambda_4^0)=\bar{r}x^0-\alpha x^0Kx^0+\lambda_4^0(1-x^0e)$. При этом x^0,λ_4^0 удовлетворяют условиям экстремума функции Лагранжа $\tilde{L}(x^0,\lambda_4^0)$ для $x>0$:

$$\bar{r}-2\alpha Kx^0=\lambda_4^0 e, \quad x^0e=1. \qquad (1.2.21)$$

Левые части первой группы уравнений в (1.2.3) и (1.2.21) равны, следовательно, равны и правые, т. е. $\lambda^0=\lambda_4^0$. Значит (1.2.3) эквивалентно (1.2.13), следовательно, решения задач (1.2.1) и (1.2.13) совпадают для полноразмерных портфелей.

Так как по условию $\alpha > 0$, то необходимо $\lambda_3^0 > 0$. Согласно второму уравнению системы (1.2.17) имеем $e\sigma^{-1}\bar{r} - \lambda_4^0 eK^{-1}e > 0$, что эквивалентно (1.2.20). Теорема доказана.

Таким образом, нами рассмотрены две модели управления риском на фондовом рынке, предполагающие процедуру нахождения оптимального портфеля: с использованием линейной свертки критериев «математическое ожидание – дисперсия» и метода ограничений (ограничение накладывается на величину риска). При выполнении некоторого условия, налагаемого на исходные данные моделей, найдено значение коэффициента риска в модели «математическое ожидание – дисперсия», при котором решения этих двух задач совпадают для случая полноразмерных портфелей. Отметим, что эквивалентность задач (1.2.1) и (1.2.13) справедлива без предположения о полноразмерности оптимальных портфелей, однако для нахождения связи между коэффициентом риска α и множителями Лагранжа λ_3 и λ_4 потребуется вводить некоторую подматрицу ковариационной матрицы, которая соответствует ненулевым значениям вектора x^0. При наличии коротких продаж, предполагающих отсутствие в моделях условия неотрицательности x, результат распространяется на произвольные оптимальные портфели.

1.2.4. Модель управления риском со сверткой типа отношения

Иногда требуется оценить риск на единицу выгоды или выигрыша. В этой ситуации можно использовать относительные функции риска (1.1.6), (1.1.7). В соответствии с метрикой l_2 рассмотрим такую задачу нахождения оптимального портфеля.

Определим оптимальный портфель как решение задачи на экстремум свертки типа отношения критериев математического ожидания доходности портфеля и среднеквадратического отклонения доходности портфеля:

$$\min_x \frac{(xKx)^{1/2}}{\bar{r}x}, \quad xe = 1,\ x \geq 0. \qquad (1.2.22)$$

В [23] показано, что (1.2.22) сводится к задаче квадратичного программирования:

$$\min_y yKy, \quad \bar{r}y = 1, \ y \geq 0, \tag{1.2.23}$$

а, в конечном счете, к системе линейных алгебраических уравнений для $y > 0$:

$$2Ky^0 - \lambda_5^0 \bar{r} = 0, \quad \bar{r}y^0 = 1. \tag{1.2.24}$$

При этом решения задач (1.2.22) и (1.2.23) связаны соотношением $x^0 = \dfrac{y^0}{y^0 e}$.

Найдем решение системы (1.2.24). Для этого из первой группы уравнений (1.2.24) выразим y^0: $y^0 = \frac{1}{2}\lambda_5^0 K^{-1}\bar{r}$. Подставим его в последнее уравнение системы (1.2.24): $\frac{1}{2}\bar{r}\lambda_5^0 K^{-1}\bar{r} = 1$, получаем $\lambda_5^0 = \dfrac{2}{\bar{r}K^{-1}\bar{r}}$. В [28] показано, что $\forall \xi \quad \xi K^{-1}\xi > 0$, поэтому $\bar{r}K^{-1}\bar{r} > 0$. Следовательно, $y^0 = \dfrac{K^{-1}\bar{r}}{\bar{r}K^{-1}\bar{r}}$.

Тогда решение задачи (1.2.22) имеет вид

$$x^0 = \frac{K^{-1}\bar{r}}{eK^{-1}\bar{r}}. \tag{1.2.25}$$

Теорема 1.2.3. Если для $\bar{r}$ и K, удовлетворяющих условию

$$K^{-1}\bar{r} > 0, \tag{1.2.26}$$

коэффициент риска $\alpha = \frac{1}{2}eK^{-1}\bar{r}$, то решения задач (1.2.1) и (1.2.22) совпадают и определяют оптимальный полноразмерный портфель (1.2.25).

Доказательство. Если компоненты вектора $K^{-1}\bar{r}$ положительные, то их сумма $eK^{-1}\bar{r}$ тоже положительная. Значит $\alpha = \frac{1}{2}eK^{-1}\bar{r} > 0$ и оптимальный портфель x^0 согласно (1.2.25) имеет положительные компоненты.

Подставим $\alpha = \frac{1}{2}eK^{-1}\bar{r}$ в (1.2.4):

$$x^0(\alpha) = \frac{K^{-1}e}{eK^{-1}e} + (K^{-1}\bar{r} - \frac{eK^{-1}\bar{r}}{eK^{-1}e}K^{-1}e)\frac{1}{2\alpha} =$$

$$= \frac{K^{-1}e}{eK^{-1}e} + (K^{-1}\bar{r} - \frac{eK^{-1}\bar{r}}{eK^{-1}e}K^{-1}e)\frac{1}{eK^{-1}\bar{r}} = \frac{K^{-1}e}{eK^{-1}e} + \frac{(K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e) - (K^{-1}e)(eK^{-1}\bar{r})}{(eK^{-1}e)(eK^{-1}\bar{r})} =$$

$$= \frac{(K^{-1}e)(eK^{-1}\bar{r}) + (K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e) - (K^{-1}e)(eK^{-1}\bar{r})}{(eK^{-1}e)(eK^{-1}\bar{r})} = \frac{K^{-1}\bar{r}}{eK^{-1}\bar{r}}.$$ Таким образом, решение задачи (1.2.1) при $\alpha = \frac{1}{2}eK^{-1}\bar{r}$ совпало с решением задачи (1.2.22), которое определяет при данном α полноразмерный портфель. Теорема доказана.

1.2.5. Модель управления риском с вероятностной функцией риска

Перейдем к вероятностным функциям риска (1.1.8), (1.1.9). Задачи нахождения оптимального портфеля ценных бумаг при этом могут быть сформулированы по-разному [23]. Рассмотрим одну их возможных постановок, а именно, определим оптимальный портфель как решение задачи на минимум вероятности того, что случайное значение доходности портфеля меньше требуемого:

$$\min_x P(rx < r_p), \quad xe = 1,\ x \geq 0, \qquad (1.2.27)$$

где r_p – требуемое значение математического ожидания доходности портфеля, e=(1,…,1), P – вероятность. Различие между инвесторами заключается в значении величины r_p. Естественно предположение, что $r_p < \bar{r}x$, иначе задача (1.2.27) теряет смысл.

В работе [23] показано, что если $\{r_i\}$ – система нормально распределенных случайных величин доходностей r_i с математическими ожиданиями $\bar{r}_i$ и ковариационной матрицей $K = (\sigma_{ij})_{n\times n}$, то задача (1.2.27) сводится к задаче квадратичного программирования:

$$\min_y yKy, \quad \bar{r}y - r_p ye = 1,\ y \geq 0, \qquad (1.2.28)$$

а, в результате, к системе линейных алгебраических уравнений для y>0:

$$2Ky^0 + \lambda^0(r_p e - \bar{r}) = 0, \quad \bar{r}y^0 - r_p y^0 e = 1. \qquad (1.2.29)$$

При этом решения задач (1.2.27) и (1.2.28) связаны соотношением $x^0 = \dfrac{y^0}{y^0 e}$.

Если часть компонент x^0 принимает нулевое значение, то система уравнений (1.2.29) становится меньшего порядка.

Найдем решение системы (1.2.29) при невырожденной матрице *K*. Для этого из первой группы уравнений (1.2.29) выразим y^0: $y^0 = \frac{1}{2}\lambda^0 K^{-1}(\bar{r} - r_p e)$. Подставим его в последнее уравнение системы (1.2.29): $\frac{1}{2}\lambda^0 \bar{r} K^{-1}(\bar{r} - r_p e) - \frac{1}{2} r_p \lambda^0 e K^{-1}(\bar{r} - r_p e) = 1$ или $\frac{1}{2}\lambda^0 (\bar{r} - r_p e) K^{-1}(\bar{r} - r_p e) = 1$, откуда получаем $\lambda^0 = \dfrac{2}{(\bar{r} - r_p e) K^{-1}(\bar{r} - r_p e)}$. В работе [28] показано, что $\forall \xi \quad \xi K^{-1}\xi > 0$, поэтому $(\bar{r} - r_p e) K^{-1}(\bar{r} - r_p e) > 0$. Следовательно, $y^0 = \dfrac{K^{-1}(\bar{r} - r_p e)}{(\bar{r} - r_p e) K^{-1}(\bar{r} - r_p e)}$. Тогда решение задачи (1.2.27) имеет вид

$$x^0 = \frac{K^{-1}(\bar{r} - r_p e)}{e K^{-1}(\bar{r} - r_p e)}. \qquad (1.2.30)$$

Решение задачи (1.2.1) для полноразмерного портфеля имеет вид (1.2.4): $x^0(\alpha) = \dfrac{K^{-1}e}{eK^{-1}e} + (K^{-1}\bar{r} - \dfrac{eK^{-1}\bar{r}}{eK^{-1}e} K^{-1}e)\dfrac{1}{2\alpha}$,

В работе **[**26**]** авторами исследован вопрос, в каком случае оптимальные полноразмерные портфели, найденные из решения задач (1.2.27) и (1.2.1) совпадают. При этом случай наличия коротких продаж авторами не изучен.

Теорема 1.2.4. **[**26**]** Если $\{r_i\}$ – система нормально распределенных случайных величин доходностей r_i с математическими ожиданиями $\bar{r}_i$ и ковариационной матрицей $K = (\sigma_{ij})_{n \times n}$, $\bar{r}, K$, r_p удовлетворяют условию

$$K^{-1}(\bar{r} - r_p e) > 0, \qquad (1.2.31)$$

коэффициент риска $\alpha=\frac{1}{2}eK^{-1}(\bar{r}-r_pe)$, то решения задач (1.2.27) и (1.2.1) совпадают и определяют оптимальный полноразмерный портфель (1.2.4).

Доказательство теоремы 1.2.4 приведено в [26].

Предположим, что инвестор может подавать заявку на продажу ценных бумаг без покрытия или на короткие продажи. Такая продажа совершается путем займа ценных бумаг или сертификатов на них для использования в первоначальной сделке, а затем погашения займа такими же ценными бумагами, приобретенными в последующей сделке. При наличии коротких продаж отсутствует условие неотрицательности вектора рискованной части портфеля. Задача (1.2.27) примет вид

$$\min_x P(rx<r_p), \quad xe=1, \tag{1.2.32}$$

а задача (1.2.1)

$$\max_x[\bar{r}x-\alpha(xKx)], \quad xe=1. \tag{1.2.33}$$

При этом решения задач (1.2.33) и (1.2.1) для полноразмерных портфелей совпадают, поэтому совпадают решения задач (1.2.27) для полноразмерных портфелей и (1.2.33).

Исследуем вопрос, в каком случае решения задач (1.2.32) и (1.2.33) совпадают.

Теорема 1.2.5. Если $\{r_i\}$ – система нормально распределенных случайных величин доходностей r_i с математическими ожиданиями $\bar{r}_i$ и ковариационной матрицей $K=(\sigma_{ij})_{n\times n}$, $\bar{r},K$, r_p удовлетворяют условию

$$eK^{-1}(\bar{r}-r_pe)>0, \tag{1.2.34}$$

коэффициент риска $\alpha=\frac{1}{2}eK^{-1}(\bar{r}-r_pe)$, то решения задач (1.2.32) и (1.2.33) совпадают и определяют оптимальный портфель (1.2.4).

Доказательство. Если $eK^{-1}(\bar{r}-r_pe)$ имеет положительное значение, то $\alpha=\frac{1}{2}eK^{-1}(\bar{r}-r_pe)>0$ и оптимальный портфель x^0 согласно (1.2.30) имеет компоненты любого знака, т. к. компоненты вектора $K^{-1}(\bar{r}-r_p e)$ не обязательно все положительные.

Подставим $\alpha = \frac{1}{2} eK^{-1}(\bar{r}-r_p e)$ в (1.2.14). Приходим к соотношению

$$x^0(\alpha) = \frac{K^{-1}e}{eK^{-1}e} + (K^{-1}\bar{r} - \frac{eK^{-1}\bar{r}}{eK^{-1}e}K^{-1}e)\frac{1}{2\alpha} =$$

$$= \frac{K^{-1}e}{eK^{-1}e} + (K^{-1}\bar{r} - \frac{eK^{-1}\bar{r}}{eK^{-1}e}K^{-1}e)\frac{1}{eK^{-1}(\bar{r}-r_p e)} = \frac{K^{-1}(\bar{r}-r_p e)}{eK^{-1}(\bar{r}-r_p e)}.$$

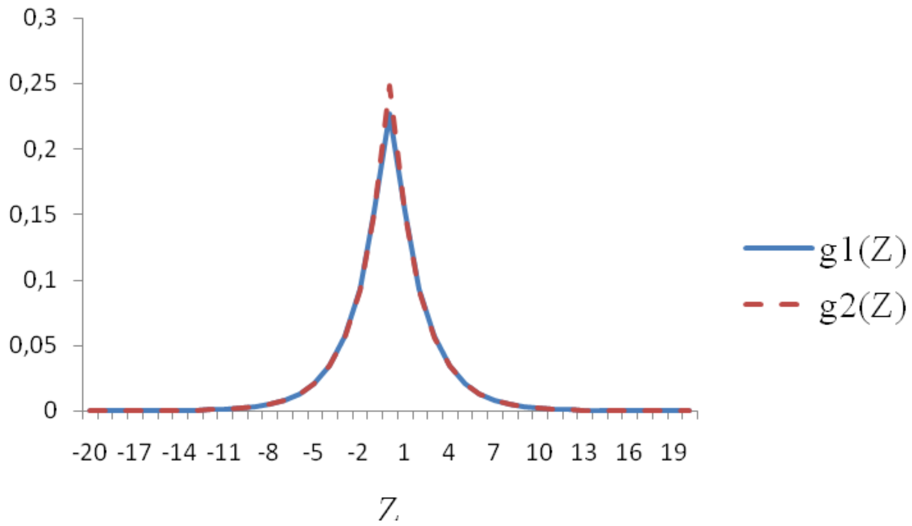
Таким образом, решение задачи (1.2.33) при $\alpha = \frac{1}{2} eK^{-1}(\bar{r}-r_p e)$ совпало с решением задачи (1.2.32). Теорема доказана.

Нормальный закон распределения получил широкую популярность и поэтому достаточно часто используется при моделировании случайных процессов. Это объясняется и удобством его применения при исследовании случайных процессов, и полезными свойствами нормального закона (например, устойчивостью). Однако в ряде случаев, в частности, при моделировании случайных процессов в экономике и финансах, распределения случайных экономических показателей отличаются от нормального, т. е. нормальный закон не всегда наилучшим образом характеризует случайные процессы. Отклонение гипотезы «нормальности» связано с бо́льшим значением коэффициента вытянутости (эксцесса) у статистических распределений, соответствующих реальным данным. Известно, что коэффициент вытянутости определяется через четвертый момент. Это обстоятельство позволяет говорить о том, что такие распределения случайных величин имеют «тяжелые хвосты», т.е. соответствующая плотность распределения медленно убывает при $|x|\to\infty$ по сравнению с нормальной плотностью. Отклонение от нормального распределения (гауссова) случайных величин наблюдается в финансово-экономической области и характерно, например, для обменных курсов валют, для цен и доходностей акций. Это подтверждается как видом эмпирических плотностей (гистограмм), так и стандартными статистическими приемами обнаружения отклонений от нормального распределения: квантильный метод, критерий К.Пирсона, ранговые критерии.

К распределениям с «тяжелыми» правыми хвостами обычно относят такие, для которых вероятность того, что случайная величина превосходит достаточно большое x, имеет величину порядка $x^{-\alpha}$ (например, распределения Стьюдента, Парето, гиперболическое [86]). В работе [26] предлагается использовать двухстороннее экспоненциальное распределение, которое имеет «менее тяжелый хвост», чем названные выше, но более «тяжелый», чем у нормального закона. Это распределение с одной стороны обладает хорошими аналитическими свойствами, а с другой стороны в некоторых случаях лучше, чем нормальное описывает финансовую статистику. Примером может служить распределение случайной величины доходности акций компании «Аэрофлот». В данной работе использовались статистические данные цен акций компании «Аэрофлот» за период с января 2013 г. по январь 2014 г. [115]. При этом значения доходности акций компании определялись с использованием ежедневных цен закрытия торговых сессий. Рассмотрим гипотезы о нормальном распределении случайной величины доходности акций с плотностью $f(\xi)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\xi-m)^2}{2\sigma^2}}$ и об экспоненциальном распределении с плотностью $g(\xi)=\dfrac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|\xi-m|}$, где m – математическое ожидание, σ – среднеквадратическое отклонение случайной величины доходности акций, λ – параметр, равный $\sqrt{2}/\sigma$. В случае гипотезы о нормальном распределении этой величины критерий согласия К.Пирсона дает значение χ^2=44,336, которому соответствует вероятность p=0,001 того, что эта величина превзойдет данное значение χ^2. Это говорит о том, что расхождение теоретического и статистического распределений велико и статистические данные значений доходности акций компании «Аэрофлот» противоречат гипотезе о нормальном их распределении. Но в случае гипотезы об экспоненциальном распределении имеем χ^2=19,901, а p=0,3, т.е. расхождение теоретического и статистического распределений можно считать несущественным и гипотезу об экспоненциальном распределении случайной величины доходности акций компании «Аэрофлот» можно считать правдоподобной.

В отличие от нормального распределения экспоненциальное распределение случайной величины Y не является устойчивым [86], т. е. отсутствует сходимость по экспоненциальному распределению случайных величин $\dfrac{Y_1+...+Y_n}{d_n}+a_n$ к Y, где $\{Y_n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\{a_n\}$ – последовательность действительных чисел, $\{d_n\}$ – последовательность положительных чисел. Так, например, для суммы двух экспоненциально распределенных случайных величин $Y_1+Y_2=Z$ с одинаковыми математическими ожиданиями, применяя формулу для композиции двух законов распределения [17], получаем закон распределения $g_1(Z)=\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}(\lambda_2 e^{-\lambda_1|Z-m|}-\lambda_1 e^{-\lambda_2|Z-m|})$. В случае устойчивости экспоненциального распределения закон принял бы вид $g_2(Z)=\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{2(\lambda_2^2+\lambda_1^2)}e^{-\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2^2+\lambda_1^2)}|Z-m|}$. Однако, как показывают численные эксперименты, имеет место приблизительная устойчивость.

Пример 1.2.2. Пусть λ_1=0,5, λ_1=5, m=0. Как видно на рисунке, графики $g_1(Z)$ и $g_2(Z)$ практически совпадают, особенно в «хвостовой части». Так для Z=50 имеем $g_1(50)=3{,}507\times10^{-12}$, а $g_2(50)=3{,}911\times10^{-12}$.



В работе [26] рассмотрен вопрос о нахождении решения задачи (1.2.27), если случайные величины доходностей имеют экспоненциальный закон распределения.

Теорема 1.2.6 [26]. Пусть случайная величина доходности портфеля x описывается экспоненциальным распределением с математическим ожиданием $\bar{r}x$ и дисперсией xKx. Тогда в задаче (1.2.27) функция цели $P(rx < r_p)$ достигает минимума на заданном множестве $X = \{x \mid xe = 1, x \geq 0\}$ в точке $x^0 = (x_1^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0)$ такой, что $x^0 = \dfrac{y^0}{y^0 e}$, а $y^0 = (y_1^0, ..., y_n^0)$ является решением задачи квадратичного программирования:

$$\min_y yKy, \quad \bar{r}y - r_p ye = 1, \; y \geq 0. \tag{1.2.35}$$

Доказательство теоремы 1.2.6 приведено в [26] для случая полноразмерных портфелей. Можно показать, что при наличии коротких продаж теорема 1.2.6 верна для любых оптимальных портфелей.

Замечание 1. В случае гипотезы о нормальном распределении системы случайных величин $\{r_i\}$ для вычисления величины $P(rx < r_p)$ требовалось использование функции Лапласа. Удобство гипотезы об экспоненциальном распределении заключается в простой процедуре вычисления $P(rx < r_p)$, не требующей использования функции Лапласа. Зная x^0, можно вычислить минимальное значение вероятности того, что случайная доходность портфеля меньше требуемой: $P(rx^0 < r_p) = \frac{1}{2} e^{\frac{\sqrt{2}(r_p - \bar{r}x^0)}{(x^0 K x^0)^{1/2}}}$.

Замечание 2. Решение задачи (1.2.35) имеет вид (1.2.30) и для случая коротких продаж. Значит, теорема 12.4 и теорема 1.2.5 верны и в случае гипотезы об экспоненциальном законе распределения случайных величин доходностей в задаче (1.2.27) и (1.2.32) соответственно.

Пример 1.2.3. Имеются три ценные бумаги, вектор ожидаемых доходностей которых имеет вид $\bar{r} = (0{,}15;\, 0{,}25;\, 0{,}26)$, а ковариационная матрица $K = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}05 & -0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}05 \\ -0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}3 \end{pmatrix}$. Пусть требуемое значение ожидаемой доходности портфеля составляет r_p=0,1. Тогда решение задачи (1.2.35) есть $y^0 = (5{,}589;\, 0{,}643;\, 3{,}9)$, а $x^0 = (0{,}552;\, 0{,}063;\, 0{,}385)$. При этом математическое ожидание портфеля $\bar{r}x^0 = 0{,}199$ строго больше r_p=0,1. Минимальное значение вероятности того, что случайная доходность портфеля меньше требуемой $P(rx^0 < r_p) = \frac{1}{2} e^{\frac{\sqrt{2}(r_p - \bar{r}x^0)}{(x^0 K x^0)^{1/2}}} = 0{,}247$. Проверим условие $K^{-1}(\bar{r} - r_p e) > 0$. Действительно, $K^{-1}(\bar{r} - r_p e) = (1{,}39;\, 0{,}16;\, 0{,}97)$. Значит

$\alpha = \frac{1}{2} e K^{-1}(\bar{r} - r_p e) = 1{,}26$ и оптимальный портфель

$x^0(\alpha) = \frac{K^{-1}e}{eK^{-1}e} + (K^{-1}\bar{r} - \frac{eK^{-1}\bar{r}}{eK^{-1}e} K^{-1}e)\frac{1}{2\alpha} = (0{,}552;\, 0{,}063;\, 0{,}385)$, являющийся решением задачи (1.2.1), является решением задачи (1.2.27).

Таким образом, нами рассмотрены задачи нахождения оптимального портфеля ценных бумаг с использованием вероятностной функции риска портфеля для гипотез о нормальном и экспоненциальном законах распределения случайных величин доходностей. Для случая коротких продаж найдено значение коэффициента риска в модели «математическое ожидание – дисперсия», при котором задача минимизации вероятностной функции риска эквивалентна задаче максимизации линейной свертки критериев «математическое ожидание – дисперсия» при выполнении некоторого условия, налагаемого на исходные данные моделей. Показано, что при выполнении этого условия решение задач (1.2.32) и (1.2.33) дает не обязательно полноразмерный портфель. Если для нахождения оптимального портфеля использовать модель с вероятностной функцией риска, то результаты проведенного исследования дают возможность решать задачу нахождения оптимального портфеля при любой из двух рассмотренных гипотез о распределения случайных величин доходностей, а также определять эквивалентное отношение инвестора к риску (коэффициент риска).

Результаты проведенного исследования в данной главе дают возможность определять отношение инвестора к риску (коэффициент риска), если для нахождения оптимального портфеля использовалась модель с ограничением по доходности, с ограничением по дисперсии, модель со сверткой типа отношения или с вероятностной функцией риска [75, 76]. Другие примеры, демонстрирующие результаты данной главы, приведены в главе 3 с использованием инструментальных средств.

ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ РИСКОМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

2.1. Исследование связи решений линейных минимаксных задач управления риском в производственных системах

Рассмотрим линейные задачи управления в условиях неопределенности, в которых используются линейная свертка критериев эффективности и риска, свертка типа отношения, перевод критерия в ограничение. Покажем, что при некоторых условиях решения соответствующих линейных двухкритериальных задач принятия решений с использованием минимаксной функции риска и функции риска в метрике l_1 совпадают.

Рассмотрим сложную систему, состоящую из n подсистем. Протекающие в ней процессы могут быть детерминированными, но с неизвестными точно параметрами (в терминологии исследования операций – это неопределенные неконтролируемые факторы), или стохастическими. В последнем случае будем считать, что эти процессы независимы, т.е. коэффициенты корреляции между случайными значениями параметрами в любых двух подсистемах равны нулю, а вероятность возникновения негативных события в двух и более подсистемах близка к нулю. В такой ситуации имеет смысл осуществлять оценку максимального ущерба от возникновения возможных неблагоприятных событий. т. е. действовать по принципу гарантированного результата. Будем для оценки риска системы использовать функцию риска, определенную в метрике l_∞:

$$R_\infty(x) = \max_{1 \le i \le n} g_i(x_i), \tag{2.1.1}$$

где $g_i(x_i)$ – функция риска для i-й подсистемы, x_i – параметры i-й подсистемы (например, интенсивность функционирования). Для определения последней можно испльзовать одну из следующих метрик:

$R_{l_1 abs}(x) = M(|r_i(x) - d_i(x)|)$, $R_{l_1}(x) = M(r_i(x) - d_i(x))$, $R_{l_2^2}(x) = M(r_i(x) - d_i(x))^2$, $R_{l_2}(x) = (M(r_i(x) - d_i(x))^2)^{1/2}$, $r_i(x)$ – случайное значение эффективности i-й подсистемы, $d_i(x)$ – ожидаемое значение эффективности.

Заметим, что в работе [90] функция риска определена в метрике l_∞ для задачи управления портфелем ценных бумаг, что, на наш взгляд, не совсем корректно. Случайные величины доходностей ценных бумаг, как правило, коррелированны, что и предполагалось в главе 1. В такой ситуации определять риск как наибольшее из отклонений доходностей всех ценных бумаг неправильно. Использование же такой функции риска в сложной системе, состоящей из нескольких подсистем, вполне естественно, так как предположение о некоррелированности стохастических процессов в подсистемах нередко оправданно (в линейном приближении это означает независимость случайных процессов).

Выбор управления с учетом эффективности $f(x)$ и риска $R_\infty(x)$ может быть формализован в виде решения задачи максимизации свертки Ф критериев $f(x)$ и $R_\infty(x)$:

$$\max_{x \in X} \Phi(f(x), -R_\infty(x)), \qquad (2.1.2)$$

где X – область допустимых значений для вектора $x = (x_1, ..., x_i, ..., x_n)$.

Рассмотрим следующую интерпретацию задачи (2.1.2). Пусть на предприятии существует n производственных процессов, каждый из которых выпускает продукцию определенного вида в количестве x_i, $i = 1, ..., n$. Вектор $x = (x_1, ..., x_i, ..., x_n)$ представляет собой план предприятия. Прибыль от реализации единицы продукции i-го производственного процесса есть случайная величина (неконтролируемый фактор), а ее оценка есть математическое ожидание π_i. Тогда общая прибыль предприятия от всех производственных процессов есть $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i$.

Возможный ущерб в расчете на единицу продукции i-го производственного процесса, связанный с риском возникновения неблагоприятных обстоятельств (например, техногенного характера), в стоимостном выражении равен a_i. Например, пусть π_i – ожидаемая прибыль (не обязательно математическое ожидание) с единицы продукции в текущем производственном периоде, не связанная с возможностью возникновения неблагоприятного события, приводящего к потерям. Прибыль π_{ij} с единицы продукции i-го производственного процесса в текущем производственном периоде в случае возникновения j-го неблагоприятного события является случайной величиной, $\pi_i > \pi_{ij}$. Потери прибыли (риск) a_i с единицы продукции составят $a_i = \sum_{j=1}^{J} p_j(\pi_i - \pi_{ij})$, где $p_j \in [0;1]$ – вероятность возникновения j-го неблагоприятного события на предприятии. Если x_i представляет собой интенсивность производственного процесса, например, объем выпуска продукции, то ожидаемый ущерб $g_i(x_i)$ на i-м производственном процессе равен величине $g_i(x_i) = a_i x_i$.

Тогда функция риска предприятия имеет вид

$$R_\infty(x) = \max_{1 \le i \le n} a_i x_i \qquad (2.1.3)$$

Функции риска в виде (2.1.3) в данном случае подразумевает, что риск потерь для каждого процесса пропорционален его интенсивности $x_i,\ i = 1,...,n$, а руководство предприятия ориентируется на наиболее рискованный процесс. Рассмотрим различные формализации двухкритериальной задачи нахождения плана производства, который одновременно по возможности максимизирует прибыль и минимизирует значение функции риска (2.1.3). Естественно, соответствующие решения должны приводить к множеству Парето.

2.1.1. Задача управления риском с линейной сверткой критериев

Возьмем линейную свертку критериев в виде их разности с весовым коэффициентом. Тогда постановка задачи управления риском имеет вид

$$\max_{x\in X}\left(\sum_{i=1}^{n}\pi_i x_i - \alpha \max_{1\le i\le n} a_i x_i\right), \tag{2.1.4}$$

где $X=\{x \mid x_i \ge 0, i=1,...,n, Ax\le b\}$, $A=(a_{ji})_{m\times n}$ и $b=(b_1,...,b_m)$ – технологическая матрица и вектор ограничений на ресурсы предприятия соответственно; $\alpha > 0$ - параметр, характеризующий степень избегания риска для предприятия (коэффициент риска).

Введем новую переменную $z=\max_{1\le i\le n} a_i x_i$ и приведем задачу (2.1.4) к задаче линейного программирования (ЛП):

$$\max_{x,z}\left(\sum_{i=1}^{n}\pi_i x_i - \alpha z\right),$$
$$a_i x_i \le z, \quad Ax\le b, \quad x_i\ge 0, i=1,...,n, z\ge 0. \tag{2.1.5}$$

Решение этой задачи ЛП (2.1.5) осуществляется известными методами [16, 22].

2.1.2. Задача управления риском с использованием свертки типа отношения

Рассмотрим теперь другую постановку задачи нахождения оптимального плана, использующую свертку типа отношения

$$\min_{x\in X}\frac{\max\limits_{1\le i\le n} a_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\pi_i x_i}, \tag{2.1.6}$$

где $X=\{x \mid x_i \ge 0, i=1,...,n, Ax\le b\}$.

Отметим, что постановка задачи в виде (2.1.6) не содержит параметров риска таких, например, как параметр α, характеризующий степень избегания риска.

Сведем задачу (2.1.6) к задаче ЛП. Введем переменные $\mu = (\sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i)^{-1}$, $z = \max_{1 \le i \le n} a_i x_i$. Тогда имеем $a_i x_i \mu \le z\mu$, $\sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i \mu = 1$. Обозначим $\eta = \mu z$, $w_i = x_i \mu$. Задача (2.1.6) примет вид

$$\min_{\overline{w},\mu,\eta} \eta,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i w_i = 1,\ A\overline{w} - b\mu \le 0,\ a_i w_i \le \eta,\ w_i \ge 0,\ i = 1,\dots,n,\ \mu \ge 0, \eta \ge 0. \tag{2.1.7}$$

Пусть $(\overline{w}^0, \mu^0, \eta^0)$ – решение задачи (2.1.7), тогда $x_i^0 = \dfrac{w_i^0}{\mu^0}$, $i = 1,\dots,n$, – компоненты оптимального плана задачи (2.1.6).

Теорема 2.1.1. Если $\pi_i > 0, b_j > 0, a_i > 0, a_{ji} > 0,\quad i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m$, в задаче (2.1.5) коэффициент риска $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\pi_i}{a_i}$, то решения задач (2.1.5) и (2.1.6) совпадают.

Доказательство. Запишем задачу (2.1.5) через переменные $(\overline{w}, \mu, \eta)$:

$$\max_{\overline{w},\mu,\eta} (\sum_{i=1}^{n} \pi_i w_i - \alpha\eta),$$
$$a_i w_i \le \eta,\quad A\overline{w} \le b\mu,\quad w_i \ge 0, i = 1,\dots,n,\ \mu \ge 0, \eta \ge 0,$$

или

$$\min_{\overline{w},\mu,\eta} (\eta - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} \pi_i w_i),$$
$$A\overline{w} \le b\mu,\quad a_i w_i \le \eta,\quad w_i \ge 0, i = 1,\dots,n,\ \mu \ge 0, \eta \ge 0. \tag{2.1.8}$$

Введем для задачи (2.1.7) функцию Лагранжа $L = \eta - \lambda^0 \sum_{i=1}^{n} \pi_i w_i$, где λ^0 – оптимальное значение множителя Лагранжа. Задача (2.1.6) сводится к задаче

$$\min_{\overline{w},\mu,\eta} (\eta - \lambda^0 \sum_{i=1}^{n} \pi_i w_i),$$
$$A\overline{w} - b\mu \le 0,\ a_i w_i \le \eta,\ w_i \ge 0, i = 1,\dots,n,\ \mu \ge 0, \eta \ge 0. \tag{2.1.9}$$

Из (2.1.8) и (2.1.9) следует, что решения задач (2.1.5) и (2.1.6) совпадают при $\alpha=\frac{1}{\lambda^0}$.

Найдем λ^0. Для этого построим к задаче (2.1.7) двойственную задачу. Матрица коэффициентов при неизвестных $(\overline{w},\mu,\eta)$ в ограничениях задачи (2.1.7) имеет вид $\tilde{A}=\begin{pmatrix} \pi_1 & \ldots & \ldots & \pi_n & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & -a_n & 0 & 1 \\ & -A & & & b & 0 \end{pmatrix}$, а вектор ограничений (1, 0, 0). Транспонированная к $\tilde{A}$ матрица: $\tilde{A}^T=\begin{pmatrix} \pi_1 & -a_1 & \ldots & 0 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -A^T \\ \pi_n & 0 & \ldots & -a_n & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Пусть $(\lambda,\overline{\xi},\overline{\nu})$ – переменные двойственной задачи, тогда двойственная задача есть $\max\limits_{\lambda,\overline{\xi},\overline{\nu}}\lambda,\quad \tilde{A}^T\begin{pmatrix}\lambda\\ \overline{\xi}\\ \overline{\nu}\end{pmatrix}\le\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \overline{\xi}\ge 0,\overline{\nu}\ge 0,$ или

$$\max_{\lambda,\overline{\xi},\overline{\nu}}\lambda,$$

$$\pi_i\lambda-\sum_{j=1}^{m}a_{ji}\nu_j-a_i\xi_i\le 0,\, i=1,\ldots,n, \tag{2.1.10}$$

$$\sum_{j=1}^{m}b_j\nu_j\le 0,\quad \sum_{i=1}^{n}\xi_i\le 1,\quad \lambda\ge 0,\overline{\xi}\ge 0,\overline{\nu}\ge 0.$$

Так как в (2.1.7) $\mu>0,\eta>0$, то в (2.1.10) $\sum\limits_{j=1}^{m}b_j\nu_j=0,\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i=1$, причем если $b>0$, то равенство нолю возможно только при $\overline{\nu}=0$. Тогда с учетом сказанного из первых n неравенств (2.1.10) для $\pi_i>0,a_i>0$ имеем $\frac{\pi_i}{a_i}\lambda\le\xi_i,\, i=1,\ldots,n,\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i=1$. Суммируя первые n неравенств, получаем

$\lambda \le \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\pi_i}{a_i}}$. При максимизации λ в (2.1.10) получаем $\lambda^0 = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\pi_i}{a_i}}$ Таким образом, решение задачи (2.1.5) совпадает с решением (2.1.6), если $\alpha = \dfrac{1}{\lambda^0} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\pi_i}{a_i}$. При этом $\bar{\nu} > 0$, иначе λ=0, α стремится к бесконечности и задача (2.1.5) имеет нулевое решение. Теорема доказана.

Замечание 1. При $\bar{\xi} > 0$ соответствующие этим переменным ограничения по риску выполняются как равенства $a_i x_i^0 = z^0$, $i = 1,...,n$, т. е. риск на оптимальном плане выравнивается.

Замечание 2. Решение задачи (2.1.10) дает максимальное λ, удовлетворяющее ограничениям, при котором решения задач (2.1.5) и (2.1.6) совпадает. Поэтому при некоторых меньших, чем $\alpha = \dfrac{1}{\lambda^0} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\pi_i}{a_i}$ значениях α задачи (2.1.8) (бóльших λ в двойственной задаче (2.1.9)) решение задачи (2.1.5) совпадает с решением (2.1.6), т. е. является тем же решением, что и при $\alpha = \dfrac{1}{\lambda^0} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\pi_i}{a_i}$.

Пример 2.1.1. На предприятии имеются три производственных процесса, на каждом из которых производится продукция определенного типа. Определены риски от каждого производственного процесса $a = (1{,}5;1;3;2)$. Вектор прибылей с единицы продукции каждого вида есть $\pi = (20;18;30;23)$, вектор объемов ресурсов $b = (3;5;6)$. Матрица технологических коэффициентов $A = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 3{,}4 & 2{,}6 & 4 \\ 5 & 4{,}2 & 3 & 1 \\ 3{,}5 & 4{,}6 & 2 & 1{,}7 \end{pmatrix}$. Найдем производственный план предприятия из решения задачи (2.1.6), в которой используется свертка типа отношения. Решение задачи (2.1.7) имеет вид $\bar{w}^0 = (0{,}013; 0{,}019; 0{,}0063; 0{,}0095)$, $\eta^0 = 0{,}019$, $\mu^0 = 0{,}08$. Тогда решение задачи (2.1.6) дает оптимальный производственный план предприятия $x^0 = (0{,}283;\, 0{,}425;\, 0{,}142;\, 0{,}212)$, при этом максимальный риск $z^0 = \max\limits_{1 \le i \le n} a_i x_i^0 = 0{,}425$ соответствует всем четырем производственным процессам, прибыль $\sum\limits_{i=1}^{4} \pi_i x_i^0 = 22{,}429$. Пусть теперь коэффициент риска в задаче (2.1.5) согласно теореме 2.1.1.равен $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\pi_i}{a_i} = 52{,}833$. Тогда решение задачи (2.1.5) есть $x^0 = (0{,}283;\, 0{,}425;\, 0{,}142;\, 0{,}212)$, т. е. совпадает с решением задачи (2.1.6). Если коэффициент риска в задаче (2.1.5) отличен от $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\pi_i}{a_i}$ и равен, например, $\alpha = 10{,}833$, то оптимальный производственный план в задаче (2.1.5) есть $x^0 = (0{,}723;\, 0;\, 0{,}362;\, 0{,}298)$, а максимальный риск соответствует первому и третьему производственным процессам и равен z=1,085. Но при $\alpha = 20{,}833$ решения задач совпадают и дают $x^0 = (0{,}283;\, 0{,}425;\, 0{,}142;\, 0{,}212)$.

Следующий пример показывает влияние отношения к риску на стратегию руководства предприятия.

Пример 2.1.2. Рассмотрим ситуацию, когда руководство предприятия принимает решение о модернизации второго технологического процесса. Нужно сделать выбор с точки зрения риска. Пусть теперь технологическая матрица A и вектор ресурсов b те же, что в примере 2.1.1, но увеличилась прибыль и риск второго технологического процесса, т. е. имеем $\pi = (20;\, 28;\, 30;\, 23)$ и $a = (1{,}5;\, 2;\, 3;\, 2)$. Тогда $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\pi_i}{a_i} = 48{,}833 < 52{,}883$, $x^0 = (0{,}373;\, 0{,}28;\, 0{,}186;\, 0{,}28)$ и максимальный риск (риск предприятия) $z^0 = \max\limits_{1 \le i \le n} a_i x_i^0 = 0{,}559 > 0{,}425$, т. е. риск увеличился на 31,5%. При этом прибыль предприятия $\sum\limits_{i=1}^{4} \pi_i x_i^0 = 27{,}298 > 22{,}429$. Прибыль увеличилась на 21,7%, т. е. на меньшую величину по сравнению с увеличением риска.

Возникает вопрос: будет ли руководство предприятия больше рисковать? Для ответа на этот вопрос сравним коэффициенты риска, при которых задача (2.1.5) дает те же решения. Так как модернизация процесса приводит к меньшему значению коэффициента риска, то в данном случае риск предприятия (потери прибыли) менее значим, чем риск предприятия без модернизации (из примера 2.1.1). Следовательно, если руководство предприятия более склонно к риску, то ради получения дополнительной прибыли будет модернизировать производство.

Обозначим $\min\limits_{x \in X} \dfrac{\max\limits_{1 \le i \le n} a_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i x_i} = k^0$. Если для предприятия считается достаточным, чтобы отношение величины риска на единицу прибыли не превосходило некоторого k $(k > k^0)$, то вместо задачи (2.1.6) можно решать следующую задачу:

$$\max_x \sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i,$$
$$k\sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i \ge \max_{1 \le i \le n} a_i x_i, \quad Ax \le b, \quad x_i \ge 0,\ i = 1,\ldots,n. \qquad (2.1.11)$$

Задачу (2.1.11) можно свести к задаче ЛП, если записать $k\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i x_i \ge a_i x_i,\ i = 1,\ldots,n$.

Однако решения задач (2.1.5) и (2.1.11) не совпадают. Этот факт обобщается в следующей теореме.

Теорема 2.1.2. Если $\pi_i > 0, b_j > 0, a_i > 0, a_{ji} > 0, \quad i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,m$, $\dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\pi_i}{a_i}} < k$, то задачи (2.1.5) и (2.1.11) не имеют общего решения.

Доказательство. Запишем (2.1.11) в виде

$$\max_{x,z} \sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i,$$

$$z \le k\sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i, \quad a_i x_i \le z, \quad Ax \le b, \quad x_i \ge 0, i = 1,\ldots,n, \; z \ge 0, \tag{2.1.12}$$

где $z = \max\limits_{1 \le i \le n} a_i x_i$. Введем для задачи (2.1.12) функцию Лагранжа $L_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i x_i + \tilde{\lambda}^0 (k\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i x_i - z) = (1 + k\tilde{\lambda}^0)\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i x_i - \tilde{\lambda}^0 z$. Тогда задача (2.1.12) эквивалентна задаче

$$\max_{x,z} (\sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i - \frac{\tilde{\lambda}^0}{1 + k\tilde{\lambda}^0} z),$$

$$a_i x_i \le z, \quad Ax \le b, \quad x_i \ge 0, i = 1,\ldots,n, \; z \ge 0.$$

Обозначив $\frac{\tilde{\lambda}^0}{1 + k\tilde{\lambda}^0} = \lambda_1^0$, получаем

$$\max_{x,z} (\sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i - \lambda_1^0 z),$$

$$a_i x_i \le z, \quad Ax \le b, \quad x_i \ge 0, i = 1,\ldots,n, \; z \ge 0. \tag{2.1.13}$$

Из (2.1.13) следует, что решения задач (2.1.5) и (2.1.11) совпадают при $\alpha = \lambda_1^0$. Найдем λ_1^0. Для этого построим к задаче (2.1.12) двойственную задачу. Матрица коэффициентов при неизвестных (x, z) в ограничениях задачи (2.1.12) имеет вид $\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} -k\pi_1 & \ldots & \ldots & -k\pi_n & 1 \\ a_1 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & a_n & -1 \\ & & A & & 0 \end{pmatrix}$, а вектор ограничений $(0, 0, b)$. Транспонированная к $\tilde{A}_1$ матрица:

$$\tilde{A}_1^T = \begin{pmatrix} -k\pi_1 & a_1 & \vdots & 0 & \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots & A^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \\ -k\pi_n & 0 & \vdots & a_n & \\ 1 & -1 & \vdots & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $(\lambda_1, \bar{\xi}_1, \bar{\nu}_1)$ – переменные двойственной задачи, $\pi = (\pi_1, ..., \pi_n)$, тогда двойственная задача есть

$$\min_{\lambda_1, \bar{\xi}_1, \bar{\nu}_1} b\bar{\nu}_1, \quad \tilde{A}_1^T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \bar{\xi}_1 \\ \bar{\nu}_1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 \geq 0, \bar{\xi}_1 \geq 0, \bar{\nu}_1 \geq 0,$$

или

$$\begin{gathered} \min_{\lambda_1, \bar{\xi}_1, \bar{\nu}_1} b\bar{\nu}_1, \\ -k\pi_i\lambda_1 + a_i\xi_{1i} + \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\nu_{1j} \geq \pi_i,\, i = 1, ..., n,\, \lambda_1 \geq \sum_{i=1}^{n} \xi_{1i},\, \lambda_1 \geq 0,\, \bar{\xi}_1 \geq 0,\, \bar{\nu}_1 \geq 0. \end{gathered} \tag{2.1.14}$$

Так как в (2.1.5) $z > 0$, то в (2.1.14) $\lambda_1 = \sum_{i=1}^{n} \xi_{1i}$. Тогда с учетом сказанного из первых n неравенств (2.1.14) имеем $\xi_{1i} \geq \frac{\pi_i}{a_i} + k\lambda_1 \frac{\pi_i}{a_i} - \frac{\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\nu_{1j}}{a_i},\, i = 1, ..., n,\, \lambda_1 = \sum_{i=1}^{n} \xi_{1i}$. Суммируя первые n неравенств, получаем $(1 - k\sum_{i=1}^{n} \frac{\pi_i}{a_i})\lambda_1 + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{ji}}{a_i}\nu_{1j} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi_i}{a_i}$. Задача (2.1.14) примет вид

$$\begin{gathered} \min_{\lambda_1, \bar{\nu}_1} b\bar{\nu}_1, \\ (1 - k\sum_{i=1}^{n} \frac{\pi_i}{a_i})\lambda_1 + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{ji}}{a_i}\nu_{1j} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi_i}{a_i}, \quad \lambda_1 \geq 0, \bar{\nu}_1 \geq 0. \end{gathered} \tag{2.1.15}$$

При минимизации $b\bar{\nu}_1$ в (2.1.15) ограничение $(1 - k\sum_{i=1}^{n} \frac{\pi_i}{a_i})\lambda_1 + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{ji}}{a_i}\nu_{1j} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi_i}{a_i}$ в оптимальной точке будет выполняться как равенство, т. е. $(1 - k\sum_{i=1}^{n} \frac{\pi_i}{a_i})\lambda_1 + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{ji}}{a_i}\nu_{1j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi_i}{a_i}$, причем $\bar{\nu}_1^0 = 0$. Тогда $\alpha = \lambda_1^0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\pi_i}{a_i}}{1 - k\sum_{i=1}^{n} \frac{\pi_i}{a_i}}$. Очевидно, что $\alpha > 0$, если $1 - k\sum_{i=1}^{n} \frac{\pi_i}{a_i} > 0$, или $k < \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\pi_i}{a_i}}$. Из теоремы 2.1.1. и замечания к этой теореме следует, что $x_i^0 = \frac{z^0}{a_i}, i = 1,...,n$.

Подставив $x_i^0 = \frac{z^0}{a_i}, i = 1,...,n$ в целевую функцию задачи (2.1.6), имеем

$k^0 = \frac{\max\limits_{1 \le i \le n} a_i x_i^0}{\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i x_i^0} = \frac{z^0}{\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i x_i^0} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\pi_i}{a_i}}$, что и требовалось доказать.

Пример 2.1.3. Рассмотрим производственную задачу с исходными данными из примера 2.1.1. Найдем оптимальное значение целевой функции в задаче (2.1.6): $k^0 = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\pi_i}{a_i}} = 0{,}019$. Взяв, например, k=0,05 , получаем решение задачи (2.1.11) $x^0 = (0{,}622; 0; 0{,}565; 0{,}196)$. Однако при k=0,05 множитель Лагранжа задачи (2.1.13) есть $\lambda_1^0 = -32{,}183$. Из доказательства теоремы 2.1.2 следует, что коэффициент риска в задаче (2.1.5) имеет то же значение $\alpha = -32{,}183$, при котором задача управления риском теряет смысл, а ее математическая постановка (2.1.5) не имеет решения.

2.1.3. Задача управления риском с ограничением по величине риска

В настоящее время широко используется *концепция приемлемого риска*, которая состоит во введении безопасного уровня риска [23]. Концепция приемлемого риска связана с невозможностью абсолютно безопасных технологий производства. Приемлемый риск представляет собой некоторый компромисс между уровнем безопасности и возможностями ее достижения.

Пусть задан приемлемый уровень риска R. Тогда, если $x^0 = (x_1^0,...,x_i^0,...,x_n^0)$ - решение задачи (2.1.5) и справедливо условие $R_\infty(x^0) = \max\limits_{1 \le i \le n} a_i x_i^0 \le R$, то план $x^0 = (x_1^0,...,x_i^0,...,x_n^0)$ можно безусловно принять. В теореме 2.1.3 сформулировано условие, при котором ограничение по риску является несущественным в рассматриваемой задаче:

$$\max_x \sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i, \qquad (2.1.16)$$
$$Ax \le b, \quad a_i x_i \le R, \quad x_i \ge 0, i = 1,...,n.$$

Теорема 2.1.3. Пусть $b_j > 0,\ a_i > 0, a_{ji} > 0,\ i = 1,...,n,\ j = 1,...,m$. Для того, чтобы в задаче (2.1.16) ограничения по риску $a_i x_i \le R, i = 1,...,n$, были несущественными достаточно выполнения условия $R \ge \max\limits_{1\le i\le n} \min\limits_{1\le j\le m} \dfrac{b_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_{ji}}{a_i}}$.

Доказательство. Представим ограничения по риску в виде $x_i \le \dfrac{R}{a_i}, i = 1,...,n$. Вектора $(0,...,0,\dfrac{R}{a_i}, 0,...,0), i = 1,...,n$, удовлетворяют системе $Ax \le b$, если $a_{ji}\dfrac{R}{a_i} \le b_j,\ j = 1,...,m$, или $R \le \min\limits_{1\le j\le m} \dfrac{b_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_{ji}}{a_i}}$, $i = 1,...,n$. Значит, ограничения по риску несущественны, если выполняется условие $R \ge \min\limits_{1\le j\le m} \dfrac{b_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_{ji}}{a_i}}$, $i = 1,...,n$, или $R \ge \max\limits_{1\le i\le n} \min\limits_{1\le j\le m} \dfrac{b_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_{ji}}{a_i}}$, что и требовалось доказать.

Замечание. Для того, чтобы найти наименьшее *R*, при котором ограничения по риску $a_i x_i \le R, i = 1,...,n$, становятся несущественными, нужно решить задачу (2.1.6) без ограничений по риску. Если x^0 – решение такой задачи, то наименьшее значение приемлемого риска есть $R_н = \max\limits_{1\le i\le n} a_i x_i^0$.

Если ограничение по риску является существенным, надо вводить некоторый механизм управления риском. В следующей теореме рассматривается этот случай.

Далее нам понадобится некоторое разбиение на интервалы изменений *R*: $R_{11} \le R \le R_{12},\ R_{21} \le R \le R_{22}, \ldots, R_{l1} \le R \le R_{l2},..., R_{L1} \le R \le R_{L2},\ R_{l1}, R_{l2} \in (0, R_н)$.

При этом вектор $\bar{\xi}_2^0$ соответствует l-му интервалу, $l=1,...,L$, то будем писать $\bar{\xi}_{2l}^0=(\xi_{2l1}^0,...,\xi_{2li}^0,...,\xi_{2l,n}^0)$.

Теорема 2.1.4. Если $\pi_i>0, b_j>0,\ \ a_i>0, a_{ji}>0,\ \ i=1,...,n,\ j=1,...,m$, и задача

$$\min_{\lambda_2,\bar{\xi}_2,\bar{\nu}_2}(R\lambda_2+b\bar{\nu}_2),$$

$$a_i\xi_{2i}+\sum_{j=1}^m a_{ji}\nu_{2j}\ge\pi_i,\ i=1,...,n,\quad \lambda_2=\sum_{i=1}^n\xi_{2i},\quad \lambda_2\ge 0,\bar{\xi}_2\ge 0,\bar{\nu}_2\ge 0$$

имеет одно и то же решение $(\lambda_{2l}^0,\bar{\xi}_{2l}^0,\bar{\nu}_{2l}^0)$ для $R_{l1}\le R\le R_{l2}$, $R_{l1}\ne R_{l2}, R_{l1},R_{l2}\in(0,R_н), l=1,...,L$, то решения задач (2.1.5) и (2.1.16) совпадают при $\sum_{i=1}^n\xi_{2(l+1)i}^0\le\alpha\le\sum_{i=1}^n\xi_{2li}^0$, $R=R_{l2}, l=1,...,L$.

Доказательство. Запишем задачу (2.1.16) в виде

$$\max_x\sum_{i=1}^n\pi_i x_i,$$
$$Ax\le b,\quad \max_{1\le i\le n}a_i x_i\le R,\quad x_i\ge 0, i=1,...,n.$$

Обозначив $z=\max_{1\le i\le n}a_i x_i$, получаем

$$\max_x\sum_{i=1}^n\pi_i x_i,$$
$$z\le R,\quad a_i x_i\le z,\quad Ax\le b,\quad x_i\ge 0, i=1,...,n. \tag{2.1.17}$$

Введем для задачи (2.1.17) функцию Лагранжа $L_2=\sum_{i=1}^n\pi_i x_i+\lambda_2^0(R-z)$, где λ_2^0 – оптимальное значение множителя Лагранжа. Задача (2.1.17) сводится к задаче

$$\max_x(\sum_{i=1}^n\pi_i x_i+\lambda_2^0(R-z)),$$
$$a_i x_i\le z,\quad Ax\le b,\quad x_i\ge 0, i=1,...,n. \tag{2.1.18}$$

Из (2.1.5) и (2.1.18) следует, что решения задач (2.1.5) и (2.1.16) совпадают при $\alpha=\lambda_2^0$. Найдем λ_2^0. Для этого построим к задаче (2.1.17) двойственную задачу. Матрица коэффициентов при неизвестных (x,z) в ограничениях задачи (2.1.17) имеет вид $\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_n & -1 \\ & A & & & 0 \end{pmatrix}$, а вектор ограничений $(R, 0, b)$. Транспонированная к $\tilde{A}_2$ матрица:

$$\tilde{A}_2^T = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \vdots & 0 & \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots & A^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \\ 0 & 0 & \vdots & a_n & \\ 1 & -1 & \vdots & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $(\lambda_2, \bar{\xi}_2, \bar{\nu}_2)$ – переменные двойственной задачи, $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$, тогда двойственная задача есть

$$\min_{\lambda_2, \bar{\xi}_2, \bar{\nu}_2} (R\lambda_2 + b\bar{\nu}_2), \quad \tilde{A}_2^T \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \bar{\xi}_2 \\ \bar{\nu}_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 \geq 0, \bar{\xi}_2 \geq 0, \bar{\nu}_2 \geq 0,$$

или

$$\min_{\lambda_2, \bar{\xi}_2, \bar{\nu}_2} (R\lambda_2 + b\bar{\nu}_2),$$

$$a_i \xi_{2i} + \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \nu_{2j} \geq \pi_i, \, i = 1, \dots, n, \quad \lambda_2 - \sum_{i=1}^{n} \xi_{2i} \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \bar{\xi}_2 \geq 0, \bar{\nu}_2 \geq 0. \tag{2.1.19}$$

Так как в (2.1.5) $z > 0$, то в (2.1.19) $\lambda_2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_{2i}$.

Пусть для $R_{l1} \leq R \leq R_{l2}, l = 1, \dots, L$, задача (2.1.19) имеет одно и то же решение $(\lambda_{2l}^0, \bar{\xi}_{2l}^0, \bar{\nu}_{2l}^0)$. Тогда $\forall l \;\; \alpha = \sum_{i=1}^{n} \xi_{2li}^0$. Но при увеличении R (переходе к следующему интервалу значений) уменьшается оптимальное λ_2, а, следовательно, и α. Значит, $\sum_{i=1}^{n} \xi_{2(l+1)i}^0 \leq \alpha \leq \sum_{i=1}^{n} \xi_{2li}^0$. Максимизация целевой функции по z в (2.1.5) при $\forall l \quad \sum_{i=1}^{n}\xi^0_{2(l+1)i} \le \alpha \le \sum_{i=1}^{n}\xi^0_{2li}$ приводит к $z^0 = R_{l2}$. Теорема доказана.

Теорема 2.1.5. Если $\pi_i > 0, b_j > 0, \ a_i > 0, a_{ji} > 0, \ i = 1,...,n, \ j = 1,...,m$, то в задаче (2.1.5) максимальное значение коэффициента риска $\alpha = \sum_{i=1}^{n}\frac{\pi_i}{a_i}$ соответствует минимальному приемлемому значению риска в задаче (2.1.16) $R = \min\limits_{0\le j\le m}\frac{b_j}{\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ji}}{a_i}}$, при этом решения задач (2.1.5) и (2.1.16) совпадают.

Доказательство. Из (2.1.19) имеем

$\xi_{2i} \ge \frac{\pi_i}{a_i} - \frac{\sum_{j=1}^{m}a_{ji}\nu_{2j}}{a_i}, i = 1,...,n, \lambda_2 = \sum_{j=1}^{m}\xi_{2j}$. Следовательно, максимальное $\alpha = \lambda_2$ соответствует $\bar{\xi}_2 = (\frac{\pi_1}{a_1},...,\frac{\pi_n}{a_n})$ и равно $\alpha = \sum_{i=1}^{n}\frac{\pi_i}{a_i}$. Суммируя первые n неравенств, получаем $\lambda_2 \ge \sum_{i=1}^{n}\frac{\pi_i}{a_i} - \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ji}}{a_i}\nu_{2j}$. Задача (2.1.19) примет вид

$$\min_{\lambda_2,\bar{\nu}_2}(R\lambda_2 + b\bar{\nu}_2),$$
$$\lambda_2 + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ji}}{a_i}\nu_{2j} \ge \sum_{i=1}^{n}\frac{\pi_i}{a_i}, \quad \lambda_1 \ge 0, \bar{\nu}_1 \ge 0. \tag{2.1.20}$$

При минимизации $R\lambda_1 + b\bar{\nu}_1$ в (2.1.20) ограничение $\lambda_2 + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ji}}{a_i}\nu_{2j} \ge \sum_{i=1}^{n}\frac{\pi_i}{a_i}$ в оптимальной точке будет выполняться как равенство, т. е. $\lambda_2 + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ji}}{a_i}\nu_{2j} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\pi_i}{a_i}$. Представим последнее равенство в виде $\frac{\lambda_2}{\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi_i}{a_i}} + \sum_{j=1}^{m}\frac{\nu_{2j}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi_i}{a_i}\Big/\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ji}}{a_i}} = 1$. Значит, решением задачи (2.1.20) является одна из точек $(\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi_i}{a_i}, 0,...,0)$, $(0, \sum_{i=1}^{n}\frac{\pi_i}{a_i} \Big/ \sum_{i=1}^{n}\frac{a_{1i}}{a_i}, 0,...,0)$, …, $(0,...,0, \sum_{i=1}^{n}\frac{\pi_i}{a_i} \Big/ \sum_{i=1}^{n}\frac{a_{mi}}{a_i})$. Оптимальная точка соответствует минимуму целевой функции задачи (2.1.20), т. е. оптимальная точка определяется из условия $\min\{R\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi_i}{a_i}; \sum_{i=1}^{n}\frac{\pi_i}{a_i}\min_{0\le j\le m}\frac{b_j}{\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ji}}{a_i}}\}$, или $\min\{R; \min_{0\le j\le m}\frac{b_j}{\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ji}}{a_i}}\}$.

Если $0 < R \le \min_{0\le j\le m}\frac{b_j}{\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ji}}{a_i}}$, то $(\lambda_2^0, \bar{\nu}_2^0) = (\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi_i}{a_i}, 0,...,0)$. Так как $\lambda_2^0 > 0$, то в задаче (2.1.17), эквивалентной (2.1.16), соответствующее ограничение $z \le R$ в оптимальной точке выполняется как равенство $z^0 = R$, и так как в (2.1.19) $\xi_{2i}^0 > 0, i = 1,...,n,$ то в (2.1.17) $a_i x_i^0 = z^0 = R$, $i = 1,...,n$. Откуда $x_i^0 = \frac{R}{a_i}, i = 1,...,n$. Значит, задача (2.1.5) при $\alpha = \sum_{i=1}^{n}\frac{\pi_i}{a_i}$ должна иметь то же решение. Максимизация по z в (2.1.5) при $\alpha = \sum_{i=1}^{n}\frac{\pi_i}{a_i}$ приводит к $z^0 = R = \min_{0\le j\le m}\frac{b_j}{\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ji}}{a_i}}$. При этом ограничения $Ax^0 \le b$ в задачах (2.1.5) и (2.1.17) выполнены. Действительно, подставив $x_i^0 = \frac{R}{a_i}, i = 1,...,n$, имеем $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ji}R}{a_i} \le b_j$, $j = 1,...,m$, или $R \le \frac{b_j}{\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ji}}{a_i}}$, $j = 1,...,m$, что равносильно $0 < R \le \min_{0\le j\le m}\frac{b_j}{\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ji}}{a_i}}$. Значит, если максимальное значение коэффициента риска есть $\alpha = \sum_{i=1}^{n}\frac{\pi_i}{a_i}$, то решения задач (2.1.5) и (2.1.16) совпадают при $R = \min_{0\le j\le m}\frac{b_j}{\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ji}}{a_i}}$. Теорема доказана.

Замечание. Если $R \geq R_н$, т. е. в задаче (2.1.16) ограничения по риску несущественны, то в задаче (2.1.5) коэффициент риска $\alpha = 0$. Получили, что обе задачи (2.1.5) и (2.1.16) сводятся к задаче ЛП

$$\max_x \sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i, \quad Ax \leq b \quad x_i \geq 0, i = 1,...,n.$$

При R=0 имеем нулевое решение задачи (2.1.16), а задача (2.1.5) имеет нулевое решение для коэффициента риска $\alpha > \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi_i}{a_i}$, но задачи управления риском теряют смысл.

Пример 2.1.4. Рассмотрим производственную задачу с исходными данными из примера 2.1.1. Определим уровень риска в задаче (2.1.16) из условия $R = \min\limits_{1 \leq j \leq m} \frac{b_j}{\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{ji}}{a_i}}$, т. е. $R = \frac{b_1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{1i}}{a_i}} = 0{,}425$. Возьмем согласно теореме 2.1.5 максимальное значение коэффициента риска в задаче (2.1.5) $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi_i}{a_i} = 52{,}833$. Тогда решения задач (2.1.5) и (2.1.16) совпадают, оптимальный производственный план для этих задач есть $x^0 = (0{,}283; 0{,}425; 0{,}142; 0{,}212)$. При этом для 15,422 < α ≤ 52,833 оптимальный производственный план тот же. Это значит, что при $0 < R \leq 0{,}425$ задача (2.1.19) имеет одно и то же решение. Если $0{,}425 < R \leq 0{,}8189$, то задача (2.1.19) имеет одно и то же, но уже другое решение; при R=0,8189 и 13,75 < α ≤ 15,422, решения задач (2.1.5) и (2.1.16) есть $x^0 = (0{,}545; 0; 0{,}273; 0{,}409)$. Если $0{,}8189 < R \leq 1{,}085$, то получаем следующее решение задачи (2.1.19); при R=0,8189 и 2,833 < α ≤ 13,75, решения задач (2.1.5) и (2.1.16) есть $x^0 = (0{,}723; 0; 0{,}362; 0{,}298)$. При $1{,}085 < R \leq 2{,}872$ решения задач (2.1.5) и (2.1.16) совпадают для R=2,872 и 0 < α ≤ 2,833, т. е. оптимальный план есть $x^0 = (0{,}426; 0; 0{,}957; 0)$. Например, при R=2, решения задач (2.1.5) и (2.1.16) не совпадают; решением задачи

(2.1.16) при R=2 является план $x^0 = (0{,}571; 0; 0{,}667; 0{,}145)$. Если решать задачу (2.1.16) без учета ограничений по риску, а затем проверить выполнение этих ограничений в точке $x^0 = (0{,}426; 0; 0{,}957; 0)$, то нарушается ограничение $a_3 x_3^0 = 3 \cdot 0{,}957 = 2{,}872 > 2$.

При $R > 2{,}872$ и $\alpha = 0$ задачи (2.1.5) и (2.1.16) дают оптимальное решение близкое к $x^0 = (0{,}426; 0; 0{,}957; 0)$ и отличающееся от него в пятнадцатом разряде. Найдем достаточное значение приемлемого риска, начиная с которого ограничения задачи (2.1.16) несущественны: $\max\limits_{1 \le i \le n} \min\limits_{1 \le j \le m} \dfrac{b_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_{ji}}{a_i}} = \max\{1{,}5; 0{,}882; 3{,}462; 2{,}25\} = 3{,}462$. В задаче (2.1.16) возьмем соответствующее нулевому α значение R=4 > 3,462, тогда получаем одинаковые решения $x^0 = (0{,}426; 0; 0{,}957; 0)$. То, что условие $R \ge \max\limits_{1 \le i \le n} \min\limits_{1 \le j \le m} \dfrac{b_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_{ji}}{a_i}}$ теоремы 2.1.3 является достаточным, демонстрирует численный эксперимент: при R=3 < 3,462 и $\alpha = 0$ решения задач (2.1.5) и (2.1.16) совпадают. Минимальное R, при котором ограничения по риску становятся несущественными есть R = 2,872.

2.2. Исследование связи решений линейных задач управления с функциями риска, заданными в метрике l_1

Рассмотрим ситуацию, когда предприятие заинтересовано в минимальном отклонении от плановых характеристик деятельности x_i^* каждой подсистемы. В качестве оценки риска можно использовать функцию риска, заданную в метрике l_1: $R_{l_1 abs}(x) = M(|x_i - x_i^*|)$, где x_i – случайное значение показателя деятельности i-й подсистемы как результат внешних воздействий.

Рассмотрим постановку задачи управления риском с линейной сверткой критериев:

$$\max_{x \in X}\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i - \alpha \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mid x_i - x_i^* \mid\right), \qquad (2.2.1)$$

где $X = \{x \mid x_i \geq 0, i = 1,...,n, Ax \leq b\}$, $A = (a_{ji})_{m \times n}$ и $b = (b_1,...,b_m)$ – технологическая матрица и вектор ресурсов предприятия, $\alpha > 0$ - коэффициент риска, $\beta_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$ – весовые коэффициенты, определяемые на основании статистических данных.

Введем новые переменные $y_i = x_i - x_i^*$, $i = 1,...,n$, и приведем задачу (2.2.1) к задаче линейного программирования (ЛП):

$$\max_{x,y}\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i - \alpha \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i\right),$$
$$y_i \geq x_i - x_i^*, y_i \geq x_i^* - x_i, \quad Ax \leq b, \quad x_i \geq 0, y_i \geq 0, i = 1,...,n. \qquad (2.2.2)$$

Теперь рассмотрим свертку критериев типа отношения. Соответствующая задача нахождения оптимального плана производства имеет вид:

$$\min_{x \in X} \frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_i \mid x_i - x_i^* \mid}{\sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i}, \qquad (2.2.3)$$

где $X = \{x \mid x_i \geq 0, i = 1,...,n, Ax \leq b\}$.

Сведем задачу (2.2.3) к задаче ЛП. Введем переменные $\mu = (\sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i)^{-1}$, $y_i = x_i - x_i^*$, $i = 1,...,n$. Тогда имеем $\sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i \mu = 1$. Обозначим $\eta_i = y_i \mu$, $w_i = x_i \mu$. Задача (2.2.3) примет вид

$$\min_{\overline{w},\mu,\overline{\eta}} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \eta_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i w_i = 1,\ A\overline{w} - b\mu \le 0, \quad \eta_i \ge w_i - x_i^* \mu, \quad \eta_i \ge x_i^* \mu - w_i, \tag{2.2.4}$$

$$w_i \ge 0, \eta_i \ge 0, i = 1,...,n,\ \mu \ge 0.$$

Пусть $(\overline{w}^0, \mu^0, \overline{\eta}^0)$ – решение задачи (2.2.4), тогда $x_i^0 = \dfrac{w_i^0}{\mu^0}$, $i = 1,...,n$, – компоненты оптимального плана задачи (2.2.3).

Введем обозначение $c = \min\limits_{1 \le i \le n} x_i^* \beta_i$ и рассмотрим вопрос о взаимосвязи решений задач (2.2.1) и (2.2.3).

Теорема 2.2.1. Если $\pi_i > 0, b_j > 0, a_i > 0, a_{ji} > 0$, $i = 1,...,n,\ j = 1,...,m$, коэффициент риска $\alpha = \dfrac{1}{c \max\limits_{1 \le j \le m} \min\limits_{1 \le i \le n} (\frac{a_{ji}}{\pi_i b_j} + \frac{1}{\pi_i x_i^*})}$, то решения задач (2.2.1) и (2.2.3) совпадают.

Доказательство. Запишем задачу (2.2.2) через переменные $(\overline{w}, \mu, \overline{\eta})$:

$$\max_{\overline{w},\mu,\overline{\eta}} (\sum_{i=1}^{n} \pi_i w_i - \alpha \sum_{i=1}^{n} \beta_i \eta_i),$$

$$A\overline{w} \le b\mu, \quad \eta_i \ge w_i - x_i^* \mu, \quad \eta_i \ge x_i^* \mu - w_i, \quad w_i \ge 0, \eta_i \ge 0, i = 1,...,n,\ \mu \ge 0,$$

или

$$\min_{\overline{w},\mu,\overline{\eta}} (\sum_{i=1}^{n} \beta_i \eta_i - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} \pi_i w_i), \tag{2.2.5}$$

$$A\overline{w} \le b\mu, \quad \eta_i \ge w_i - x_i^* \mu, \quad \eta_i \ge x_i^* \mu - w_i, \quad w_i \ge 0, \eta_i \ge 0, i = 1,...,n,\ \mu \ge 0.$$

Введем для задачи (2.2.4) функцию Лагранжа $L = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \eta_i - \lambda^0 \sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i w_i$, где λ^0 – оптимальное значение множителя Лагранжа. Задача (2.2.3) сводится к задаче

$$\min_{\overline{w},\mu,\overline{\eta}} (\sum_{i=1}^{n} \beta_i \eta_i - \lambda^0 \sum_{i=1}^{n} \pi_i w_i),$$

$$A\overline{w} - b\mu \le 0, \quad \eta_i \ge w_i - x_i^* \mu, \quad \eta_i \ge x_i^* \mu - w_i, \tag{2.2.6}$$

$$w_i \ge 0, \eta_i \ge 0, i = 1,...,n,\ \mu \ge 0.$$

Из (2.2.5) и (2.2.6) следует, что решения задач (2.2.2) и (2.2.3) совпадают при $\alpha = \dfrac{1}{\lambda^0}$.

Найдем λ^0. Для этого построим к задаче (2.2.4) двойственную задачу. Матрица коэффициентов при неизвестных $(\overline{w}, \mu, \overline{\eta})$ в ограничениях задачи (2.2.4) имеет вид

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \dots & \dots & \pi_n & 0 & 0 \\ & -A & & & b & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & x_1^* \dots 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \dots x_n^* & 0 \dots 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -x_1^* \dots 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \dots -x_n^* & 0 \dots 1 \end{pmatrix}$$, а вектор ограничений (1, 0, 0).

Пусть $(\lambda, \overline{\xi}, \overline{\nu}_1, \overline{\nu}_2)$ – переменные двойственной задачи, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, тогда двойственная задача есть $\max\limits_{\lambda, \overline{\xi}, \overline{\nu}_1, \overline{\nu}_2} \lambda, \quad \widetilde{A}^T \begin{pmatrix} \lambda \\ \overline{\xi} \\ \overline{\nu}_1 \\ \overline{\nu}_2 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \overline{\xi} \ge 0, \overline{\nu}_1 \ge 0, \overline{\nu}_2 \ge 0,$ или

$$\max_{\lambda, \overline{\xi}, \overline{\nu}_1, \overline{\nu}_2} \lambda,$$

$$\pi_i \lambda - \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \xi_j - (\nu_{1i} - \nu_{2i}) \le 0, \quad \sum_{j=1}^{m} b_j \xi_j + x_i^* (\nu_{1i} - \nu_{2i}) \le 0, \tag{2.2.7}$$

$$\nu_{1i} + \nu_{2i} \le \beta_i, \, i = 1, \dots, n, \quad \lambda \ge 0, \overline{\xi} \ge 0, \overline{\nu}_1 \ge 0, \overline{\nu}_2 \ge 0.$$

Так как в (2.2.4) $\mu > 0$, то в (2.2.7) $\sum\limits_{j=1}^{m} b_j \xi_j + x_i^* (\nu_{1i} - \nu_{2i}) = 0, \, i = 1, \dots, n$, или $-x_i^* (\nu_{1i} - \nu_{2i}) = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j \xi_j, \, i = 1, \dots, n$. Из последнего равенства имеем $x_i^* \nu_{2i} = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j \xi_j + x_i^* \nu_{1i}, \, i = 1, \dots, n$. Подставив в последнее неравенство, получаем

$2x_i^*\nu_{1i} \le x_i^*\beta_i - \sum_{j=1}^{m} b_j\xi_j,\ i=1,...,n$. Так как $\forall i \ \ \nu_{1i} \ge 0$, то максимизация целевой функции по $\bar{\xi}$ приводит к условию $\min\limits_{1\le i\le n} x_i^*\beta_i = \sum_{j=1}^{m} b_j\xi_j$. Тогда задача (2.2.7) сводится к задаче

$$\max_{\lambda,\bar{\xi}} \lambda,$$

$$\pi_i\lambda \le \sum_{j=1}^{m}(a_{ji} + \frac{b_j}{x_i^*})\xi_j, \quad \sum_{j=1}^{m} b_j\xi_j = c, \quad \lambda \ge 0, \bar{\xi} \ge 0. \tag{2.2.8}$$

Из (2.2.8) следует $\lambda^0 = \max\limits_{\bar{\xi}} \min\limits_{1\le i\le n} \dfrac{\sum_{j=1}^{m}(x_i^* a_{ji} + b_j)\xi_j}{x_i^*\pi_i}$, $\sum_{j=1}^{m} b_j\xi_j = c, \bar{\xi} \ge 0$.

Максимальное значение на множестве $\sum_{j=1}^{m} b_j\xi_j = c, \bar{\xi} \ge 0$ достигается в одной из угловых точек $(0,...,c/b_j,0,...,0),\ j=1,...,m$. Значит, $\lambda^0 = \max\limits_{1\le j\le m}\min\limits_{1\le i\le n} \dfrac{(x_i^* a_{ji} + b_j)\dfrac{c}{b_j}}{x_i^*\pi_i}$, или $\lambda^0 = c\max\limits_{1\le j\le m}\min\limits_{1\le i\le n}(\dfrac{a_{ji}}{\pi_i b_j} + \dfrac{1}{\pi_i x_i^*})$, что и требовалось доказать.

Пример 2.2.1. Рассмотрим производственную задачу, в которой имеется четыре производственных процесса. Вектор прибылей в расчете на единицу продукции каждого процесса $\pi = (20;18;30;23)$, вектор ресурсов трех видов есть $b = (3;5;2)$, технологическая матрица $A = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 3{,}4 & 2{,}6 & 4 \\ 5 & 4{,}2 & 3 & 1 \\ 3{,}5 & 4{,}6 & 2 & 1{,}7 \end{pmatrix}$ (из примера 2.1.1), вектор плановых значений выпуска продукции для каждого производственного процесса $x^* = (0{,}4;\ 0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}2)$ и вектор весовых коэффициентов $\beta = (0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}1;\ 0{,}4)$. Найдем оптимальное значение целевой функции в задаче (2.2.4): $\overline{w}^0 = (0{,}017;\ 0{,}017;\ 0{,}00578;\ 0{,}008349)$, $\mu^0 = 0{,}042$, $\eta^0 = (0;\ 0;\ 0{,}015;\ 0{,}0)$. Тогда решение задачи (2.2.3) найдем по формуле

$x_i^0 = \dfrac{w_i^0}{\mu^0}$, $i = 1,...,n$: $x^0 = (0{,}4;\, 0{,}4;\, 0{,}138;\, 0{,}2)$. Пусть теперь коэффициент риска в задаче (2.2.2) согласно теореме 2.1.8 равен $\alpha = \dfrac{1}{c \max\limits_{1 \le j \le m} \min\limits_{1 \le i \le n} \left(\dfrac{a_{ji}}{\pi_i b_j} + \dfrac{1}{\pi_i x_i^*}\right)} = 625$. Тогда оптимальный производственный план в задаче (2.2.2) (или (2.2.1)) $x^0 = (0{,}4;\, 0{,}4;\, 0{,}138;\, 0{,}2)$, т. е. совпадает с решением задачи (2.2.3). Можно решить задачу (2.2.5), а затем найти оптимальное решение $x_i^0 = \dfrac{w_i^0}{\mu^0}$, $i = 1,...,n$, для задачи (2.2.2). В этом случае решение задачи (2.2.5) при $\alpha = 625$ есть $\overline{w}^0 = (98{,}75;\, 98{,}75;\, 34{,}183;\, 49{,}375)$, $\mu^0 = 246{,}874$, $\eta^0 = (0;\, 0;\, 89{,}254;\, 0{,}0)$, а решение (2.2.1) есть $x^0 = (0{,}4;\, 0{,}4;\, 0{,}138;\, 0{,}2)$.

2.3. Динамическая производственная минимаксная задача управления риском для задачи распределения инвестиций

Двухкритеральный подход к управлению риском может быть применен и к динамическим процессам. В данном разделе рассматривается одна из возможных постановок динамических задач управления с гарантированной оценкой риска.

Предполагается, что сложная системай состоит из n подсистем, функционирование каждой из которых описывается дифференциальными уравнениями. Рассматривается фиксированный интервал функционирования $[0, T]$, на котором программное управление задается векторной функцией $u(\cdot)$. Здесь для функции в целом используется обозначение $u(\cdot)$, а в момент t ее значения есть $u(t)$). Будем считать. что траектория системы $x(\cdot)$ однозначно определяется выбранным управлением.

Определим эффективность i-й подсистемы в фиксированный момент времени t функцией $h_i(x_i(t), u(t), t)$, а оценка возможного ущерба - функцией риска $g_i(x_i(t),u(t),t)$, где $x_i(t)$ – траектория i-й подсистемы в фазовом пространстве. Функционирование i-й подсистемы описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(x_i(t),u(t),t) \qquad (2.3.1)$$

с начальным состоянием

$$x_i(0) = x_{0i}. \qquad (2.3.2)$$

Критерий эффективности функционирования системы будем считать аддитивным в каждый момент времени, т.е. равным сумме эффективностей n подсистем, а риск будет учитывать с помощью гарантированной оценки. Используем линейную свертку эффективность-риск. Общий критерий системы представляет собой интегральный функционал вида:

$$J(u(\cdot)) = \int_0^T [\sum_{i=1}^{n} h_i(x_i(t),u(t),t) - \max_{1\le i\le n} g_i(x_i(t),u(t),t)]dt. \qquad (2.3.3)$$

В функционале (2.3.3) подынтегральные функции произвольны, поэтому они могут включать и коэффициент риска, в том числе и зависящий от времени.

Определим множество допустимых управлений

$$\mathbf{U} = \{u(\cdot) \in L_2[0,T] \mid u(t) \in U \quad \forall t \in [0,T]\}. \qquad (2.3.4)$$

Таким образом, в качестве управлений используются измеримые вектор-функции $u(\cdot)$ с интегрируемыми на $[0,T]$ квадратами каждой компоненты. Допустимое множество их значения в каждый момент времени предполагается выпуклым компактом $U \subset R^r$ в r-мерном евклидовом пространстве.

Предположим, что для любого допустимого управления $u(\cdot)$ выполнены условия существования и единственности абсолютно непрерывного решения системы уравнений (2.3.1) с начальными условиями (2.3.2) на отрезке $[0,T]$. Если использовать принятое обозначение $W_2^{(1)}[0,T]$

пространства абсолютно непрерывных вектор-функций с производными из $L_2[0,T]$ и ввести $\bar{x}_0 = (x_{01},...,x_{0n})$, то мнжество траекторий есть

$$\mathbf{X} = \{\bar{x}(\cdot) \in W_2^{(1)}[0,T] \,|\, \bar{x}(t) \in R^k, \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0\}. \tag{2.3.5}$$

Теорема 2.3.1. Пусть функции $f_i(x,u,t)$ непрерывны по (x,u), дифференцируемы по x, линейны по u, измеримы по t, удовлетворяют условию Липшица по x и условию

$$\left|\langle x, f_i(x,u,t)\rangle\right| \le d_i(1+|x|^2); \tag{2.3.6}$$

функции $h_i(x,u,t)$ и $g_i(x,u,t)$ ограничены сверху на $R^{k_i} \times U \times [0,T]$, дифференцируемы по x, линейны по u и удовлетворяют условию Липшица по x; U - выпуклый компакт в R^r. Пусть $u^0(\cdot)$ – оптимальное управление в задаче максимизации (2.3.3), (2.3.1), (2.3.2); $x_i^0(\cdot)$ - соответствующие ему траектории (2.3.1), (2.3.2). Тогда существуют неотрицательные скалярные измеримые функции $p_i(\cdot)$, $i = 1,...,n$, $\sum_{i=1}^{n} p_i(t) \equiv 1$, $p_i(t) = 0$ при $i \notin I(t) = Arg \max_{1\le i\le n} g_i(x_i(t),u(t),t)$ и вектор-функции $\psi_i^0(\cdot)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_i^0(t) = -\frac{\partial}{\partial x} f_i(x_i^0(t),u^0(t),t)\psi_i^0(t) - \frac{\partial}{\partial x} h_i(x_i^0(t),u^0(t),t) + \\ + p_i(t)\frac{\partial}{\partial x} g_i(x_i^0(t),u^0(t),t), \qquad \psi_i^0(T) = 0,\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

такие, что функция Гамильтона

$$\begin{aligned}&H(\bar{x}^0(t),u,t,\bar{\psi}^0(t),\bar{p}(t)) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} [\, f_i(x_i^0(t),u,t)\psi_i^0(t) + h_i(x_i^0(t),u,t) - p_i(t) g_i(x_i^0(t),u,t)]\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

достигает максимума по $u \in U$ на управлении $u^0(t)$ при почти всех $t \in [0,T]$.

Доказательство теоремы приведено в [30].

Применим теорему (2.3.1) к линейному случаю.

Рассмотрим в качестве интерпретации управления $u_i(t)$ - средства, вкладываемые в i-ю подсистему в момент времени t, $i=1,...,n$. Траектория системы представляет собой вектор траекторий подсистем $x(t)=(x_1(t),...,x_i(t),...,x_n(t))$, где $x_i(t)$ - скалярная величина. Она характеризует состояние i-й подсистемы в момент времени t (например, выпуск продукции). Линейное дифференциальное уравнение, описывающее процесс функционирования каждой подсистемы, имеет вид:

$$\dot{x}_i(t)=u_i(t)-k_i x_i(t), \quad x_i(0)=x_{0i}, \tag{2.3.9}$$

где k_i -издержки на единицу $x_i(t)$ (например, амортизация). Линейный критерий эффективность подсистемы в фиксированный момент времени задается в виде $h_i(x_i(t),u_i(t),t)=\pi_i x_i(t)$, где π_i может интерпретироваться, например, как прибыль от реализации единицы выпущенной продукции. Оценка риска для каждой подсистемы - функция $g_i(x_i(t),u_i(t),t)=a_i x_i(t)$, где a_i – потери с единицы $x_i(t)$. Общий критерий системы (2.3.3) в данном случае приобретает вид

$$\int_0^T [\sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i(t) - \max_{1\le i\le n} a_i x_i(t))]dt. \tag{2.3.10}$$

Имеем задачу нахождения максимума функционала (2.3.10) по $u(t)\in \mathbf{U}$, $\mathbf{U}=\{u(t)\,|\,u_i(t)\ge 0, i=1,...,n, \sum_{i=1}^{n} u_i(t)=C\}$ при дифференциальных и начальных условиях (2.3.9).

Выпишем функцию Гамильтона (2.3.8) для данного случая:

$$H(\bar{x}^0(t),u,t,\bar{\psi}^0(t),\bar{p}(t))=\sum_{i=1}^{n}[(u_i-k_i x_i^0(t))\psi_i^0(t)+\pi_i x_i^0(t)-p_i(t)a_i x_i^0(t))].$$

Уравнения (2.3.7) приобретают вид

$$\dot{\psi}_i^0(t)=k_i\psi_i^0(t)-(\pi_i-p_i(t)a_i), \quad \psi_i^0(T)=0. \tag{2.3.11}$$

Решение уравнений (2.3.11) есть

$$\psi_i^0(t)=\frac{\pi_i-p_i(t)a_i}{k_i}(1-e^{k_i(t-T)}), i\in I(t), \quad \psi_i^0(t)=\frac{\pi_i}{k_i}(1-e^{k_i(t-T)}), i\notin I(t). \tag{2.3.12}$$

Функция Гамильтона здесть линейна по u, U - выпуклый многогранник. Так как функции $\psi_i^0(t) > 0$ при $t < T$, то получаем следующие условия для оптимального управления:

$$u_i^0(t) > 0, \quad i \in \widetilde{I}(t), \quad \sum_{i \in \widetilde{I}(t)} u_i^0(t) = C, \quad \widetilde{I}(t) = Arg \max_{1 \le i \le n} \psi_i^0(t), \quad u_i^0(t) = 0, \quad i \notin \widetilde{I}(t).$$

Это означает, что имеющиеся средства C в любой момент времени распределяется между теми подсистемами, для которых величина $\psi_i^0(t)$, максимальна, а оптимальная траектория согласно (2.3.9) определяется как решение уравнений

$$\begin{aligned} &x_i^0(t) = (x_{0i} - \frac{u_i^0(t)}{k_i})e^{-k_i(t-T)} + \frac{u_i^0(t)}{k_i}, \quad u_i^0(t) > 0, \quad i \in \widetilde{I}(t), \quad \sum_{i \in \widetilde{I}(t)} u_i^0(t) = C, \\ &x_i^0(t) = x_{0i}e^{-k_i(t-T)}, \quad i \notin \widetilde{I}(t). \end{aligned} \qquad (2.3.13)$$

Данная линейная модель была применена для решения практической задачи [29,30].

Юридическое лицо, владеющее несколькими кофе-автоматами в г. Комсомольске-на-Амуре, ежемесячно тратит на сырье (кофе, какао, сахар, сливки и др.) в среднем 3000 руб. на каждый автомат. Рассмотрим задачу наилучшего распределения дополнительных средств в размере C=2000 руб. между двумя кофе-автоматами с целью развития бизнеса так, чтобы по возможности максимизировать дополнительную прибыль и минимизировать риск потерь дополнительной прибыли. Модель, описывающая процесс вложения дополнительных средств в момент времени t_0, относится к классу непрерывных моделей с кусочно-непрерывным управлением. Для решения поставленной задачи использовалась модель (2.3.9), (2.3.10).

Таблица 2.1

Чистая прибыль и постоянные расходы с двух кофе-автоматов

	Кофе-автомат 1	**Кофе-автомат 2**
февраль	18,31491	17,56706
чистая прибыль	17564	10347
стаканов	959	589
март	18,14871	17,75655
чистая прибыль	16842	11524
стаканов	928	649
апрель	18,03879	17,69158
чистая прибыль	12555	13021
стаканов	696	736
май	18,38374	18,1082
чистая прибыль	11306	11046
стаканов	615	610
июнь	18,46711	18,57874
чистая прибыль	8421	9438
стаканов	456	508
июль	20,05769	18,47811
чистая прибыль	2086	10976
стаканов	104	594
август	19,85106	18,42162
чистая прибыль	933	6816
стаканов	47	370
сентябрь	18,90595	18,40282
чистая прибыль	15881	19599
стаканов	840	1065
Среднее число стаканов	580	640
Расход (в месяц)	3915	4234
Расход (на стакан)	6,74	6,61

На основе статистических данных за последние восемь месяцев (см. табл. 2.1) были определены для каждого кофе-автомата в расчете на один стакан в рублях: максимальная прибыль $\pi_1 = 20{,}06$ и $\pi_2 = 18{,}58$, средние потери прибыли $a_1 = 1{,}29$ и $a_2 = 0{,}45$. Известно также из табл.1, что постоянные расходы (аренда, уборка, электроэнергия, коммунальные платежи) на каждый кофе-автомат в расчете на один стакан в среднем составляют $k_1 = 6{,}74$ и $k_2 = 6{,}61$ руб. Состояние каждого кофе-автомата в любой момент времени t есть количество стаканов $x_1(t)$ и $x_2(t)$, а $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – средства, вкладываемые в каждый автомат. При этом $u_1(t)+u_2(t)$=2000. Управление $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ является в данном случае кусочно-непрерывной вектор-функцией такой, что

$$u(t) = \begin{cases} 0, \quad t \in [0; t_0), \\ (u_1(t_0), u_2(t_0)), \quad t = t_0, \\ 0, \quad t \in (t_0; T]. \end{cases}$$

Для планового периода T=4 месяца и для t_0=1 месяц, а также при начальных условиях $x_1(0) = 840$ и $x_2(0) = 1065$ (число стаканов за последний восьмой месяц) найдем оптимальное управление и оптимальную траекторию.

Если $Arg \max\limits_{i=1,2} a_i x_i^0(1) = 1$, то $p_1(1) = 1$, $p_2(1) = 0$, а $Arg \max\limits_{i=1,2} \psi_i^0(1) = 2$. Следовательно, $u_1^0(1) = 0$, $u_2^0(1) = 2000$ руб., $x_1^0(1) = 0$, $x_2^0(1) = 303$ стаканов согласно (2.3.13), а значение критерия в оптимальной точке есть 5499. Значит, все дополнительные средства нужно вложить во второй кофе-автомат.

Если $Arg \max\limits_{i=1,2} a_i x_i^0(1) = 2$, то $p_1(1) = 0$, $p_2(1) = 1$, а $Arg \max\limits_{i=1,2} \psi_i^0(1) = 1$. Следовательно, $u_1^0(1) = 2000$ руб., $u_2^0(1) = 0$, $x_1^0(1) = 297$ стаканов, $x_2^0(1) = 0$ согласно (2.3.13), а значение критерия в оптимальной точке есть 5579. Значит, все дополнительные средства нужно вложить в первый кофе-автомат.

Если $Arg \max\limits_{i=1,2} a_i x_i^0(1) = \{1,2\}$, то $p_1(1) + p_2(1) = 1$, $p_{1,2}(1) \geq 0$ и $1{,}28\, x_1^0(1)$ $=0{,}45\, x_2^0(1)$. Оптимальное управление в данном случае находим из системы

$$1{,}28 \cdot [(840 - \frac{u_1^0(1)}{6{,}74})e^{-6{,}74} + \frac{u_1^0(1)}{6{,}74}] = 0{,}45 \cdot [(1065 - \frac{u_2^0(1)}{6{,}61})e^{-6{,}61} + \frac{u_2^0(1)}{6{,}61}],$$

$$u_1(1) + u_2(1) = 2000.$$

Следовательно, имеем $u_1^0(1) = 525$ руб., $u_2^0(1) = 1475$ руб. Оптимальная траектория согласно (2.3.13) есть $x_1^0(1) = 78$ стаканов, $x_1^0(1) = 224$ стаканов. Значит, все дополнительные средства нужно вложить как в первый, так и во второй кофе-автомат. Значения вспомогательных функций находим из системы

$$\frac{20{,}06 - 1{,}28 p_1(1)}{6{,}74}(1 - e^{6{,}74(1-4)}) = \frac{18{,}58 - 0{,}45 p_2(1)}{6{,}61}(1 - e^{6{,}61(1-4)}),\ p_1(1) + p_2(1) = 1,$$

в которой первое уравнение соответствует $\psi_1^0(1) = \psi_2^0(1)$ согласно (2.3.12) для $i \in I(1)$. Получили $p_1(1) = 0{,}905$, $p_2(1) = 0{,}095$ и $\psi_1^0(1) = \psi_2^0(1) = 2{,}804$. Значение критерия в оптимальной точке есть 5647.

Таким образом, максимальное значение критерия соответствует случаю, когда дополнительные средства в размере 2000 руб. распределяются между первым и вторым кофе-автоматами в количествах 525 и 1475 руб. соответственно.

ГЛАВА 3. ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ СРЕДСТВА ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ РИСКОМ

3.1. Задача построения автоматизированной системы поддержки принятия решений в условиях риска

Лицо, принимающее решение (ЛПР), при нахождении своего оптимального набора проектов, как правило, стремясь избежать риска, затрудняются в выборе типа модели, учитывающей эффективность и риск.

В настоящее время свои услуги для ЛПР предлагают различные брокерские компании, например, такие как TradeWays, Finam или FOREX CLUB. В число предоставляемых ими услуг, в том числе, входят лекционные курсы по управлению финансами и услуги по составлению портфеля ценных бумаг. Для того чтобы воспользоваться услугой составления портфеля, ЛПР необходимо выбрать какую-либо стратегию, основываясь на предоставляемых аналитических обзорах или описаниях, предлагаемых на сайтах компаний. Например, такие стратегии как «Американские акции», «Антикризисная», «Семь самураев» и т. д. Далее, в зависимости от услуг, предоставляемых компанией, или будет предоставлен список активов подходящих под заявленные критерии, из которых ЛПР самостоятельно должен будет составить портфель, или будет предоставлен на выбор список управляющих, которые, отталкиваясь от предпочтений инвестора и используя его средства, будут играть на фондовом рынке. Таким образом, инвестор, выбрав стратегию, вкладывает деньги и получает или не получает прибыль, в зависимости от ситуации на рынке. Но информации об объеме оцениваемых статистических данных по каждой бумаге, или о математической модели, используемой при составлении портфеля для той или иной стратегии, ни одна компания не предоставляет.

Инструмент для самостоятельного нахождения портфеля с использованием собственных статистических данных и определенных математических моделей на данный момент отсутствует. Использование в качестве программного обеспечения MS Exel, MathCad или расчеты вручную не удобны для широкого круга пользователей – участников фондового рынка.

Предлагается специализированная программа, которая с помощью статистических данных, вводимым ЛПР, определяет структуру портфеля, его математическое ожидание и СКО с помощью моделей, выбираемых пользователем. Также программа находит ковариацию выбранных портфелей, что помогает оценить устойчивость сделанного выбора. Таким образом, предлагаемая программа дает возможность эффективно принимать решения инвесторам разного уровня, используя любой объем и выборку статистических данных интересующих ценных бумаг и определенную математическую модель, что актуально на сегодняшнем рынке.

3.2. Описание программы

Предлагаемая программа написана на языке программирования VB.NET. Использует статистические данные, предварительно занесенные в файл Ms Exel, для нахождения математических ожиданий случайных значений доходностей, ковариационной матрицы, дисперсии и СКО ценных бумаг (акций). Полученные статистические данные используются для составления оптимального состава портфеля ценных бумаг с помощью математических моделей описанных в главе 1 и определения ковариации портфелей.

Для определения оптимального состава портфеля ценных бумаг необходимо занести статистические данные (цены закрытия торговых сессий) бумаг за определенный период в файл статистики Ms Exel. Затем запустить программу и нажать на кнопку «Вывести данные». После этого под кнопкой «Вывести данные» можно будет увидеть необходимые статистические данные по каждой бумаге (см. рис. 3.1).

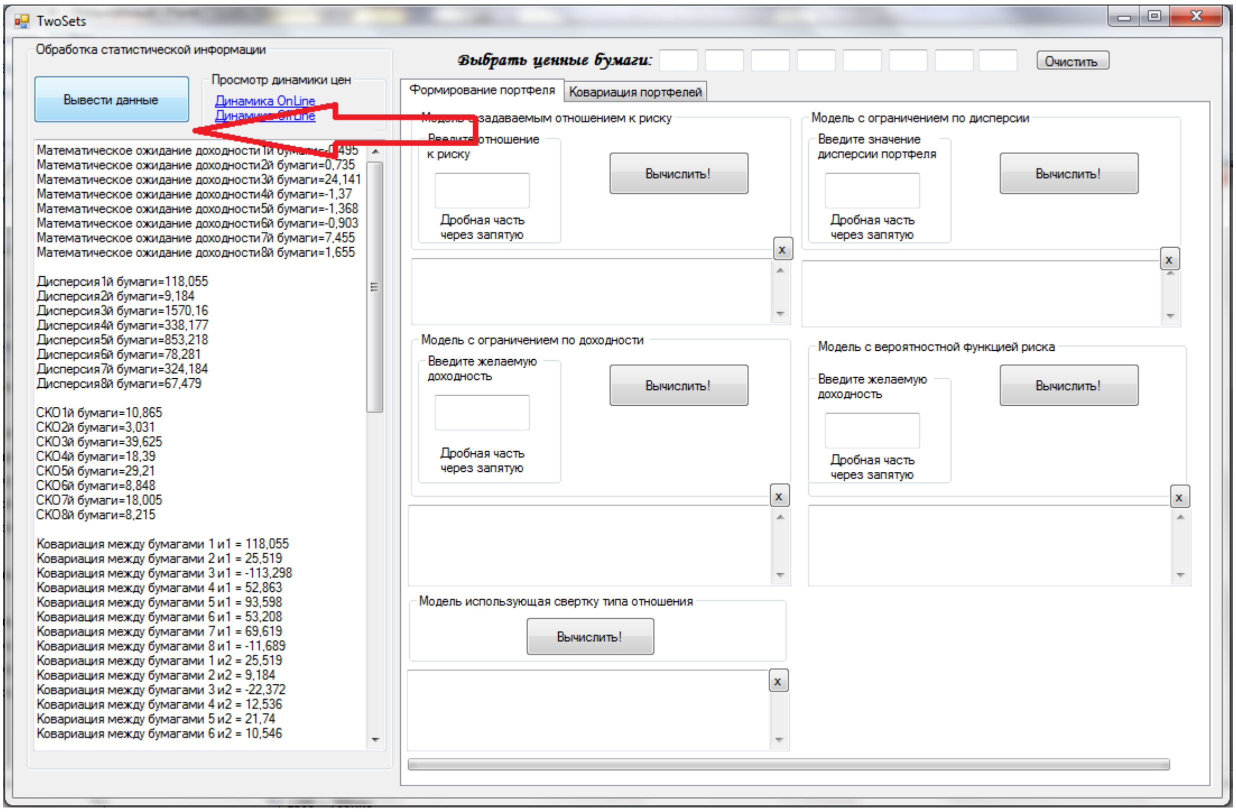
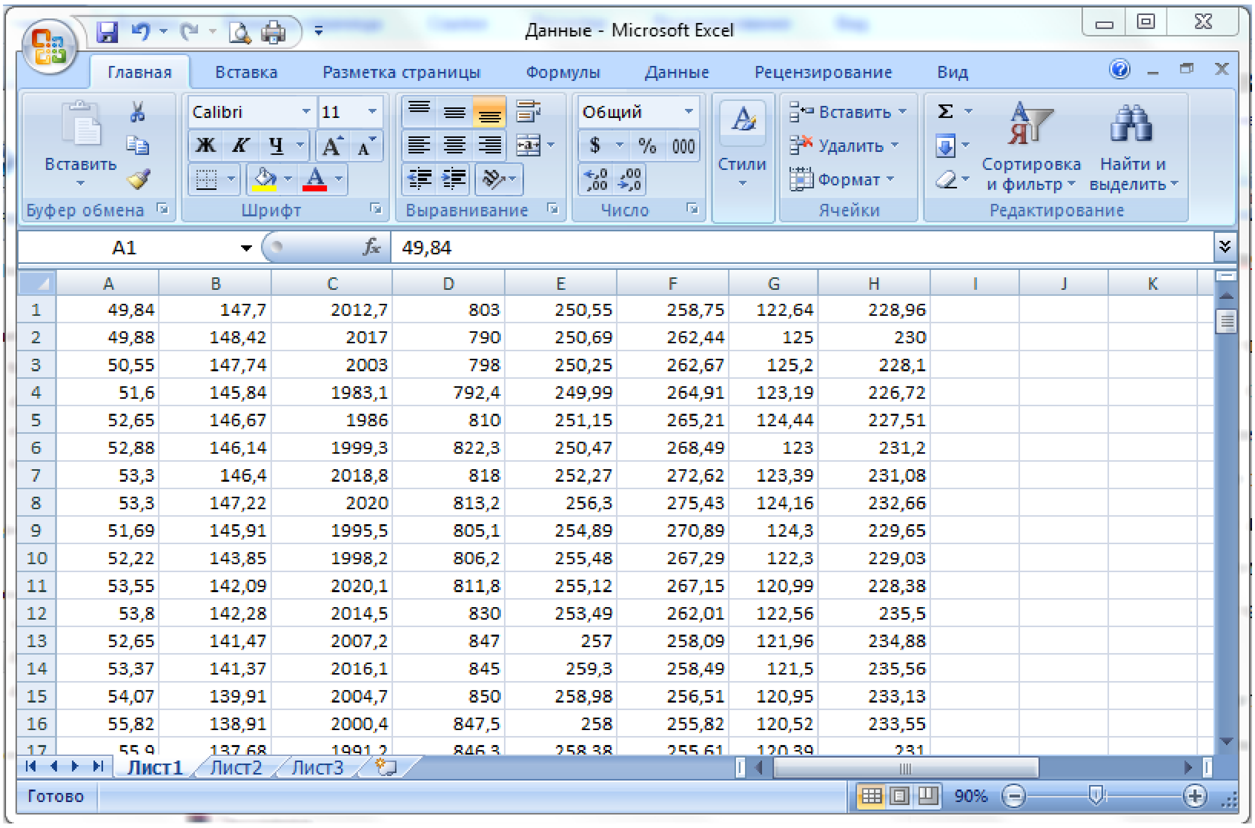


Рис. 3.1. Вывод статистических данных

В любой момент можно посмотреть и изменить файл данных, содержащий статистику цен выбранных бумаг, перейдя по гиперссылке «Динамика OffLine» (по этой ссылке мы попадаем в файл Ms Exel), или зайти на сайт www.finam.ru, на котором содержится вся статистика по любой ценной бумаге, перейдя по гиперссылке «Динамика OnLine». Гиперссылки находятся справа от кнопки «Вывести данные».

В файл Ms Exel пользователь заносит статистические данные самостоятельно. Он может взять интересующие данные с любого сайта или из собственного источника. Заполнять данный файл следует, начиная с первого листа, первого столбца и первой ячейки (см. рис. 3.2). Данные в каждой ячейке соответствуют цене определенной бумаги в определенный день. Количество данных по каждой бумаге и общее количество бумаг ограничено параметрами листа (для Ms Exel 2007 размер листа составляет 1 048 576 строки и 16 384 столбца).

Таким образом, пользователь может получить статистические данные и проанализировать большое число бумаг. При этом данная версия программы ограничивает размерность формируемого портфеля цифрой восемь (это ограничение не является существенным, программа может быть легко модифицирована под большую размерность). Выбор такой размерности связан с тем, что некоторые профессиональные участники фондового рынка, исходя из практических соображений, считают наиболее эффективным наличие в портфеле не более восьми разных активов (видов ценных бумаг). Дальнейшее увеличение их количества, как правило, не обеспечивает значительного снижения портфельного риска [116]. В то же время оно может вызвать эффект чрезмерной диверсификации, отрицательные следствия которого проявляются, например, в отсутствии качественного управления портфелем, высоких расходах на поиск ценных бумаг (расхода на предыдущий анализ и т.п.), покупки недостаточно качественных ценных бумаг (низкий уровень надежности, прибыльности и ликвидности ценных бумаг) и т. п.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	49,84	147,7	2012,7	803	250,55	258,75	122,64	228,96			
2	49,88	148,42	2017	790	250,69	262,44	125	230			
3	50,55	147,74	2003	798	250,25	262,67	125,2	228,1			
4	51,6	145,84	1983,1	792,4	249,99	264,91	123,19	226,72			
5	52,65	146,67	1986	810	251,15	265,21	124,44	227,51			
6	52,88	146,14	1999,3	822,3	250,47	268,49	123	231,2			
7	53,3	146,4	2018,8	818	252,27	272,62	123,39	231,08			
8	53,3	147,22	2020	813,2	256,3	275,43	124,16	232,66			
9	51,69	145,91	1995,5	805,1	254,89	270,89	124,3	229,65			
10	52,22	143,85	1998,2	806,2	255,48	267,29	122,3	229,03			
11	53,55	142,09	2020,1	811,8	255,12	267,15	120,99	228,38			
12	53,8	142,28	2014,5	830	253,49	262,01	122,56	235,5			
13	52,65	141,47	2007,2	847	257	258,09	121,96	234,88			
14	53,37	141,37	2016,1	845	259,3	258,49	121,5	235,56			
15	54,07	139,91	2004,7	850	258,98	256,51	120,95	233,13			
16	55,82	138,91	2000,4	847,5	258	255,82	120,52	233,55			
17	55,9	137,68	1991,2	846,3	258,38	255,61	120,39	231			

Рис. 3.2. Файл со статистическими данными

В качестве источника статистических данных был выбран сайт www.finam.ru, так как холдинг «ФИНАМ» является одним из крупнейших брокеров в России и осуществляет брокерские услуги на основных мировых биржах. За годы работы (основан в 1994 году) холдинг неоднократно становился лауреатом многих премий и наград.

В верхней части окна программы расположены поля для ввода номеров выбранных ценных бумаг. Вводить номера можно в любом порядке. В случае ошибочного ввода номера, его можно стереть с помощью клавиатуры или нажав на кнопку «Очистить» справа от описываемых полей. При нажатии на кнопку «Очистить» все поля будут очищены (см. рис. 3.3). Под номером ценной бумаги подразумевается столбец, в котором расположены ее статистические данные в файле статистики, который мы можем открыть, перейдя по гиперссылке «Динамика OffLine». Также номер ценной бумаги указан в перечне статистических данных (под кнопкой «Вывести данные»), например, «Математическое ожидание 1й бумаги» или «Дисперсия 5й бумаги».

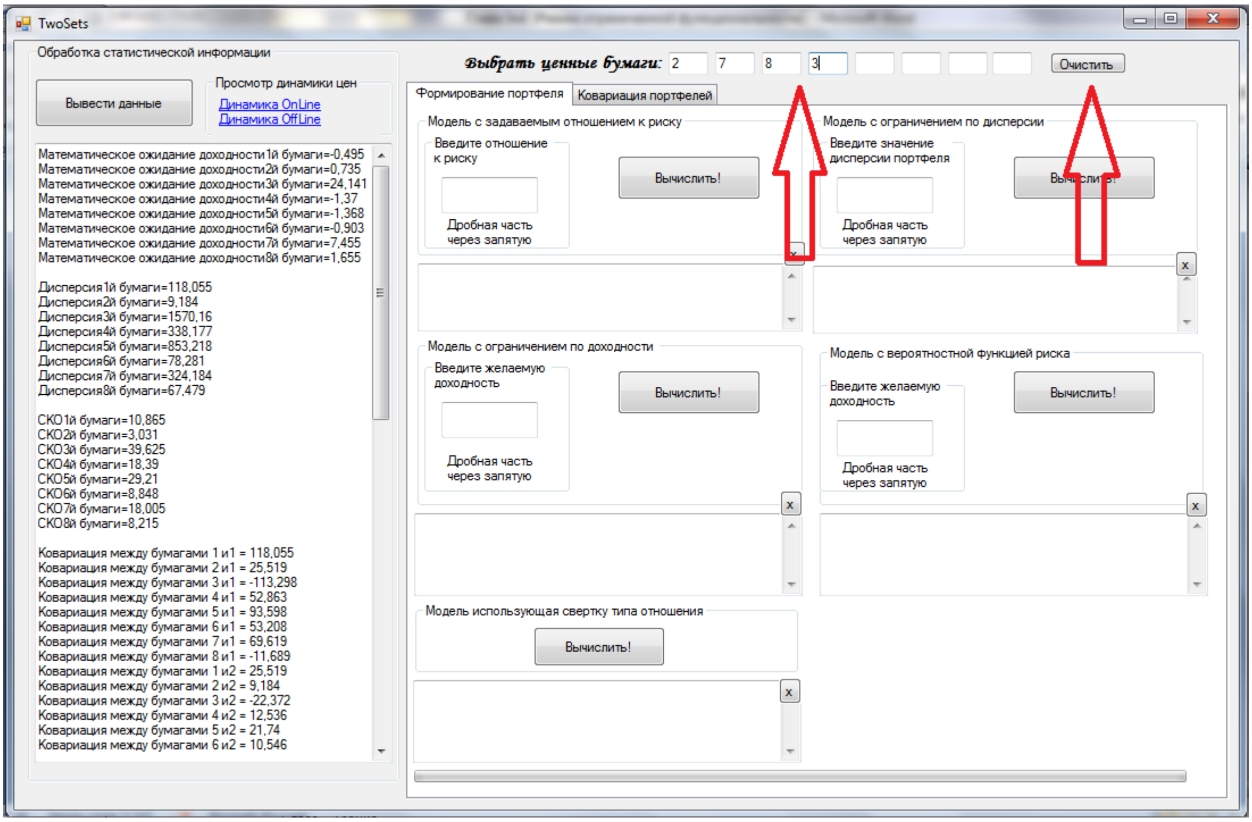


Рис. 3.3. Выбор ценных бумаг

После того как пользователь определился с ценными бумагами, переходим к первой вкладке: «Формирование портфеля», расположенной под полями для ввода номеров выбранных ценных бумаг.

В этой вкладке расположены пять фреймов для пяти различных моделей:

1. Модели с задаваемым отношением к риску, при выборе которой необходимо ввести в специальное поле коэффициент отношения к риску.

2. Модели с ограничением по дисперсии, при выборе которой необходимо ввести желаемое значение дисперсии портфеля.

3. Модель с ограничением по доходности, при выборе которой необходимо ввести желаемое значение доходности портфеля.

4. Модель с вероятностной функцией риска, при выборе которой также необходимо ввести доходность портфеля, вероятность неполучения которую будет минимальна.

5. Модель, использующая свертку типа отношения, не требующая дополнительных параметров.

После выбора определенной модели и ввода параметра, если это необходимо, требуется нажать на кнопку «Вычислить!». После чего в текстовом поле ниже появится информация о количестве выбранных бумаг и составе портфеля, а также математическое ожидание доходности и СКО портфеля. Стереть данные из этого поля можно кнопкой «x», расположенной в правом верхнем углу поля (см. рис. 3.4).

В случае изменения значения введенного параметра или состава ценных бумаг необходимо повторно нажать на клавишу «Вычислить!» и информация в текстовом поле обновится.

Таким образом, мы можем найти состав портфеля для выбранных ценных бумаг с помощью любых из предложенных моделей и сравнить полученные результаты, которые будут отображены в одной вкладке.

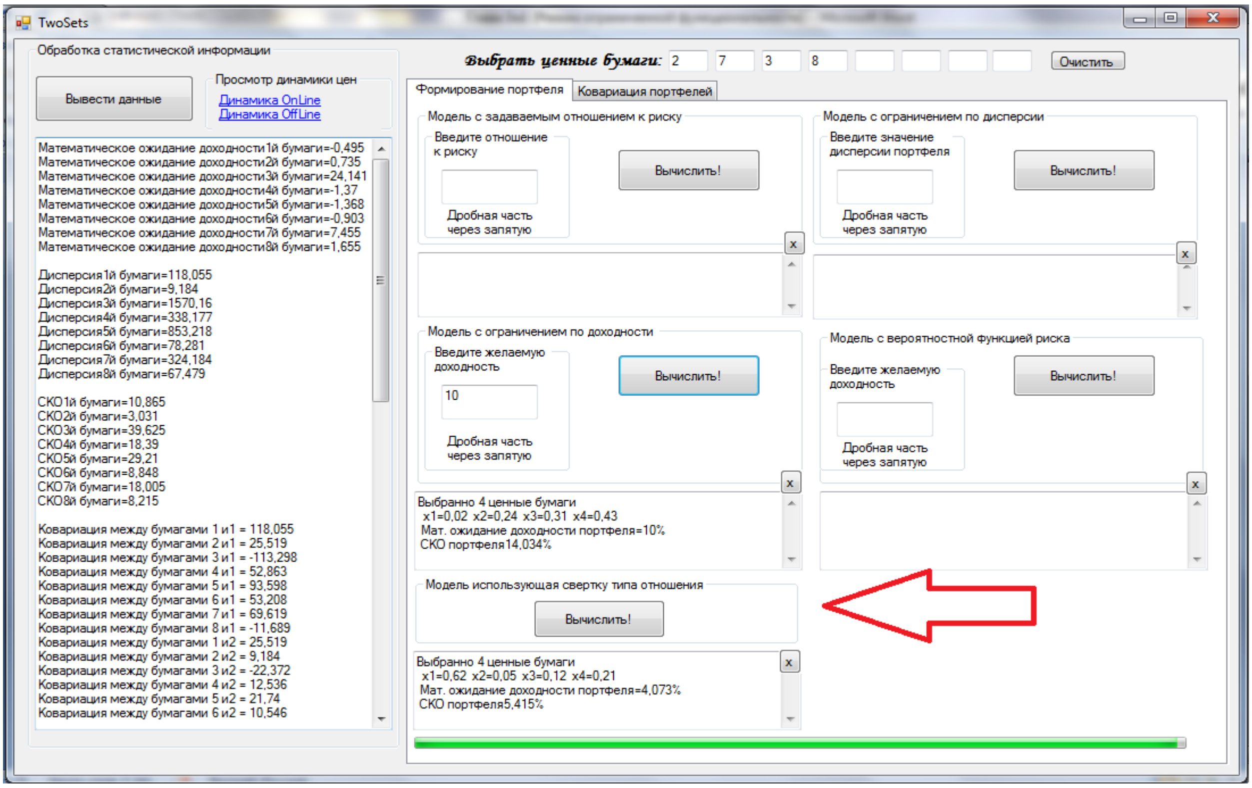


Рис. 3.4. Нахождение оптимального состава портфеля

Для отражения процесса составления оптимального портфеля ценных бумаг используется ProgressBar (внизу формы). По мере выполнения процесса он заполняется зеленым цветом слева направо (см. рис. 3.5).

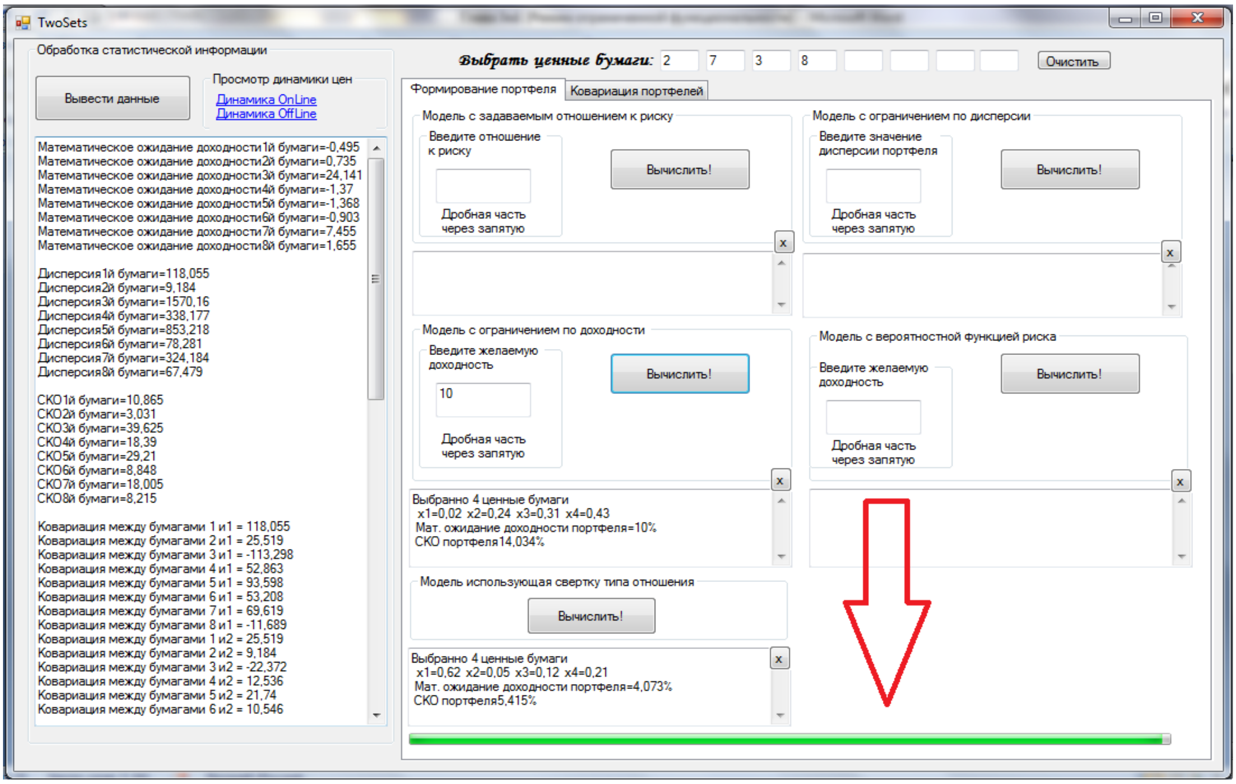


Рис. 3.5. Отображение процесса выполнения программы

Также предлагаемая программа позволяет оценить устойчивость выбранного портфеля инвестора. Для этого необходимо перейти ко второй вкладке под названием «Ковариация портфелей» и ввести полученные составы портфеля инвестора. Во время ввода составов портфелей в указанные ячейки пользователь может переходить на соседнюю вкладку для уточнения или изменения состава портфеля. Очистить ошибочно заполненные ячейки можно с помощью клавиатуры или нажав на кнопку «Очистить» справа от полей для заполнения (см. рис. 3.6). После ввода требуемых данных необходимо нажать на кнопку «Вычислить!». Программа вычислит значение ковариации случайных значений доходностей введенных портфелей. И если ковариация положительна, то можно сделать вывод, что выбранная стратегия является устойчивой.

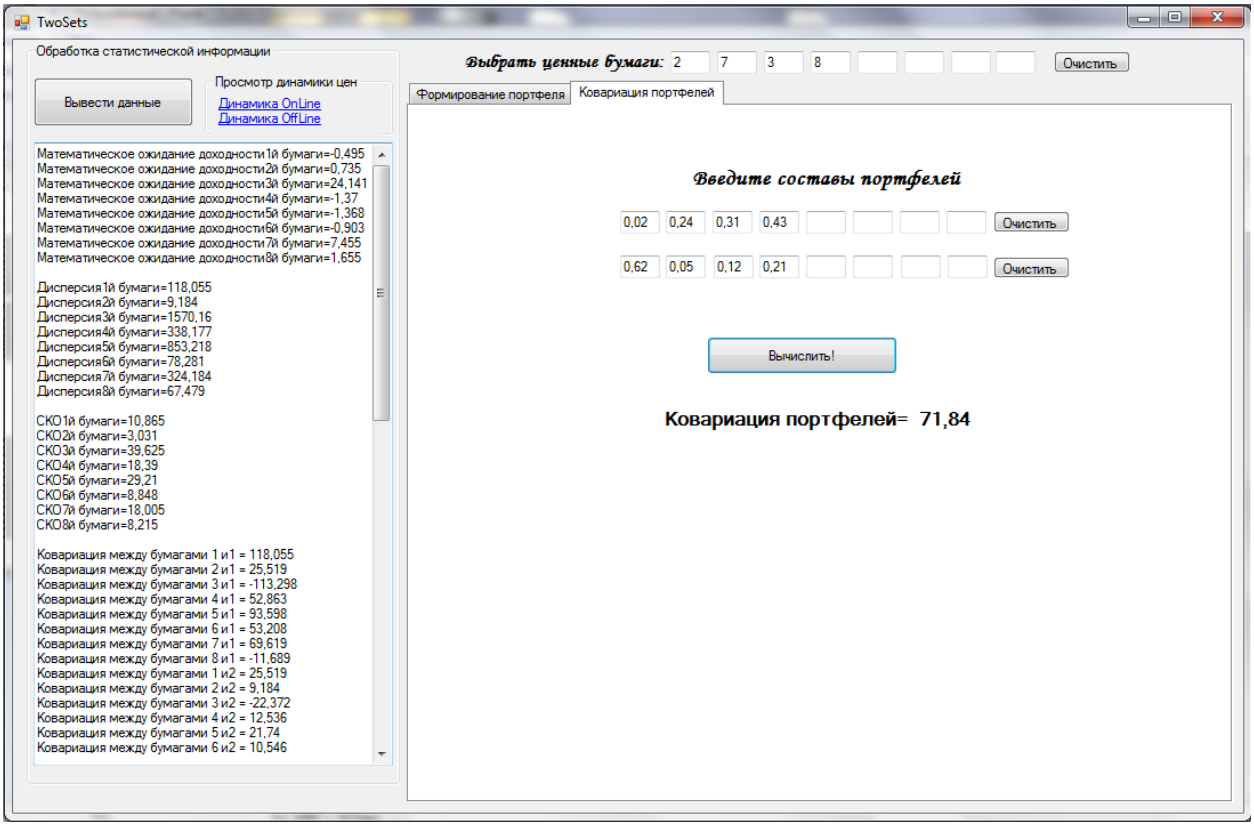


Рис. 3.6. Определение ковариации портфелей

3.3. Вычислительные эксперименты

В данном эксперименте были использованы статистические данные цен акций компаний «Аэрофлот», «МТС» и «Мегафон» за период с января 2013 г.

по январь 2014 г. (рис. 3.7-3.9), т.е. были выбраны акции с номерами 1, 4 и 5 из обработанной программой статистики по восьми ведущим российским компаниям (рис. 3.10).

Рис. 3.7. Динамика стоимостей акций компании «Аэрофлот»

Рис. 3.8. Динамика стоимости акций компании «МТС»

Рис. 3.9. Динамика стоимостей акций компании «Мегафон»

Доходности акций этих компаний определялись с использованием ежедневных цен закрытия торговых сессий. В данных примерах используется первоначальный интерфейс программы.

На рис. 3.10-3.11 показаны фрагменты работы программы. Во фрейме (GroupBox) «Обработка статистической информации» можно видеть математические ожидания доходностей ценных бумаг за каждый рабочий день, СКО и ковариацию всех восьми ценных бумаг. Для акций компаний «Аэрофлот», «Мегафон» и «МТС» (акции с номерами 1, 4 и 5) имеем вектор математических ожиданий доходностей акций $\bar{r} = (0{,}967; 0{,}189; 0{,}327)$, ковариационная матрица $K = \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}466 & -0{,}18 \\ 0{,}466 & 1{,}678 & -0{,}189 \\ -0{,}18 & -0{,}189 & 0{,}379 \end{pmatrix}$.

Пример 3.3.1. Используются модель с задаваемым отношением к риску и модель с ограничением по дисперсии.

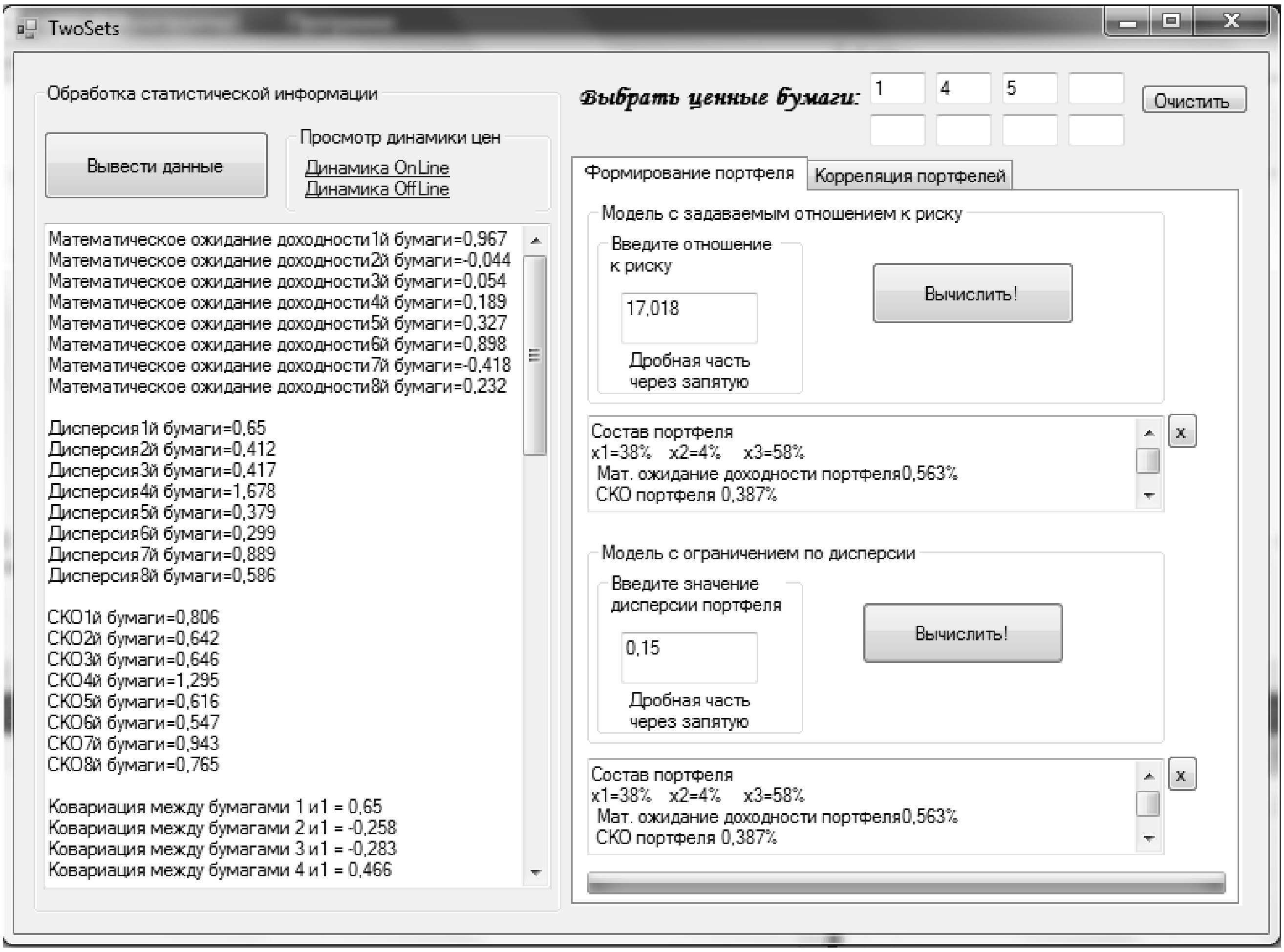


Рис. 3.10. Фрагмент работы программы

Пусть требуемое значение дисперсии портфеля σ_p^2=0,15. Условие (1.2.19) и (1.2.20) выполняются:

$(\bar{r}\sigma^{-1}e)^2(\sigma_p^2(e\sigma^{-1}e)-1)^2-(e\sigma^{-1}e)(1-\sigma_p^2(e\sigma^{-1}e))(\bar{r}\sigma^{-1}\bar{r}-\sigma_p^2(e\sigma^{-1}\bar{r})^2)=0{,}016$, а $\dfrac{\bar{r}\sigma^{-1}e}{(e\sigma^{-1}e)}=0{,}544$ больше, чем $\lambda_4^0=-4{,}542$, найденное из решения системы (1.2.17). Тогда по теореме 1.2.2 α=17,018.

Во фрейме «Модель с ограничением по дисперсии» пользователь задает дисперсию σ_p^2=0,15, после чего программа определяет оптимальный состав портфеля $x^{01}=(0{,}38;0{,}04;0{,}58)$. Во фрейме «Модель с задаваемым отношением к риску» пользователь задает α=17,018, после чего программа определяет оптимальный состав портфеля $x^{02}=(0{,}38;0{,}04;0{,}58)$. Таким образом, при σ_p^2=0,15 и $\alpha = 17{,}018$ решение задач совпадают для полноразмерных портфелей.

Пусть теперь требуемое значение дисперсии портфеля σ_p^2=0,2. Условие (1.2.19) и (1.2.20) выполняются:

$(\bar{r}\sigma^{-1}e)^2(\sigma_p^2(e\sigma^{-1}e)-1)^2-(e\sigma^{-1}e)(1-\sigma_p^2(e\sigma^{-1}e))(\bar{r}\sigma^{-1}\bar{r}-\sigma_p^2(e\sigma^{-1}\bar{r})^2)=1{,}469$,

$\lambda_4^0 = 0{,}008907$ и $\dfrac{\bar{r}\sigma^{-1}e}{(e\sigma^{-1}e)}=0{,}544$. Но решение задачи с ограничением по дисперсии не является полноразмерным: $x^{02}=(0{,}584;0;0{,}416)$. Используя теорему 1.2.2, получаем $\alpha = 1{,}791$. Решение задачи с задаваемым отношением к риску дает решение $x^{01}=(0{,}531;0;0{,}469)$, отличное от x^{02}. Этот числовой пример подтверждает, что требование полноразмерности портфелей, сформулированное в теореме 1.2.2, необходимо для выполнения утверждения теоремы 1.2.2.

Пример 3.3.2. Рассмотрим модель с задаваемым отношением к риску и модель с ограничением по доходности.

Пусть требуемое значение доходности портфеля r_p=0,6. Условие (1.2.11) теоремы 1.2.1 при этом выполняется: $\dfrac{\bar{r}\sigma^{-1}e}{r_p(e\sigma^{-1}e)}=0{,}907$,

$\dfrac{(e\sigma^{-1}\bar{r})^2}{(\bar{r}\sigma^{-1}\bar{r})(e\sigma^{-1}e)}=0{,}753$ и max{0,907; 0,753}<1. Тогда по теореме 1.2.1 α=5,819.

Во фрейме «Модель с задаваемым отношением к риску» (рис. 3.11) пользователь задает коэффициент риска α=5,819 , после чего программа определяет оптимальный состав портфеля $x^{01} = (0{,}43;0{,}01;0{,}56)$. Во фрейме «Модель с ограничением по доходности» пользователь задает требуемое значение доходности портфеля $r_p = 0{,}6$, после чего программа определяет оптимальный состав портфеля $x^{02} = (0{,}43;0{,}01;0{,}56)$. Таким образом, при $r_p = 0{,}6$ и $\alpha = 5{,}819$ решение задач совпадают для полноразмерных портфелей.

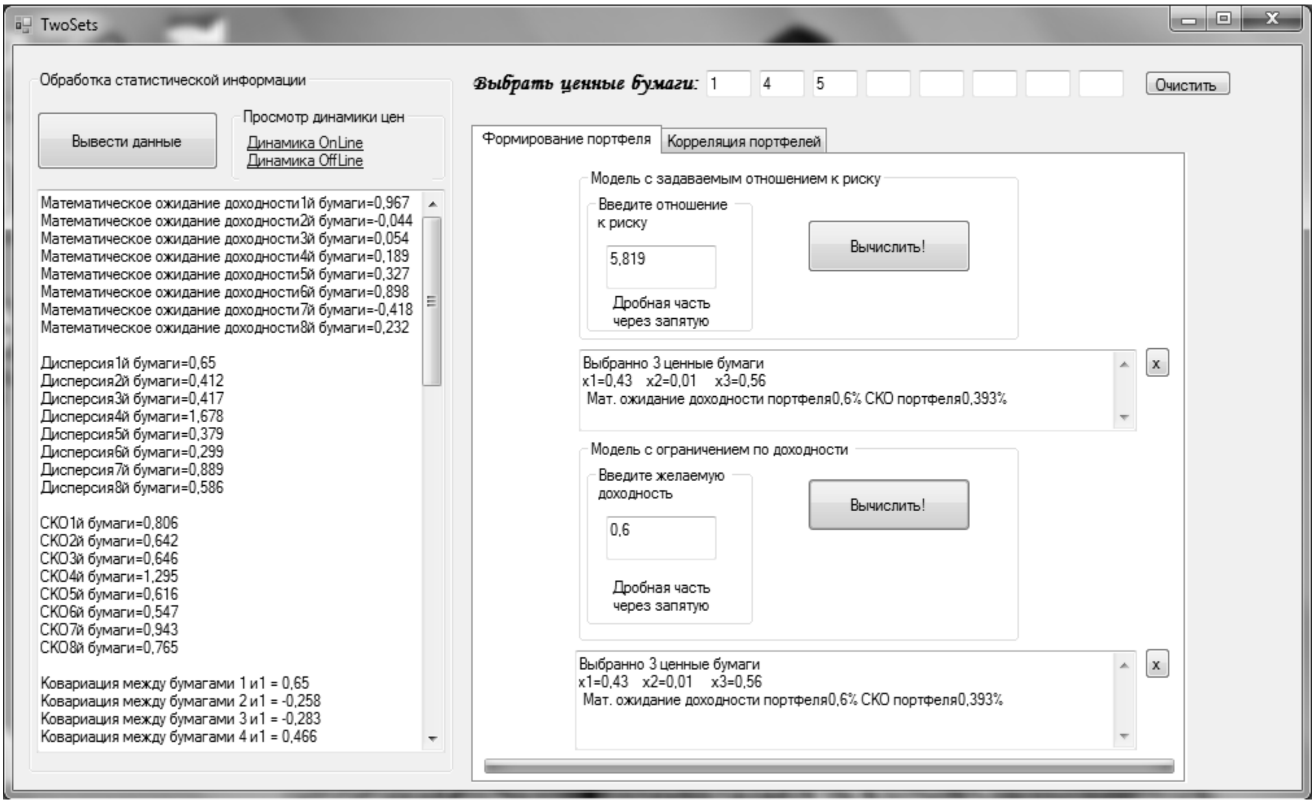


Рис. 3.11. Фрагмент работы программы

Пусть теперь требуемое значение доходности портфеля r_p=0,5. Условие (1.2.11) теоремы 1.2.1 при этом не выполняется: $\dfrac{\bar{r}\sigma^{-1}e}{r_p(e\sigma^{-1}e)} = 1{,}089$ и $\dfrac{(e\sigma^{-1}\bar{r})^2}{(\bar{r}\sigma^{-1}\bar{r})(e\sigma^{-1}e)} = 0{,}753.$ Используя теорему 1.2.1, получаем $\alpha = -7{,}331$. Решение задачи с использованием модели с задаваемым отношением к риску дает решение $x^{01} = (0;1;0)$, а решение задач и с помощью модели с ограничением по доходности – $x^{02}=(0{,}29;0{,}092;0{,}617)$. Решения этих задач лежат за пределами эффективного множества: значение доходности r_p=0,5 меньше минимальной доходности на эффективном множестве соответствует портфелю $x^{02}=(0{,}29;0{,}092;0{,}617)$, расположенному на юго-западной границе множества возможных портфелей, значение $\alpha=-7{,}331$ дает отрицательный наклон кривой безразличия целевой функции задачи, максимальное значение которой достигается в точке $x^{01}=(0;1;0)$ на северо-восточной границе множества возможных портфелей.

Пример 3.3.3. Рассматриваются модель с задаваемым отношением к риску и модель использующая свертку типа отношения.

При выборе бумаг под номерами 1, 5 и 6 (акции компаний «Аэрофлот», «МТС» и «Роснефть») имеем вектор доходностей $r=\begin{pmatrix}0{,}967\\0{,}327\\0{,}898\end{pmatrix}$ и ковариационную матрицу $K=\begin{pmatrix}0{,}65 & -0{,}18 & -0{,}297\\ -0{,}18 & 0{,}379 & 0{,}056\\ -0{,}297 & 0{,}056 & 0{,}299\end{pmatrix}$ (см. рис. 3.12). При этом условие (1.2.26) выполняется: $K^{-1}r=\begin{pmatrix}6{,}11\\2{,}493\\8{,}606\end{pmatrix}$, то есть $K^{-1}r>0$. Тогда коэффициент риска по условию теоремы 1.2.3 равен $\alpha=8{,}605$. Решения задач для модели управления риском с задаваемым отношением к риску и модели управления риском со сверткой типа отношения совпадают (см. рис. 3.12).

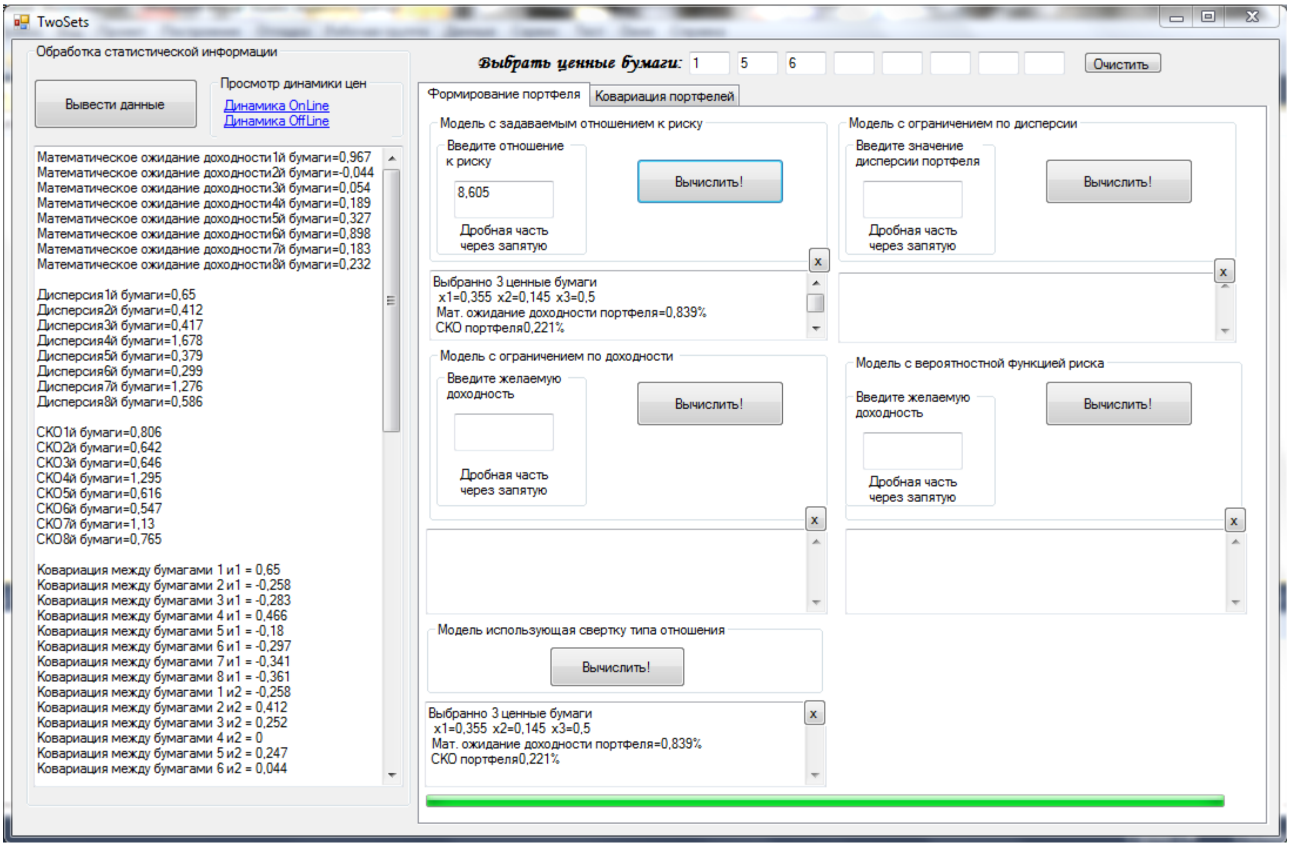


Рис. 3.12. Фрагмент работы программы

Пример 3.3.4. Рассмотрим модель с задаваемым отношением к риску и модель с вероятностной функцией риска.

Пусть требуемое значение доходности портфеля для бумаг с номерами 1, 5 и 6 (акции компаний «Аэрофлот», «МТС» и «Роснефть») r_p=0,5. Условие (1.2.31) теоремы 1.2.4 при этом выполняется: $K^{-1}(\bar{r} - r_p e) = \begin{pmatrix} 2{,}488 \\ 0{,}168 \\ 3{,}771 \end{pmatrix} > 0$ и коэффициент риска α=3,214.

Вводя указанные r_p и α в программу получаем оптимальные портфели (см. рис. 3.13):

Во фрейме «Модель с задаваемым отношением к риску» пользователь задает коэффициент риска равным 3,214 и программа определяет оптимальный состав портфеля $x^{01} = (0{,}387;0{,}026;0{,}587)$ с доходностью 0,91% и СКО 0,253%. Во фрейме «Модель с вероятностной функцией риска» пользователь задает значение доходности портфеля $r_p = 0{,}5$

(минимизируется вероятность того, что случайное значение доходности меньше r_p). После чего программа определяет оптимальный состав портфеля $x^{02} = (0{,}385; 0{,}027; 0{,}589)$ с математическим ожиданием доходности 0,909% и СКО 0,252%. Таким образом, при $r_p = 0{,}5$ и $\alpha = 3{,}214$ решение задач совпадают для полноразмерных портфелей. Погрешность при нахождении доходности и СКО в данной задаче составляет 0,001%.

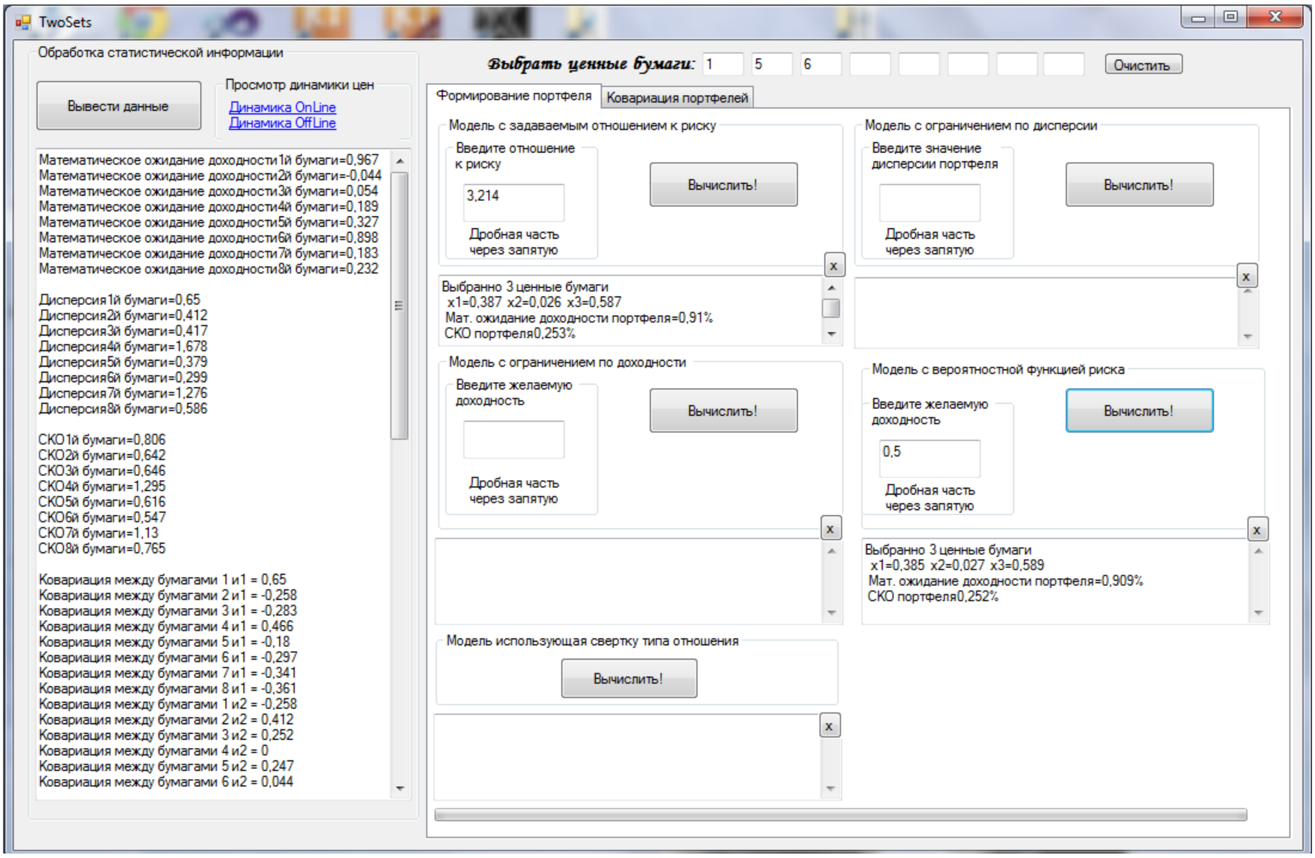


Рис. 3.13. Фрагмент работы программы

3.4. Оценка чувствительности решения к объему статистической информации

Возьмем стоимости акций следующих компаний: «ГАЗПРОМ», «ЛУКОЙЛ», «Лензолото», «Полюс Золото», «Распадская», «Роснефть», «Уралкалий» и «Сургутнефтегаз», за период с января 2010 года по январь 2014 года (четыре года). Брались цены закрытия торговых сессий с периодами в один месяц, один квартал и за каждое полугодие.

На первом этапе брались цены по итогам каждого полугодия (рис. 3.14, 3.15), причем было принято решение выбрать бумаги с большей доходностью. Это бумаги номер 2, 3 и 7 («ЛУКОЙЛ», «Лензолото» и «Уралкалий»). Используя различные математические модели принятия решений, были получены следующие результаты:

- При использовании модели с задаваемым отношением к риску (коэффициент риска равен 10), получили оптимальный состав портфеля (0,998; 0,001; 0,001), математическое ожидание доходности портфеля составляет 2,253%, а СКО – 4,926%.
- При использовании модели с ограничением по дисперсии (значение дисперсии равно 27), получаем портфель, состав которого (0,973; 0,009; 0,018), математическое ожидание доходности 2,629%, а СКО – 5,196%.
- Используя ту же модель, но задавая значение дисперсии 100,1 , получаем портфель (0,849; 0,146; 0,005), математическое ожидание доходности которого составляет 7,693%, а СКО – 10,005%.
- Используя модель с ограничением по доходности, и задавая желаемую доходность равную 5%, получим портфель (0,921; 0,074; 0,005) с математическим ожиданием доходности 5,001% и СКО – 6,645%.
- Модель, использующая свертку типа отношения, предлагает портфель (0,883; 0,116; 0,001) с математическим ожиданием доходности 6,553% и СКО 8,441%.

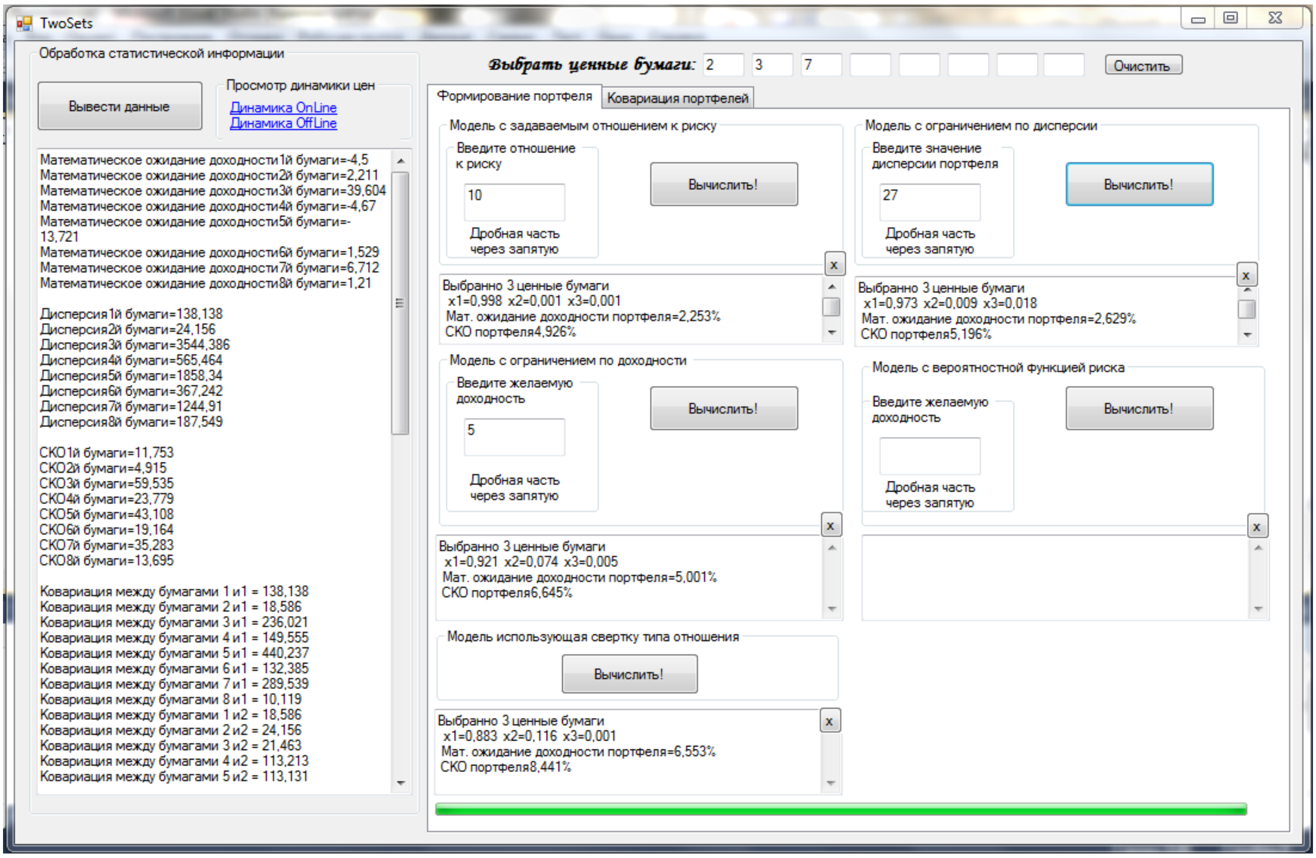


Рис. 3.14

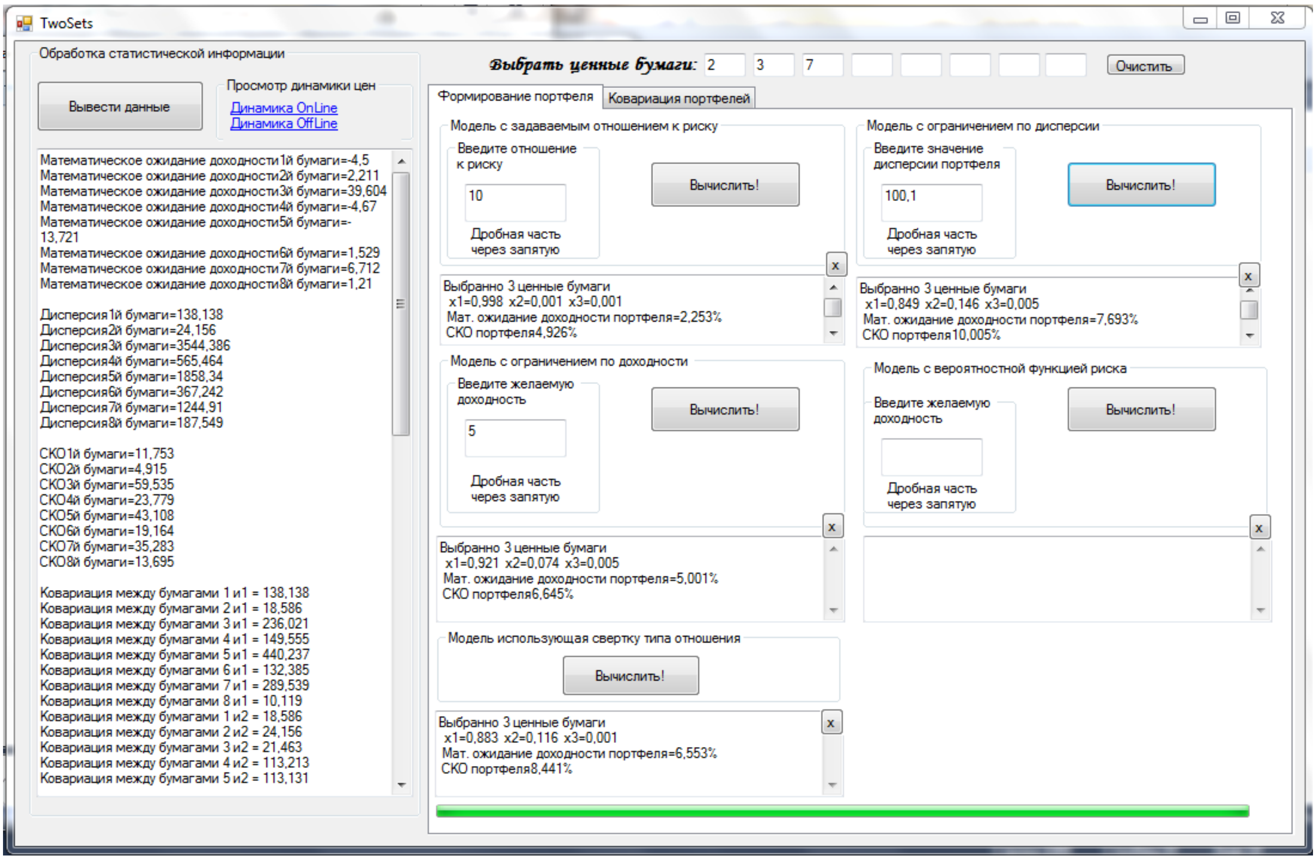


Рис. 3.15

Затем был увеличен объем статистических данных: выбраны цены акций по итогам закрытия торгов в каждом квартале (рис. 3.16, 3.17). Были получены следующие результаты:

– Используя модель с задаваемым отношением к риску (коэффициент риска равен 10), получили оптимальный состав портфеля (0,979; 0,02; 0,001), математическое ожидание доходности портфеля составляет 1,228%, а СКО – 3,318%.
– Используя модель с ограничением по дисперсии, и выбирая значение дисперсии равное 27,1 , получаем оптимальный портфель (0,82; 0,082; 0,098), математическое ожидание доходности которого 4,077%, а СКО – 5,206%.
– Используя туже модель, но задавая значение дисперсии 100,1 , получаем портфель (0,733; 0,226; 0,041), математическое ожидание доходности которого 7,493%, а СКО – 10,005%.

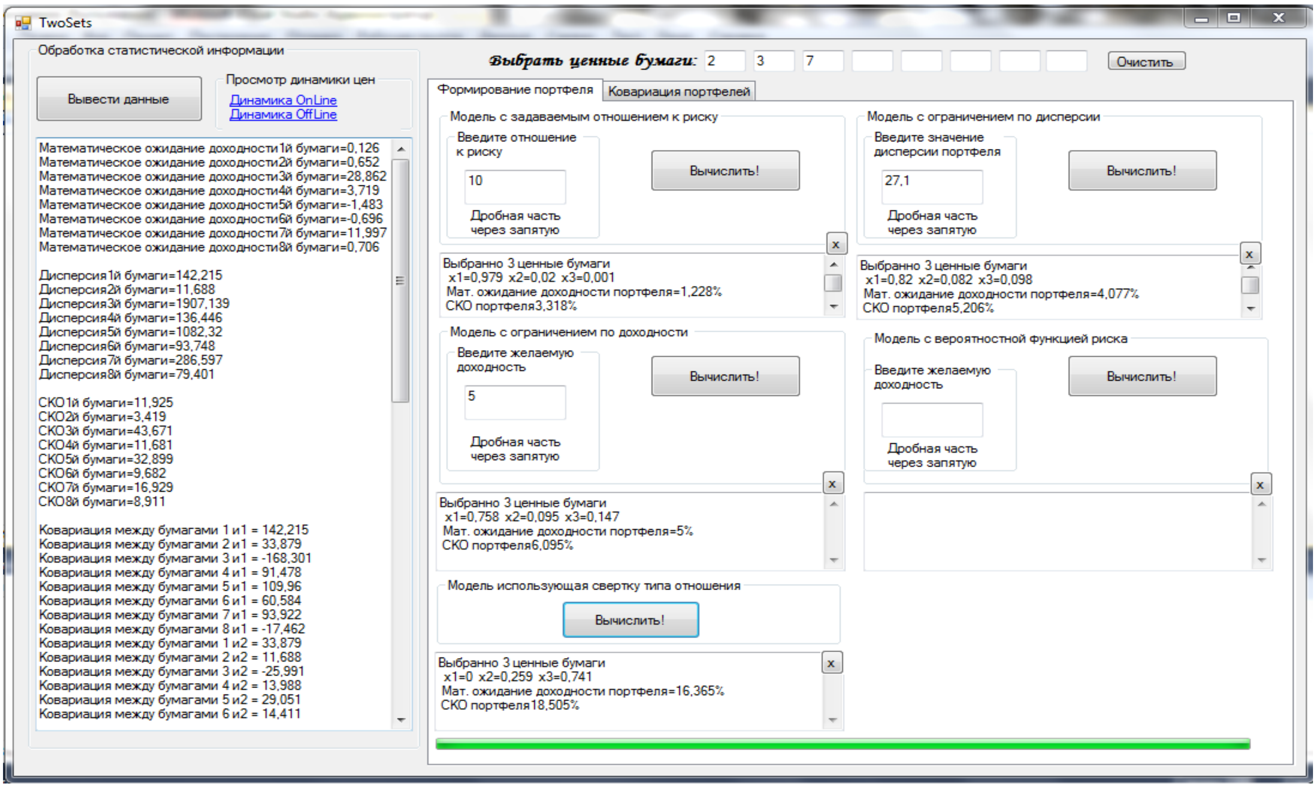


Рис. 3.16

– Используя модель с ограничением по доходности, и, задавая желаемую доходность равную 5%, получим портфель (0,758; 0,095; 0,147), математическое ожидание которого 5% и СКО – 6,095%.

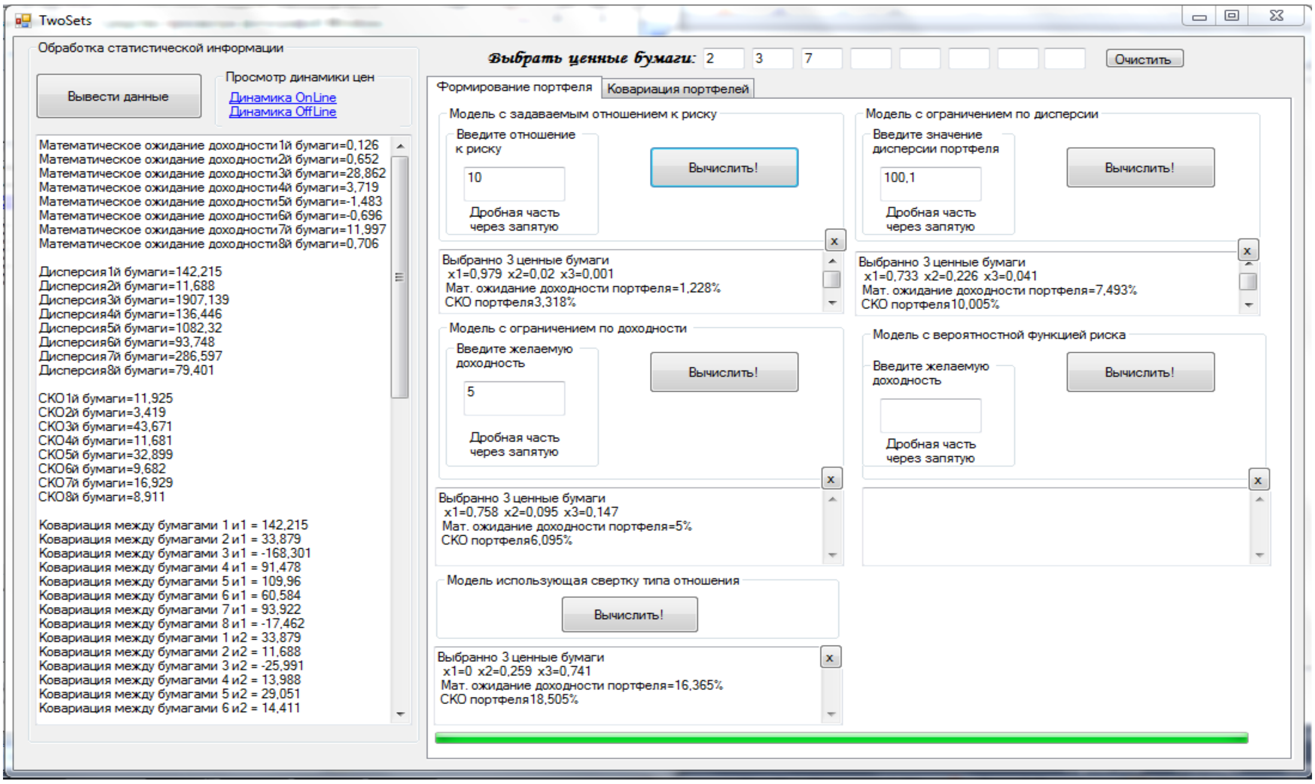


Рис. 3.17

– Модель, использующая свертку типа отношения, предлагает портфель, состав которого (0; 0,259; 0,741), математическое ожидание 16,365% и СКО 18,505%.

Затем мы снова увеличили объем статистических данных, выбрав цены акций по итогам закрытия торгов в каждом месяце (рис. 3.18 и 3.19) и получили следующие результаты:

– Используем модель с задаваемым отношением к риску (коэффициент риска равен 10), получаем оптимальный состав портфеля (0,455; 0,175; 0,37), математическое ожидание доходности портфеля составляет 1,49%, а СКО – 4,028%.

– Используя модель с ограничением по дисперсии и задавая значение дисперсии 27,1 , получаем портфель (0,239; 0,366; 0,395), математическое ожидание которого составляет 2,784%, а СКО – 5,206%.

– Используя ту же модель, но задавая значение дисперсии 100,1 , получаем портфель (0,18; 0,717; 0,103), математическое ожидание которого составляет 4,579%, а СКО – 10,005%.

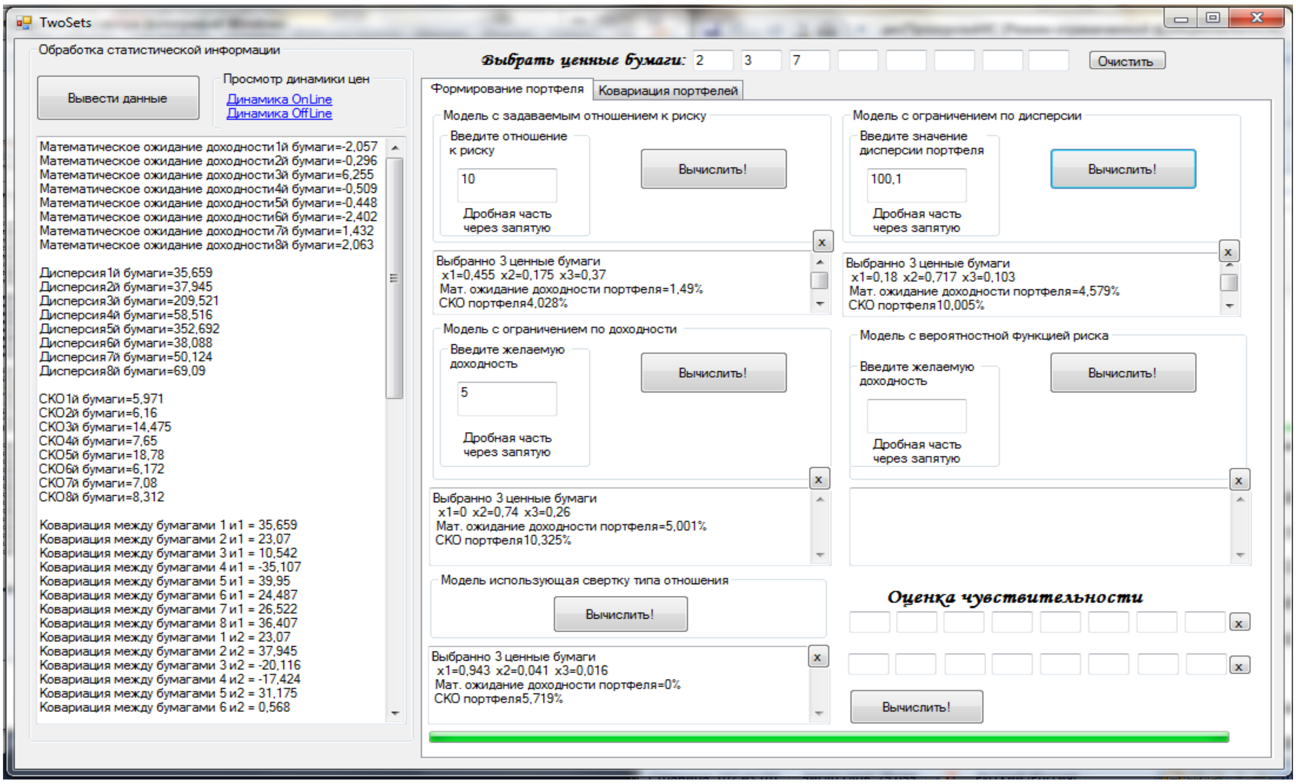


Рис. 3.18

– Используя модель с ограничением по доходности, и задавая желаемую доходность равную 5%, получим портфель, состав которого (0; 0,74; 0,26), математическое ожидание 5,001% и СКО – 10,325%.

– Модель, использующая свертку типа отношения, предлагает портфель, состав которого есть (0,943; 0,041; 0,016), математическое ожидание 0% и СКО 5,719%.

Для оценки чувствительности решений (оптимальных составов портфелей) к параметрам моделей будем использовать евклидову метрику. Тогда расхождение между составами портфелей, полученными с помощью модели с задаваемым отношением к риску и с использованием данных за каждое полугодие и каждый квартал, составляет 0,027, а с использованием данных за каждый квартал и за каждый месяц – 0,659.

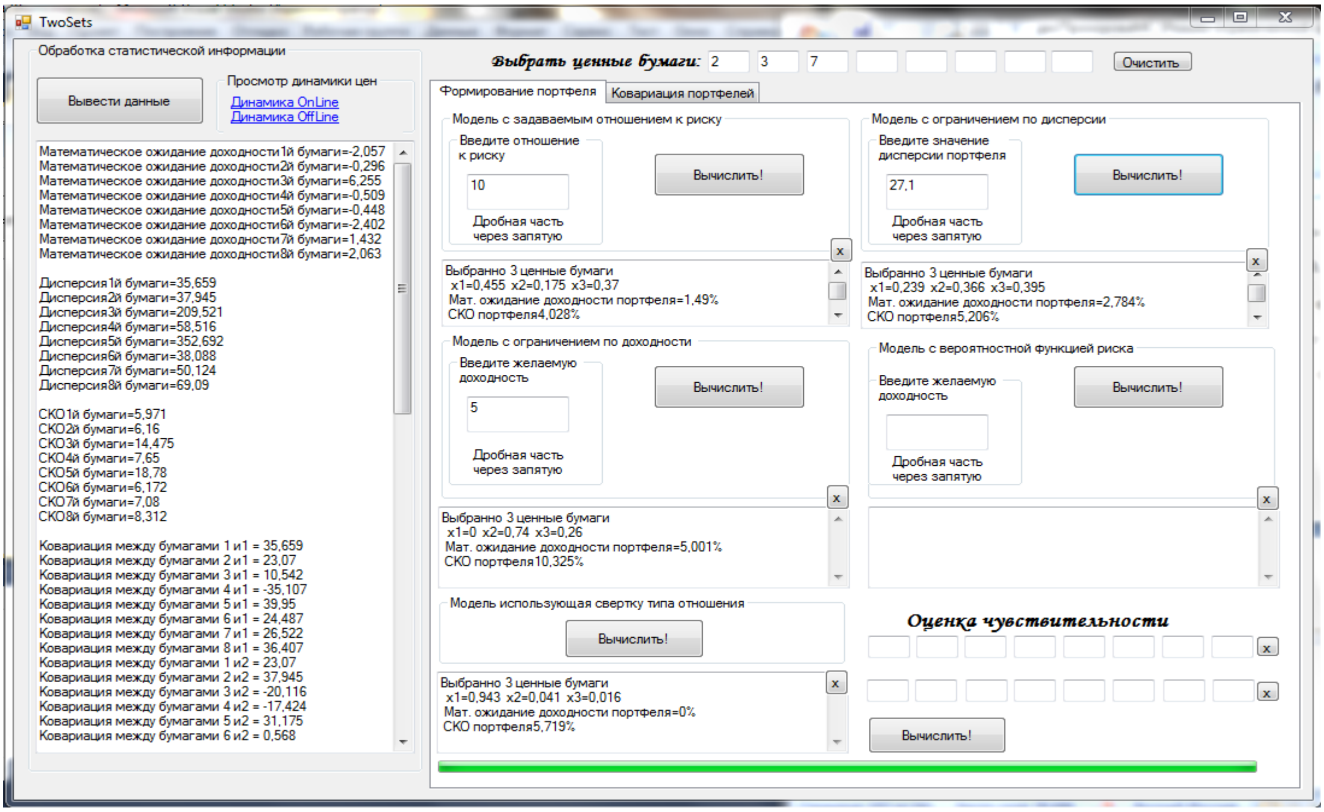


Рис. 3.19

Расхождение между составами портфелей (рис. 3.20), полученными с помощью модели с ограничением по доходности и с использованием данных за каждое полугодие и каждый квартал, составляет 0,217, а с использованием данных за каждый квартал и за каждый месяц – 1,002.

Расхождение между составами портфелей, полученными с помощью модели, использующей свертку типа отношение, с использованием данных за каждое полугодие и каждый квартал составляет 1,161, а с использованием данными за каждый квартал и за каждый месяц – 1,209.

Расхождение между составами портфелей, полученными с помощью модели с ограничением по дисперсии, с использованием данных за каждое полугодие и каждый квартал составляет 0,166, а с использованием данных за каждый квартал и за каждый месяц – 0,727.

Таким образом, наиболее чувствительной к объему статистических данных является модель, использующая свертку типа отношение. Модель с задаваемым отношением к риску наименее чувствительна к изменениям параметров (математическое ожидание, СКО) модели.

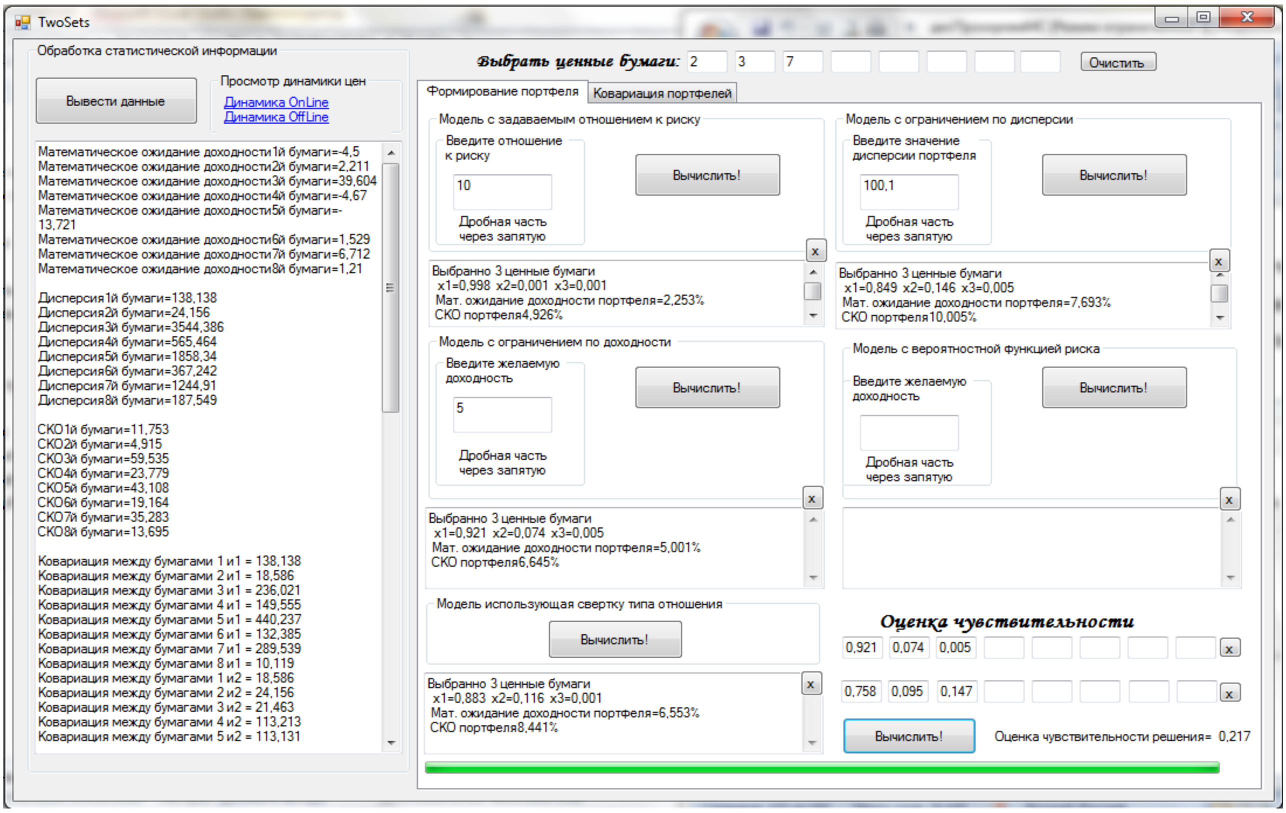


Рис. 3.20

3.5 Оценка устойчивости стратегии инвестора

Пусть инвестор располагает своей собственной информацией о ситуации на фондовом рынке и имеет возможность строить прогнозы доходностей финансовых инструментов в виде факторных моделей. Примером может служить многофакторная модель [85]. В общем виде это можно описать вектором ожидаемых доходностей финансовых инструментов $\bar{r}(y)$, зависящим от значения внешних факторов y. Ковариационную матрицу будем считать для простоты фиксированой. Тогда задача (1.2.1) примет вид

$$\max_{x \in X}\Big[\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i(y) x_i - \alpha \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j\Big], \qquad (3.5.1)$$

а состав оптимального полноразмерного портфеля определяется как

$$x^0(\gamma, y) = C_0 + C_1(y)\gamma, \qquad (3.5.2)$$

где $C_0 = \dfrac{K^{-1}e}{eK^{-1}e}, C_1(y) = K^{-1}\bar{r}(y) - \dfrac{eK^{-1}\bar{r}(y)}{eK^{-1}e}K^{-1}e.$

Если инвестор рассматривает два сценария развития ситуации, то имеется два вектора значений внешних факторов y^1 и y^2 и соответственно два прогноза вектора доходностей $\bar{r}(y^1)$ и $\bar{r}(y^2)$. в которой прогнозируемые доходности финансовых инструментов линейно зависят от значений ряда факторов. Тогда составы двух оптимальных полноразмерных портфелей одного инвестора согласно (3.5.2) есть $x^0(\gamma,y^1)=C_0+C_1(y^1)\gamma$ и $x^0(\gamma,y^2)=C_0+C_1(y^2)\gamma$, где $\gamma=1/2\alpha$.

В [27] показано, что ковариация случайных величин доходностей r_{x^1} и r_{x^2} двух произвольных портфелей, имеющих составы x^1 и x^2, вычисляется через составы этих портфелей по формуле

$$\operatorname{cov}(r_{x^1}, r_{x^2}) = x^1Kx^2. \qquad (3.5.3)$$

Оценим ковариацию случайных величин доходностей двух портфелей при разных прогнозах доходностей одного инвестора, имеющих составы $x(\gamma,y^1)$ и $x(\gamma,y^2)$. По формуле (3.5.3) имеем

$$\operatorname{cov}(r_{x(\gamma,y^1)}(y^1), r_{x(\gamma,y^2)}(y^2)) = x(\gamma, y^1)Kx(\gamma, y^2). \qquad (3.5.4)$$

Назовем оптимальное управление $x^0(y)$ (состав портфеля) инвестора устойчивым, если при изменении прогноза корреляция портфелей оказывается положительной. Такое определение имеет смысл, так как при рассматриваемых сценариях развития экономической ситуации случайные значения доходностей портфелей имеют тенденцию меняться в одну сторону. Тем самым инвестор частично застрахован от потерь, вызванных ошибочным прогнозом.

Предлагаемая программа использует математическую модель (1.2.1) для нахождения оптимального состава портфеля (блок 1) и формулу (3.5.4) для оценки ковариации случайных величин доходностей двух разных портфелей одного инвестора (блок 2). Состав оптимального портфеля определялся на основе использования статистических данных стоимостей акций Газпрома, Лукойла и СберБанка за период с января по апрель 2013 года [117] (эту информацию будем считать объективной). На рис. 3.21 показан фрагмент работы блока 1 и 2 программы. Во фрейме «Обработка статистической информации» можно посмотреть доходности ценных бумаг каждую неделю, СКО и ковариацию ценных бумаг. Во фрейме «Модель с задаваемым отношением к риску» пользователь задает коэффициент риска α, после чего программа определяет оптимальный состав портфеля. Состав этого портфеля x^{01}=(0,77 , 0, 0,23) содержится во фрагменте программы на рис. 3.21.

Если инвестор предполагает, что сценарий развития экономической ситуации, характеризуемый информацией о значениях стоимостей этих ценных бумаг, аналогичен прошлой экономической ситуации за период с января по апрель 2012 г. (вектор значений неконтролируемого фактора y^2), то получаем другой состав портфеля x^{02}=(0, 0,83 , 0,17).

Во фрейме «Оценка устойчивости выбора инвестора» пользователь фиксирует полученные составы портфелей инвестора. После нажатия кнопки «ОЦЕНИТЬ УСТОЙЧИВОСТЬ» программа вычисляет значение ковариации случайных значений доходностей этих портфелей. В данном случае значение ковариации $\mathrm{cov}(r_{x(\gamma,y^1)}(y^1), r_{x(\gamma,y^2)}(y^2)) = 0{,}225$, т. е. стратегия инвестора является устойчивой.

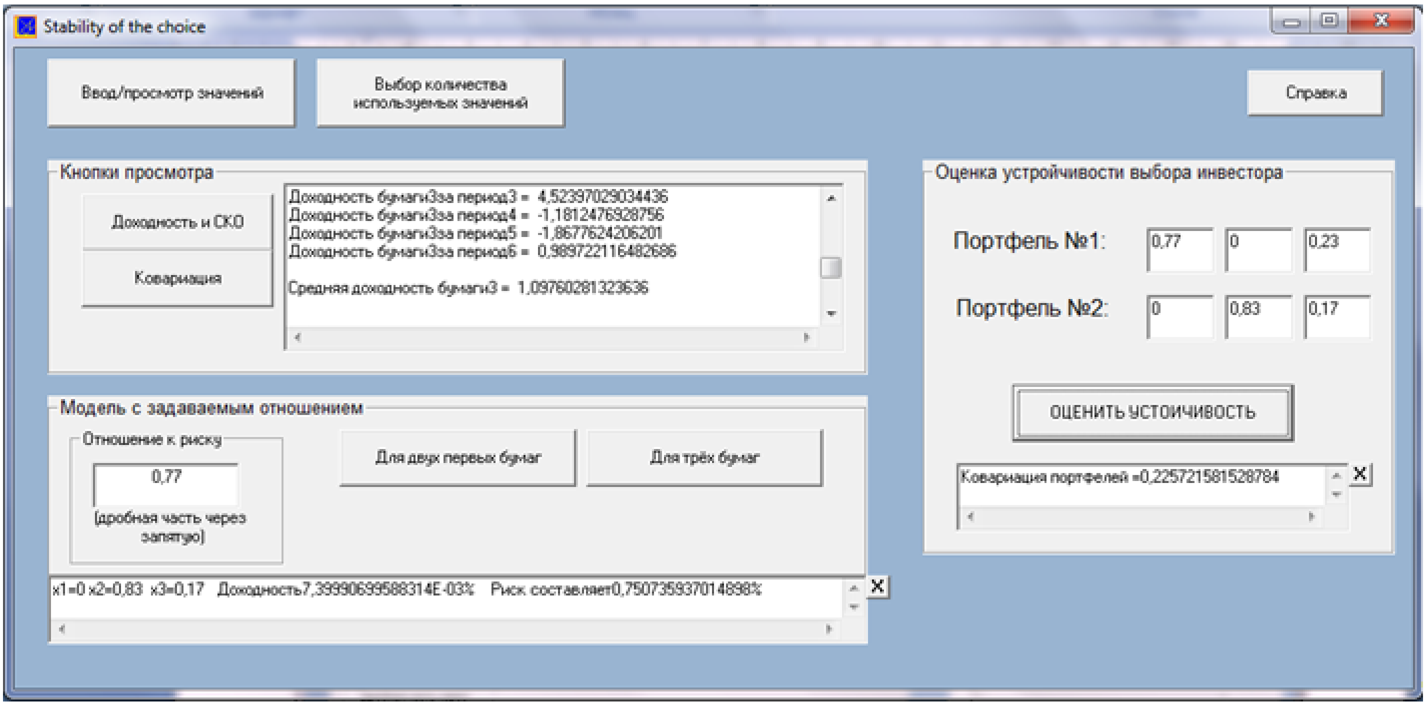


Рис. 3.21. Фрагмент работы программы

Таким образом, предложенная программа помогает не только выбирать оптимальный состав портфеля, но и проводить исследование на устойчивость в автоматическом режиме.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе представлены математические методы обработки информации в задачах управления риском в стохастических условиях (на примере фондового рынка) и в условиях неопределенности (для производственных систем). Рассмотрены вопросы взаимосвязи моделей управления риском для задач фондового инвестирования и для задач производственной сферы. Предложен инструментальный метод обработки информации и нахождения решения в задачах фондового инвестирования.

Основные результаты:

1) получены условия, характеризующие принадлежность оптимальных решений задачи максимизации доходности с ограничением по дисперсии и задачи минимизации дисперсии с ограничением по доходности множеству паретооптимальных портфелей, с помощью метода множителей Лагранжа получены значения коэффициента риска, позволяющие получить одинаковые решения в задачах управления риском, использующих линейную свертку критериев «математическое ожидание – дисперсия», свертку этих критериев типа отношения, перевод одного критерия в ограничение (теоремы 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3);

2) при наличии коротких продаж получено значение коэффициента риска, при котором решения задач минимизации вероятностной функции риска и максимизации линейной свертки критериев «доходность – дисперсия» совпадают в предположении нормального или экспоненциального распределения случайных величин доходностей (теорема 1.2.5);

3) с использованием теории двойственности получены значения коэффициента риска, при котором решение задачи максимизации линейной свертки критериев «прибыль – максимальный риск» совпадает с задачей управления риском, использующей свертку этих критериев типа отношения, перевод одного критерия в ограничение (теоремы 2.1.1, 2.1.4), получены достаточные условия существенности ограничений по максимальному риску (теорема 2.1.3);

4) получено значение коэффициента риска, при котором решение задачи минимизации отношения риска, заданного в метрике l_1, к ожидаемой прибыли и задачи максимизации линейной свертки критериев «прибыль – максимальный риск» совпадают (теорема 2.2.1);.

5) предложена автоматизированная система принятия решений, позволяющая сравнивать различные модели управления риском и выбирать их параметры, а также исследовать чувствительность решений к объему статистической информации.

В каждой главе приведены результаты вычислительных экспериментов с использованием прикладного программного обеспечения MathCAD, подтверждающие результаты исследования. В приложении приведен код программы, написанной на языке программирования VB.NET.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александрова И.А., Гончаренко В.М., Денежкина И.Е. и др. Методы оптимальных решений в экономике и финансах. – М.: Кнорус, 2013. 400 с.
2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление – М.: Физматлит, 2007. – 407 с.
3. Белолипецкий А.А., Горелик В.А. Экономико-математические методы. Университетский учебник. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 368 с.
4. Беллман Р. Динамическое программирование. – М.: ИЛ, 1960. – 400 с.
5. Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О. Некоторые вопросы теории процессов управления. – М.: ИФМЛ, 1961. – 126 с.
6. Бесфамильный М.С. Информатика. Технические средства информационных процессов: учебное пособие. – М.: Изд. Дом МИСиС, 2009. – 55 с.
7. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. – 408 с.
8. Бронштейн Е.М., Качкаева М.М., Тулупова Е.В. Управление портфелем ценных бумаг на основе комплексных квантильных мер риска // Известия Российской Академии наук. Теория и системы управления. – 2011. С. 178 – 183.
9. Бронштейн Е.М., Кондратьева О.В. Управление портфелем ценных бумаг на основе комбинированных энтропийных мер риска // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2013. № 5. С. 172-180.
10. Брусов П.Н., Филатова Т.В. Финансовый менеджмент. Долгосрочная финансовая политика. Инвестиции: учебное пособие. М.: КноРус, 2014. – 304 с.

11. Брусов П.Н., Филатова Т.В. Финансовый менеджмент. Финансовое планирование: учебное пособие. М.: КноРус, 2014. – 232 с.
12. Бурнаева Е.М., Серебрякова Т.А. Нейросетевые методы принятия решений по управлению кредитными рисками // Электронное научное издание «Ученые заметки ТОГУ». – 2013. – Том 4. № 4, с. 1287 – 1290.
13. Буянов В.П., Кирсанов К.А., Михайлов Л.М. Рискология (управление рисками): учебное пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Экзамен, 2003. – 384 с.
14. Вайсблат Б.И., Пистонов М.А Управление рисками бизнес-плана инвестиционного проекта // Экономический анализ: теория и практика. – 2012. – С. 25 – 29.
15. Вальд А. Последовательный анализ. Пер. с англ. – М.: Физматгиз, 1960. – 328 с.
16. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 823 с.
17. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: КноРус, 2010. – 658 с.
18. Владимиров В.А., Воробьев Ю.Л., Салов С.С. и др. Управление риском: Риск. Устойчивое развитие. Синергетика. – М.: Наука, 2000. – 429 с.
19. Воркуев Б.Л. Модели микроэкономики. – М.: ТЕИС, 2002. – 112 с.
20. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. – М: Наука, 1971. – 384 с.
21. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. – М: Наука, 1976. – 328 с.
22. Горелик В.А. Исследование операций и методы оптимизации. – Университетский учебник. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 272 с.
23. Горелик В.А., Золотова Т.В. Критерии оценки и оптимальности риска в сложных организационных системах. Научное издание. – М.: ВЦ РАН, 2009. – 162 с.

24. Горелик В.А., Золотова Т.В. Модели оценки коллективного и системного риска. Научное издание. – М.: ВЦ РАН, 2011. – 163 с.
25. Горелик В.А., Золотова Т.В. Оценка корреляции доходности инвестиционных портфелей и устойчивость фондового рынка // Финансовый журнал. М.: «Научно-исследовательский финансовый институт». – 2012. – № 3. – С. 43–52.
26. Горелик В.А., Золотова Т.В. Об эквивалентности принципов оптимальности инвестиционного портфеля // Научно-исследовательский финансовый институт. Финансовый журнал. М.: «Научно-исследовательский финансовый институт». – 2014. – №2. – С. 67-74.
27. Горелик В.А., Золотова Т.В. Некоторые вопросы оценки корреляции доходностей инвестиционных портфелей // Проблемы управления. – 2011. – № 3. – С. 36–42.
28. Горелик В.А., Золотова Т.В. О некоторых оценках устойчивости фондового рынка и влиянии на них информированности инвесторов // Проблемы управления. – 2013. - № 6. – С. 41–47.
29. Горелик В.А., Золотова Т.В., Зверева (Прохорова) М.С. Об одной динамической задаче управления риском // Управление развитием крупномасштабных систем: Материалы Пятой международной конференции, Т.1. – М.: ИПУ РАН, 2011. – С. 106-109.
30. Горелик В.А., Золотова Т.В., Прохорова М.С. Динамическая минимаксная задача управления риском. // Ученые записки КнАГТУ – 2012. - №II-1(10) «Науки о природе и технике». Комсомольск-на-Амуре: ГОУВПО «КнАГТУ» – С. 38-47.
31. Горемыкина Г.И., Жданова М.А., Мастяева И.Н. Моделирование оценки риска инвестиционного проекта с учетом инновационного поведения предприятия // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 11-5. – С. 986-990.

32. Денежкина И.Е., Мартиросян Г., Попов В.Ю., Шаповал А.Б. Количественные оценка динамики волатильности нестабильного рынка // Вестник Финансового университета. – 2013. № 1 (73). С. 8-14.
33. Жуковский В.И. Риски при конфликтных ситуациях: под. ред. В.С. Молостова. М., URSS, 2011. – 330 с.
34. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н., Смирнова Л.В. Гарантированные решения конфликтов и их приложения / под ред. В.С. Молоствова. – М.: КРАСАНД, 2013. – 368 с.
35. Жуковский В.И., Солдатова Н.Г. Риски при диверсификации вклада // Управление риском. – 2014. № 1. С. 15-24.
36. Журавлев Ю.И., Кадощук Т.И. Моделирование процессов управления и обработки информации. – М.: Моск. физ-тех. ин-т, 1994. – 243 с.
37. Заде Л.А. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений. – В сб.: «Математика сегодня». – М.: Знание, 1974. – С. 5-49.
38. Зверева (Прохорова) М.С., Золотова Т.В., Литвинцева З.К. Проблема выбора оптимального набора товаров при ограничении по объему средств // Научно-техническое творчество студентов и аспирантов: материалы 39-й научно-технической конференции аспирантов и студентов. Ч. 1 - Комсомольск-на-Амуре: ГОУВПО «КнАГТУ», 2009. - С. 98-99.
39. Зверева (Прохорова) М.С., Золотова Т.В. О некоторых моделях управления портфелем ценных бумаг // Научно-техническое творчество студентов и аспирантов: материалы 40-й научно-технической конференции аспирантов и студентов. Ч. 1 - Комсомольск-на-Амуре: ГОУВПО «КнАГТУ», 2010. – С. 72-73.
40. Зверева (Прохорова) М.С., Золотова Т.В. Об одной системе поддержки принятия решений на фондовом рынке // Научно-техническое творчество аспирантов и студентов: материалы 41-й научно-технической конференции аспирантов и студентов. Ч. 1 - Комсомольск-на-Амуре: ГОУВПО «КнАГТУ», 2011. – С. 178-179.

41. Зверева (Прохорова) М.С. Автоматизация процесса управления риском на фондовом рынке // Управление большими системами: материалы VIII Всероссийской школы-конференции молодых ученых. Магнитогорск: Изд-во МГТУ им. Г.И. Носова, 2011. - С. 297-301.
42. Зверева (Прохорова) М.С. Вопросы автоматизации процесса оптимального выбора с учетом риска // Вестник Магнитогорского государственного технического университета им. Г. И. Носова – Магнитогорск: Изд-во МГТУ им. Г.И. Носова, 2011. - №2 - С. 42-44.
43. Золотова Т.В., Прохорова М.С. Информационные аспекты и инструментальные средства оценки устойчивости на фондовом рынке. // Ученые записки КнАГТУ. – 2014. - №II-1(18) «Науки о природе и технике». Комсомольск-на-Амуре: ГОУВПО «КнАГТУ» – С. 28-34.
44. Качалов Р.М. Управление экономическим риском Теоретические основы и приложения. Москва-Санкт-Петербург: Издательство «Нестор», 2012. 248 с.
45. Клитина Н.А. Оптимизация портфеля ценных бумаг в зависимости от диверсификации инвестиций // Финансовые исследование. – 2010. - № 26. С. 41 – 51.
46. Колемаев В.А. Математическая экономика: учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ, 2005. – 399 с.
47. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. – М.: Фазис: ВЦ РАН, 2000. – 411 с.
48. Красовский Д.А. Управление клиентским портфелем как способ минимизации риска снижения доходности бизнеса // Клиентинг и управление клиентским портфелем. – 2012. - № 2. – С. 116 – 120.
49. Марков А.А. Избранные труды / Сост. и общ. ред. Н. М. Нагорного.. – М.: Изд-во МЦНМО, 2002. – Т. 1. – 533 с. – (Математика. Механика. Физика). – 2003. – Т. 2. – 648 с. – (Теория алгорифмов и конструктивная математика; Математическая логика; Информатика и смежные вопросы).

50. Матросов В.Л., Горелик В.А., Жданов С.А., Муравьева О.В., Угольникова Б.З. Теоретические основы информатики: учебное пособие. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 352 с.
51. Мациевский С.В., Ишанов С.А. Теоретическая информатика: учебное пособие. – Калининград : Изд-во Российского гос. ун-та им. И. Канта, 2007. – 501 с.
52. Милосердов А.А., Герасимова Е.Б. Рыночные риски: формализация, моделирование, оценка качества моделей. – Тамбов: Изд-во тамб. гос. техн. ун-та, 2004. – 116 с.
53. Михалевич В.С., Кукса А.И. Методы последовательной оптимизации в дискретных сетевых задачах оптимального распределения ресурсов. М.: Наука, 1983. – 208 с.
54. Михалевич В.С., Трубин В.А., Шор Н.З. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования: Модели, методы, алгоритмы. М.: Наука, 1986. – 264 с.
55. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. - М.: Наука, 1981. – 487 с.
56. Моисеев Н.Н. Экология человечества глазами математика: (Человек, природа, будущее цивилизации). – М.: Мол.гвардия, 1988. – 251 с.
57. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1975. – 528 с.
58. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е. М. Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
59. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. – М.: Высш. шк., 1986. – 285 с.
60. Павловский Ю.Н. и др. Опыт имитационного моделирования при анализе социально-экономических явлений. – М.: МЗ Пресс, 2005. – 136 с.
61. Павловский Ю.Н., Белотелов Н.В., Бродский Ю.И. Компьютерное моделирование демографических, миграционных, эколого-экономических

процессов средствами распределенных вычислений. – М.: ВЦ РАН, 2008. – 122 с.

62. Павловский Ю.Н., Белотелов Н.В., Бродский Ю.И. Имитационное моделирование: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по специальностям направления подготовки "Прикладная математика и информатика". – М.: Академия, 2008. – 234 с.
63. Пак Н.И., Шестак С.Б. Теоретическая информатика: учеб. пособие. – Красноярск: КГПУ им. В. П. Астафьева, 2005. – 340 с.
64. Петров А.А. Методы оценки влияния информационных и телекоммуникационных технологий на макропоказатели эффективности и роста экономики. – М.: ВЦ РАН, 2005. – 224 с.
65. Петров А.А. Об экономике языком математики // Математическое моделирование. Вып. 5. – М. : ФАЗИС: ВЦ РАН, 2003 – 112 с.
66. Петров А.А., Поспелов И.Г., Поспелова Л.Я. Система интеллектуальной компьютерной поддержки математического моделирования экономики ЭКОМОД. – М.: ВЦ РАН, 1996. – 78 с.
67. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Концепция математического обеспечения оценки последствий крупных экономических проектов. – М.: ВЦ АН СССР, 1990 – 43 с.
68. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. – М.: Физматлит, 2007. – 64 с.
69. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Физматлит, 2007. – 255 с.
70. Понтрягин Л.С., Болтянский, В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. – 392 с.
71. Поспелов И.Г. и др. Новые принципы и методы разработки макромоделей экономики и модель современной экономики России. М.: ВЦ РАН, 2006 – 238 с.

72. Поспелов И.Г. Моделирование экономических структур – М.: ФАЗИС: ВЦ РАН, 2003. – 191 с.
73. Прохорова М.С. Золотова Т. В. Инструментальная система управления портфелем ценных бумаг // Научно-техническое творчество аспирантов и студентов: материалы 42-й научно-технической конференции аспирантов и студентов. Ч. 3 - Комсомольск-на-Амуре: ГОУВПО «КнАГТУ», 2012. – С.244-245.
74. Прохорова М.С. Линейная динамическая минимаксная задача управления риском // Управление большими системами: материалы X Всероссийской школы-конференции молодых ученых. Том 2/ Уфимск. гос. авиац. тех. ун-т. – Уфа: УГАТУ, 2013. – с. 189-193.
75. Прохорова М.С. О связи решений задач управления портфелем с линейной сверткой «математическое ожидание-дисперсия» и с ограничением по величине риска // Управление риском. – М.: ООО «Анкил», 2014. - №. 3(71) – С. 11-17.
76. Прохорова М.С. Исследование связи решений задач на максимум линейной свертки «математическое ожидание – дисперсия» и на минимум дисперсии при ограничении по доходности // Экономика, Статистика и Информатика. Вестник УМО. – М.: МЭСИ, 2014. – № 3. – С. 162–166.
77. Сорокин К.С. Гарантированное по исходам и рискам решение одной многокритериальной динамической задачи // Автоматика и телемеханика. – М.: ИПУ РАН, 2009. – № 3. С. 123 – 135.
78. Сорокин К.С. Существование гарантированного по исходам и рискам решения одной многокритериальной задачи // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. – М.: МГУ, 2008. – № 1. С. 19 – 25.
79. Селютин В.Д. Математические модели управления экономическим риском на основе концепции риска как ресурса // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 5: Экономика. – 2012. - № 1. – С. 171 – 175.

80. Соложевцев Е.Ю. Управление риском и эффективностью в экономике: Логико-вероятностный подход. – СПб.: Политехника, 2009 – 259 с.
81. Соловьев В.И. Математические методы управления рисками: учебное пособие / ГУУ. – М.: 2003. – 100 с.
82. Федорова Е.А., Титаренко А.В. Оптимизация инвестиционного портфеля методом неприятия потерь на примере российского фондового рынка // Экономика и математические методы. 2014. Т. 50. № 1. С. 80-90.
83. Хохлов Н.В. Управление риском: Учебное пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 239 с.
84. Шапкин А.С., Шапкин В.А. Управление портфелем инвестиций ценных бумаг. Учебное пособие. – М.: Дашков и К, 2010. – 782 с.
85. Шарп У., Александер Г., Бейли Дж. Инвестиции: Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 2004. – Т. XII, 1028 с.
86. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. – М.: ФАЗИС, 1998. – 512 с.
87. Шемакин Ю.И. Теоретическая информатика: учеб. пособие / под общ. ред. К.И. Курбакова. – М.: Изд-во Рос. экон. акад., 1997. – 131 с.
88. Aivaliotis G., Palczewski J. Investment strategies and compensation of a mean-variance optimizing fund manager // European journal of operational research. 2014. V. 234. № 2. P. 561-570.
89. Bignozzi V., Puccetti G., Rüschendorf L. Reducing model risk via positive and negative dependence assumptions // Insurance: Mathematics and Economics. 2015. № 61. P. 17-26.
90. Cai X.Q., Teo K.L., Yang X.Q., Zhou X.Y. Portfolio optimization with l_∞ risk measure // 35th IEEE Conference on Decision and Control. – Kobe, Japan, 1996. – P. 3682-3687.
91. Cillo, A., Delquié, P. Mean-risk analysis with enhanced behavioral content // European Journal of Operational Research. 2014. V. 239 (3), P. 764-775.
92. Danilenko A.I., Goubko M.V. Semantic-aware optimization of user interface menus // Automation and Remote Control. – 2013. T. 74. № 8. P. 1399-1411.

93. Isaacs R. Games of pursuit. The RAND Corporation. 1955. 354 p.
94. Konno H, Yamazaki H. Mean-absolute deviation portfolio optimization models and its application to Tokyo stock market // Management Scinces. – 1991. – №37.– P. 519-531.
95. Krokhmal P., Zabarankin M., Uryasev S. Modeling and optimization of risk // Surveys in Operations Research and Management Science. 2011. V. 16, Issue 2, P. 49-66.
96. Laptin Y.P., Zhuravlev Y.I., Vinogradov A.P. Empirical risk minimization and problems of constructing linear classifiers // Cybernetics and Systems Analysis. 2011. P. 640-648.
97. Markowitz H.M. Portfolio selection // Journal of Finance. – 1952. – №7. – P. 77-91.
98. Markowitz H. M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment. – N.-Y.: Wiley, 1959. – 344 p.
99. Molostvov V. Multiple criteria optimization for stochastic systems with uncertain parameters // Model Assisted Statistics and Applications. 2011. Vol. 6. No. 3. P. 231-237.
100. Nash J.F. Equilibrium points in N-person games. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1950. – V.36. – P. 48-49.
101. Pareto V. Manuel d'économie politique. Paris: Geard, 1909. 454 p.
102. Podinovski V.V. Decision making under uncertainty with unknown utility function and rank-ordered probabilities // European Journal of Operational Research. 2014. Vol. 239. No. 2. P. 537-541.
103. Savage L.Y. The Foundation of Statistics. New York: Wiley, 1954. 378 p.
104. Smimou K. International portfolio choice and political instability risk: a multi-objective approach // European journal of operational research. 2014. V. 234. № 2. P. 546-560.
105. Sordo M.A., Suárez-Llorens A., Bello A.J. Comparison of conditional distributions in portfolios of dependent risks // Insurance: Mathematics and Economics. 2015. № 61. P. 62-69.

106. Sorokin C. Outcome- and risk-guaranteed solution of a multiple objective dynamical problem // Computational Mathematics and Modeling. 2009. Vol. 20. No. 1. P. 71-84.
107. Sorokin C. Existence of an outcome- and risk-guaranteed solution to a multicriteria problem // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. 2008. Vol. 32. No. 1. P. 17-24.
108. Vorontsov K.V., Rudakov K.V., Leksin V.A., Efimov A.N. Web usage mining based on web users and web sites similarity measures // Artificial Intelligence. 2006. № 2. P. 285-295.
109. Wald A. Statistical decision function. New York. 1950. 245 p.
110. Zadeh L.A. Fuzzy orderings // Inf. Sci. – 1971. – № 3. – P. 177-200.
111. Zadeh L.A., Bellman R.E. Decision-making in fuzzy environment // Managem. Sci. – 1970. – № 17. – P. 141-164.
112. Zakamouline V., Koekebakker S. A generalisation of the mean-variance analysis // European Financial Management. 2009. V. 15, Issue 5, P. 934-970.
113. Zhukovskiy V.I., Molostvov V.S., Topchishvili A.L. Problem of multicurrency deposit diversification - three possible approaches to risk accounting // International Journal of Operations and Quantitative Management. – 2014. Vol. 20. № 1. P. 1-14.
114. Zhuravlev Yu.I., Ryazanov V.V., Senko O.V., Biryukov A.S., Vetrov D.P., Dokukin A.A., Kropotov D.A. The program system for intellectual data analysis, recognition and forecasting // WSEAS Transactions on Information Science and Applications. 2005. Vol. 2. № 1. P. 55-58.
115. Данные котировок с Московской Межбанковской Валютной Биржи [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.finam.ru/analysis/profile00008/default.asp (дата обращения: 18.01.2014).
116. http://fin-result.ru/mezhdunarodnye-investicii14.html
117. http://news.yandex.ru/quotes/29.html

ПРИЛОЖЕНИЕ. Код программы

```
Imports Microsoft.Office.Interop.Excel
Public Class Form1
    Dim filename As String
    Dim _Excel, str As Object
    Dim iLastRow, iLastCol, x(8), MatOzh(), vspom(,), SrDoh(), Dispers(), SKO(),
KOV(,) As Object
    Dim VsegoBymag, l, n As Integer

    Private Sub Form1_Load(ByVal sender As System.Object, ByVal e As
System.EventArgs) Handles MyBase.Load
        MyBase.Text = "TwoSets"

        TabControl1.TabPages(0).Text = "Формирование портфеля"
        TabControl1.TabPages(1).Text = "Ковариация портфелей"

        GroupBox1.Text = "Просмотр динамики цен"
        LinkLabel1.Text = "Динамика OnLine"
        LinkLabel2.Text = "Динамика OffLine"

        GroupBox2.Text = "Обработка статистической информации"
        GroupBox3.Text = "Модель с задаваемым отношением к риску"
        GroupBox4.Text = "Введите отношение к риску"
        GroupBox5.Text = "Модель с ограничением по доходности "
        GroupBox6.Text = "Введите желаемую доходность"
        GroupBox7.Text = "Модель с ограничением по дисперсии"
        GroupBox8.Text = "Введите значение дисперсии портфеля"

        TextBox1.Multiline = True : TextBox1.Clear()

    End Sub

    Private Sub ReleaseObject(ByVal obj As Object)
        'процедура выгрузки объектов из памяти
        Try
            System.Runtime.InteropServices.Marshal.ReleaseComObject(obj)
            obj = Nothing
        Catch ex As Exception
            obj = Nothing
            MessageBox.Show("Exception occured while releasing object " +
ex.ToString())
        Finally
            GC.Collect()
        End Try
    End Sub

    Private Sub Button4_Click(ByVal sender As System.Object, ByVal e As
System.EventArgs) Handles Button4.Click
        Dim xlApp As Application = New Application 'создаём приложение Excel
        Dim xlWB As Workbook, xlSht As Worksheet, Rng As Range
        Dim myArray(,), iLastRowVS, iLastColVS, VsegoBymag, f, w, Q, LL As Object
        Dim x(8) As Single
        Dim iLastRoww(100) As Integer
        Dim str As String
        Dim i, j(8), m, o, Nom(8) As Integer
        Dim v, l, t, a, b, c, d, g, aa, iks(8), u, Ris As Object
        str = ""

        xlWB = xlApp.Workbooks.Open("D:\АСПИРАНТУРА\TwoSets\Данные.xlsx") '
открываем нужную книгу
        xlSht = xlWB.Worksheets(1) 'или  xlWB.Worksheets("Лист1")
```

```
            With xlSht
                iLastRow = .Cells(.Rows.Count, 1).End(XlDirection.xlUp).Row 'последняя строка в столбце A
                iLastCol = .Cells(1, .Columns.Count).End(XlDirection.xlToLeft).Column 'последний столбец в первой строке
                For i = 1 To iLastCol
                    iLastRoww(i) = .Cells(.Rows.Count, i).End(XlDirection.xlUp).Row 'последняя строка в столбце A
                Next i
                Rng = .Range("A1", .Cells(iLastRow, iLastCol)) 'присваиваем переменной Rng диапазон ячеек нашей таблице на листе
            End With

            Dim MatOzh(iLastCol), vspom(iLastCol, iLastRow), SrDoh(iLastCol), Dispers(iLastCol), SKO(iLastCol), KOV(iLastCol, iLastRow) As Object

            myArray = Rng.Value(XlRangeValueDataType.xlRangeValueDefault) 'заполняем массив значениями диапазона ячеек

            xlWB.Close(SaveChanges:=False) 'закрыть и сохранить изменения True/False
            xlApp.Quit()

            xlWB = xlApp.Workbooks.Open("D:\АСПИРАНТУРА\TwoSets\Статистика.xlsx") ' открываем нужную книгу
            xlSht = xlWB.Worksheets(1) 'или  xlWB.Worksheets("Лист1")

            With xlSht
                iLastRowVS = .Cells(.Rows.Count, 1).End(XlDirection.xlUp).Row 'последняя строка в столбце A
                iLastColVS = .Cells(1, .Columns.Count).End(XlDirection.xlToLeft).Column 'последний столбец в первой строке
                Rng = .Range("A1", .Cells(iLastRowVS, iLastColVS)) 'присваиваем переменной Rng диапазон ячеек нашей таблице на листе
            End With

            myArray = Rng.Value(XlRangeValueDataType.xlRangeValueDefault) 'заполняем массив значениями диапазона ячеек

            Nom(1) = Val(TextBox8.Text)
            Nom(2) = Val(TextBox9.Text)
            Nom(3) = Val(TextBox10.Text)
            Nom(4) = Val(TextBox11.Text)
            Nom(5) = Val(TextBox12.Text)
            Nom(6) = Val(TextBox13.Text)
            Nom(7) = Val(TextBox14.Text)
            Nom(8) = Val(TextBox15.Text)

            VsegoBymag = 0
            For k = 1 To 8
                If Nom(k) > 0 Then
                    j(VsegoBymag + 1) = Nom(k)
                    VsegoBymag = VsegoBymag + 1
                End If
            Next k

            If VsegoBymag > iLastCol Then
                MessageBox.Show("Недостаточно статистических данных!", "Ошибка", MessageBoxButtons.OK, MessageBoxIcon.Error)
                Exit Sub
            End If

            If (VsegoBymag = 2 Or VsegoBymag = 3 Or VsegoBymag = 4) Then
                str = str & "Выбранно " & VsegoBymag & " ценные бумаги" & vbCrLf
```

```
Else
    str = str & "Выбранно " & VsegoBymag & " ценных бумаг" & vbCrLf
End If

j(0) = 0
For i = 1 To VsegoBymag
    MatOzh(i) = myArray(j(i), 1)
    SrDoh(i) = myArray(j(i), 2)
    Dispers(i) = myArray(j(i), 3)
    SKO(i) = myArray(j(i), 4)
    For m = 1 To VsegoBymag
        KOV(m, i) = myArray(j(m), 4 + j(i))
    Next m
Next i

xlWB.Close(SaveChanges:=False) 'закрыть и сохранить изменения True/False
xlApp.Quit()

'освобождаем память от объектов
ReleaseObject(xlSht)
ReleaseObject(xlWB)
ReleaseObject(xlApp)
GC.Collect()

LL = TextBox3.Text
If LL < 0 Then
    MsgBox("Введите число больше нуля!", vbCritical, "Ошибка ввода!")
    GoTo finish
End If

For i = 0 To VsegoBymag
    x(i) = 0
Next i

w = -(10 ^ 6)
Q = 0
Ris = 0
o = 0
ProgressBar1.Value = 0
If VsegoBymag = 1 Then
    GoTo 1
End If
If VsegoBymag = 2 Then
    GoTo 2
End If
If VsegoBymag = 3 Then
    GoTo 3
End If
If VsegoBymag = 4 Then
    GoTo 4
End If
If VsegoBymag = 5 Then
    GoTo 5
End If
If VsegoBymag = 6 Then
    GoTo 6
End If
If VsegoBymag = 7 Then
    GoTo 7
End If
If VsegoBymag = 8 Then
    GoTo 8
End If
```

```
1:          str = str & "x1=" & 1 & " Доходность=" & Math.Round(SrDoh(1) * 1000) / 1000 & "%" & " Риск составляет" & Math.Round(SKO(1) * 1000) / 1000 & "%" & vbCrLf
            ProgressBar1.Value = 100
            GoTo finish

2:          For v = 0 To 1 Step 0.001
                l = 1 - v
                x(1) = v
                x(2) = l

                f = 0
                aa = 0
                u = 0
                For i = 1 To VsegoBymag
                    For p = 1 To VsegoBymag
                        u = u + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
                    Next p
                    aa = aa + x(i) * SrDoh(i)
                Next i

                f = aa - LL * u
                If (f > w) Then
                    w = f
                    Q = aa
                    Ris = u
                    For i = 1 To VsegoBymag
                        iks(i) = x(i)
                    Next i
                    o = o + 1
                End If
                ProgressBar1.Value = v * 100
            Next v

            GoTo finish

3:          For v = 0 To 1 Step 0.001
                For l = 0 To 1 - v Step 0.001
                    t = 1 - v - l

                    x(1) = v
                    x(2) = l
                    x(3) = t
                    f = 0
                    aa = 0
                    u = 0
                    For i = 1 To VsegoBymag
                        For p = 1 To VsegoBymag
                            u = u + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
                        Next p
                        aa = aa + x(i) * SrDoh(i)
                    Next i

                    f = aa - LL * u
                    If (f > w) Then
                        w = f
                        Q = aa
                        Ris = u
                        For i = 1 To VsegoBymag
                            iks(i) = x(i)
                        Next i
                        o = o + 1
                    End If
                    ProgressBar1.Value = v * 100
                Next l
```

```
        Next v

        GoTo finish

4:
        For v = 0 To 1 Step 0.01
            For l = 0 To 1 - v Step 0.01
                For t = 0 To 1 - v - l Step 0.01
                    a = 1 - v - l - t
                    x(1) = v
                    x(2) = l
                    x(3) = t
                    x(4) = a
                    f = 0
                    aa = 0
                    u = 0
                    For i = 1 To VsegoBymag
                        For p = 1 To VsegoBymag
                            u = u + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
                        Next p
                        aa = aa + x(i) * SrDoh(i)
                    Next i

                    f = aa - LL * u
                    If (f > w) Then
                        w = f
                        Q = aa
                        Ris = u
                        For i = 1 To VsegoBymag
                            iks(i) = x(i)
                        Next i
                        o = o + 1
                    End If
                    ProgressBar1.Value = v * 100
                Next t
            Next l
        Next v

        GoTo finish
5:
        For v = 0 To 1 Step 0.01
            For l = 0 To 1 - v Step 0.01
                For t = 0 To 1 - v - l Step 0.01
                    For a = 0 To 1 - v - l - t Step 0.01
                        b = 1 - v - l - t - a

                        x(1) = v
                        x(2) = l
                        x(3) = t
                        x(4) = a
                        x(5) = b
                        f = 0
                        aa = 0
                        u = 0
                        For i = 1 To VsegoBymag
                            For p = 1 To VsegoBymag
                                u = u + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
                            Next p
                            aa = aa + x(i) * SrDoh(i)
                        Next i

                        f = aa - LL * u
                        If (f > w) Then
                            w = f
```

```
                        Q = aa
                        Ris = u
                        For i = 1 To VsegoBymag
                            iks(i) = x(i)
                        Next i
                        o = o + 1
                    End If
                    ProgressBar1.Value = v * 100
                Next a
            Next t
        Next l
    Next v

    GoTo finish

6:
    For v = 0 To 1 Step 0.01
        For l = 1 - v To 0 Step -0.01
            For t = 0 To 1 - v - l Step 0.01
                For a = 0 To 1 - v - l - t Step 0.01
                    For b = 0 To 1 - v - l - t - a Step 0.01
                        c = 1 - v - l - t - a - b

                        x(1) = v
                        x(2) = l
                        x(3) = t
                        x(4) = a
                        x(5) = b
                        x(6) = c
                        f = 0
                        aa = 0
                        u = 0
                        For i = 1 To VsegoBymag
                            For p = 1 To VsegoBymag
                                u = u + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
                            Next p
                            aa = aa + x(i) * SrDoh(i)
                        Next i

                        f = aa - LL * u
                        If (f > w) Then
                            w = f
                            Q = aa
                            Ris = u
                            For i = 1 To VsegoBymag
                                iks(i) = x(i)
                            Next i
                            o = o + 1
                        End If
                        ProgressBar1.Value = v * 100
                    Next b
                Next a
            Next t
        Next l
    Next v

    GoTo finish

7:
    For v = 0 To 1 Step 0.01
        For l = 0 To 1 - v Step 0.01
            For t = 0 To 1 - v - l Step 0.01
                For a = 0 To 1 - v - l - t Step 0.01
                    For b = 0 To 1 - v - l - t - a Step 0.01
```

```
                            For c = 0 To 1 - v - l - t - a - b Step 0.01
                                d = 1 - v - l - t - a - b - c

                                x(1) = v
                                x(2) = l
                                x(3) = t
                                x(4) = a
                                x(5) = b
                                x(6) = c
                                x(7) = d
                                f = 0
                                aa = 0
                                u = 0
                                For i = 1 To VsegoBymag
                                    For p = 1 To VsegoBymag
                                        u = u + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
                                    Next p
                                    aa = aa + x(i) * SrDoh(i)
                                Next i

                                f = aa - LL * u
                                If (f > w) Then
                                    w = f
                                    Q = aa
                                    Ris = u
                                    For i = 1 To VsegoBymag
                                        iks(i) = x(i)
                                    Next i
                                    o = o + 1
                                End If
                                ProgressBar1.Value = v * 100
                            Next c
                        Next b
                    Next a
                Next t
            Next l
        Next v

        GoTo finish

8:
        For v = 0 To 1 Step 0.01
            For l = 0 To 1 - v Step 0.01
                For t = 0 To 1 - v - l Step 0.01
                    For a = 0 To 1 - v - l - t Step 0.01
                        For b = 0 To 1 - v - l - t - a Step 0.01
                            For c = 0 To 1 - v - l - t - a - b Step 0.01
                                For d = 0 To 1 - v - l - t - a - b - c Step 0.01
                                    g = 1 - v - l - t - a - b - c - d

                                    x(1) = v
                                    x(2) = l
                                    x(3) = t
                                    x(4) = a
                                    x(5) = b
                                    x(6) = c
                                    x(7) = d
                                    x(8) = g
                                    f = 0
                                    aa = 0
                                    u = 0
                                    For i = 1 To VsegoBymag
                                        For p = 1 To VsegoBymag
                                            u = u + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
```

```
                                                Next p
                                                aa = aa + x(i) * SrDoh(i)
                                            Next i

                                            f = aa - LL * u
                                            If (f > w) Then
                                                w = f
                                                Q = aa
                                                Ris = u
                                                For i = 1 To VsegoBymag
                                                    iks(i) = x(i)
                                                Next i
                                                o = o + 1
                                            End If
                                            ProgressBar1.Value = v * 100
                                        Next d
                                    Next c
                                Next b
                            Next a
                        Next t
                    Next l
                Next v

                GoTo finish
        finish:
                If o <> 0 Then
                    For i = 1 To VsegoBymag
                        str = str & "  x" & i & "=" & Math.Round(iks(i), 3)
                    Next i
                    str  =  str  &  vbCrLf  &  "  Мат.  ожидание  доходности  портфеля="  &
Math.Round(Q  *  1000)  /  1000  &  "%"  &  vbCrLf  &  "  СКО  портфеля"  &  Math.Round(1000  *
Math.Sqrt(Ris)) / 1000 & "%" & vbCrLf
                Else : str = str & "Нет набора для такой желаемой доходности" & vbCrLf
                End If
                TextBox4.Text = str
            End Sub

            Private  Sub  Button5_Click(ByVal  sender  As  System.Object,  ByVal  e  As
System.EventArgs) Handles Button5.Click
                Dim xlApp As Application = New Application 'создаём приложение Excel
                Dim xlWB As Workbook, xlSht As Worksheet, Rng As Range
                Dim  myArray(,),  iLastRowVS,  iLastColVS,  VsegoBymag,  f,  Q,  ZZ,  x(8),  u  As
Object
                Dim iLastRoww(100) As Integer
                Dim str As String
                Dim i, p, j(8), m, o, g, Nom(8) As Integer
                Dim v, l, t, a, b, c, d As Object
                Dim aa, iks(8) As Object
                str = ""

                xlWB   =   xlApp.Workbooks.Open("D:\АСПИРАНТУРА\TwoSets\Данные.xlsx")   '
открываем нужную книгу
                xlSht = xlWB.Worksheets(1) 'или  xlWB.Worksheets("Лист1")

                With xlSht
                    iLastRow = .Cells(.Rows.Count, 1).End(XlDirection.xlUp).Row 'последняя
строка в столбце A
                    iLastCol  =  .Cells(1,  .Columns.Count).End(XlDirection.xlToLeft).Column
'последний столбец в первой строке
                    For i = 1 To iLastCol
                        iLastRoww(i)  =  .Cells(.Rows.Count,  i).End(XlDirection.xlUp).Row
'последняя строка в столбце A
                    Next i
```

```
            Rng = .Range("A1", .Cells(iLastRow, iLastCol)) 'присваиваем переменной Rng диапазон ячеек нашей таблице на листе
        End With

        Dim MatOzh(iLastCol), vspom(iLastCol, iLastRow), SrDoh(iLastCol), Dispers(iLastCol), SKO(iLastCol), KOV(iLastCol, iLastRow) As Object

        myArray = Rng.Value(XlRangeValueDataType.xlRangeValueDefault) 'заполняем массив значениями диапазона ячеек

        xlWB.Close(SaveChanges:=False) 'закрыть и сохранить изменения True/False
        xlApp.Quit()

        xlWB = xlApp.Workbooks.Open("D:\АСПИРАНТУРА\TwoSets\Статистика.xlsx") ' открываем нужную книгу
        xlSht = xlWB.Worksheets(1) 'или  xlWB.Worksheets("Лист1")

        With xlSht
            iLastRowVS = .Cells(.Rows.Count, 1).End(XlDirection.xlUp).Row 'последняя строка в столбце A
            iLastColVS = .Cells(1, .Columns.Count).End(XlDirection.xlToLeft).Column 'последний столбец в первой строке
            Rng = .Range("A1", .Cells(iLastRowVS, iLastColVS)) 'присваиваем переменной Rng диапазон ячеек нашей таблице на листе
        End With

        myArray = Rng.Value(XlRangeValueDataType.xlRangeValueDefault) 'заполняем массив значениями диапазона ячеек

        Nom(1) = Val(TextBox8.Text)
        Nom(2) = Val(TextBox9.Text)
        Nom(3) = Val(TextBox10.Text)
        Nom(4) = Val(TextBox11.Text)
        Nom(5) = Val(TextBox12.Text)
        Nom(6) = Val(TextBox13.Text)
        Nom(7) = Val(TextBox14.Text)
        Nom(8) = Val(TextBox15.Text)

        a = 0
        For k = 1 To 8
            If Nom(k) > 0 Then
                j(a + 1) = Nom(k)
                a = a + 1
            End If
        Next k

        VsegoBymag = a

        If VsegoBymag > iLastCol Then
            MessageBox.Show("Недостаточно статистических данных!", "Ошибка", MessageBoxButtons.OK, MessageBoxIcon.Error)
            Exit Sub
        End If

        If (VsegoBymag = 2 Or VsegoBymag = 3 Or VsegoBymag = 4) Then
            str = str & "Выбранно " & VsegoBymag & " ценные бумаги" & vbCrLf
        Else
            str = str & "Выбранно " & VsegoBymag & " ценных бумаг" & vbCrLf
        End If

        j(0) = 0
        For i = 1 To VsegoBymag
            MatOzh(i) = myArray(j(i), 1)
            SrDoh(i) = myArray(j(i), 2)
```

```
        Dispers(i) = myArray(j(i), 3)
        SKO(i) = myArray(j(i), 4)
        For m = 1 To VsegoBymag
            KOV(m, i) = myArray(j(m), 4 + j(i))
        Next m
    Next i

    xlWB.Close(SaveChanges:=False) 'закрыть и сохранить изменения True/False
    xlApp.Quit()

    'освобождаем память от объектов
    ReleaseObject(xlSht)
    ReleaseObject(xlWB)
    ReleaseObject(xlApp)
    GC.Collect()

    ZZ = TextBox7.Text

    For i = 0 To VsegoBymag
        x(i) = 0
    Next i

    Q = 0
    o = 0
    u = Math.Pow(10, 6)
    ProgressBar1.Value = 0
    If VsegoBymag = 2 Then
        GoTo 2
    End If
    If VsegoBymag = 3 Then
        GoTo 3
    End If
    If VsegoBymag = 4 Then
        GoTo 4
    End If
    If VsegoBymag = 5 Then
        GoTo 5
    End If
    If VsegoBymag = 6 Then
        GoTo 6
    End If
    If VsegoBymag = 7 Then
        GoTo 7
    End If
    If VsegoBymag = 8 Then
        GoTo 8
    End If

2:  For v = 0 To 1 Step 0.001
        l = 1 - v
        x(1) = v
        x(2) = l
        f = 0
        aa = 0
        For i = 1 To VsegoBymag
            For p = 1 To VsegoBymag
                f = f + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
            Next p
            aa = aa + x(i) * SrDoh(i)
        Next i

        If aa >= (ZZ - 0.0009) And aa <= (ZZ + 0.0009) And (f <= u) Then
            u = f
            Q = aa
```

```
                For i = 1 To VsegoBymag
                    iks(i) = x(i)
                Next i
                o = o + 1
            End If
            ProgressBar1.Value = v * 100
        Next v

        GoTo finish

3:
        For v = 0 To 1 Step 0.001
            For l = 0 To 1 - v Step 0.001
                t = 1 - v - l
                x(1) = v
                x(2) = l
                x(3) = t
                f = 0
                aa = 0
                For i = 1 To VsegoBymag
                    For p = 1 To VsegoBymag
                        f = f + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
                    Next p
                    aa = aa + x(i) * SrDoh(i)
                Next i

                If aa >= (ZZ - 0.0009) And aa <= (ZZ + 0.0009) And (f <= u) Then
                    u = f
                    Q = aa
                    For i = 1 To VsegoBymag
                        iks(i) = x(i)
                    Next i
                    o = o + 1
                End If
            Next l
            ProgressBar1.Value = v * 100
        Next v

        GoTo finish

4:
        For v = 0 To 1 Step 0.01
            For l = 0 To 1 - v Step 0.01
                For t = 0 To 1 - v - l Step 0.01
                    a = 1 - v - l - t

                    x(1) = v
                    x(2) = l
                    x(3) = t
                    x(4) = a
                    f = 0
                    aa = 0
                    For i = 1 To VsegoBymag
                        For p = 1 To VsegoBymag
                            f = f + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
                        Next p
                        aa = aa + x(i) * SrDoh(i)
                    Next i

                    If aa >= (ZZ - 0.0009) And aa <= (ZZ + 0.0009) And (f <= u)
Then
                        u = f
                        Q = aa
                        For i = 1 To VsegoBymag
```

```
                        iks(i) = x(i)
                    Next i
                    o = o + 1
                End If

            Next t
        Next l
        ProgressBar1.Value = v * 100
    Next v

    GoTo finish

5:
    For v = 0 To 1 Step 0.01
        For l = 0 To 1 - v Step 0.01
            For t = 0 To 1 - v - l Step 0.01
                For a = 0 To 1 - v - l - t Step 0.01
                    b = 1 - v - l - t - a

                    x(1) = v
                    x(2) = l
                    x(3) = t
                    x(4) = a
                    x(5) = b
                    f = 0
                    aa = 0
                    For i = 1 To VsegoBymag
                        For p = 1 To VsegoBymag
                            f = f + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
                        Next p
                        aa = aa + x(i) * SrDoh(i)
                    Next i

                    If aa >= (ZZ - 0.0009) And aa <= (ZZ + 0.0009) And (f <=
u) Then
                        u = f
                        Q = aa
                        For i = 1 To VsegoBymag
                            iks(i) = x(i)
                        Next i
                        o = o + 1
                    End If

                Next a
            Next t
        Next l
        ProgressBar1.Value = v * 100
    Next v

    GoTo finish

6:
    For v = 0 To 1 Step 0.01
        For l = 1 - v To 0 Step -0.01
            For t = 0 To 1 - v - l Step 0.01
                For a = 0 To 1 - v - l - t Step 0.01
                    For b = 0 To 1 - v - l - t - a Step 0.01
                        c = 1 - v - l - t - a - b

                        x(1) = v
                        x(2) = l
                        x(3) = t
                        x(4) = a
                        x(5) = b
```

```
                                        x(6) = c
                                        f = 0
                                        aa = 0
                                        For i = 1 To VsegoBymag
                                            For p = 1 To VsegoBymag
                                                f = f + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
                                            Next p
                                            aa = aa + x(i) * SrDoh(i)
                                        Next i

                                        If aa >= (ZZ - 0.0009) And aa <= (ZZ + 0.0009) And (f
<= u) Then
                                            u = f
                                            Q = aa
                                            For i = 1 To VsegoBymag
                                                iks(i) = x(i)
                                            Next i
                                            o = o + 1
                                        End If

                                    Next b
                                Next a
                            Next t
                        Next l
                        ProgressBar1.Value = v * 100
                    Next v

                    GoTo finish

        7:          For v = 0 To 1 Step 0.01
                        For l = 1 - v To 0 Step -0.01
                            For t = 0 To 1 - v - l Step 0.01
                                For a = 0 To 1 - v - l - t Step 0.01
                                    For b = 0 To 1 - v - l - t - a Step 0.01
                                        For c = 0 To 1 - v - l - t - a - b Step 0.01
                                            d = 1 - v - l - t - a - b - c

                                            x(1) = v
                                            x(2) = l
                                            x(3) = t
                                            x(4) = a
                                            x(5) = b
                                            x(6) = c
                                            x(7) = d
                                            f = 0
                                            aa = 0
                                            For i = 1 To VsegoBymag
                                                For p = 1 To VsegoBymag
                                                    f = f + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
                                                Next p
                                                aa = aa + x(i) * SrDoh(i)
                                            Next i

                                            If aa >= (ZZ - 0.0009) And aa <= (ZZ + 0.0009) And
(f <= u) Then
                                                u = f
                                                Q = aa
                                                For i = 1 To VsegoBymag
                                                    iks(i) = x(i)
                                                Next i
                                                o = o + 1
                                            End If

                                        Next c
```

```
                        Next b
                    Next a
                Next t
            Next l
            ProgressBar1.Value = v * 100
        Next v

        GoTo finish

8:
        For v = 0 To 1 Step 0.01
            For l = 0 To 1 - v Step 0.01
                For t = 0 To 1 - v - l Step 0.01
                    For a = 0 To 1 - v - l - t Step 0.01
                        For b = 0 To 1 - v - l - t - a Step 0.01
                            For c = 0 To 1 - v - l - t - a - b Step 0.01
                                For d = 0 To 1 - v - l - t - a - b - c Step 0.01
                                    g = 1 - v - l - t - a - b - c - d

                                    x(1) = v
                                    x(2) = l
                                    x(3) = t
                                    x(4) = a
                                    x(5) = b
                                    x(6) = c
                                    x(7) = d
                                    f = 0
                                    aa = 0
                                    For i = 1 To VsegoBymag
                                        For p = 1 To VsegoBymag
                                            f = f + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
                                        Next p
                                        aa = aa + x(i) * SrDoh(i)
                                    Next i

                                    If aa >= (ZZ - 0.0009) And aa <= (ZZ + 0.0009)
And (f <= u) Then
                                        u = f
                                        Q = aa
                                        For i = 1 To VsegoBymag
                                            iks(i) = x(i)
                                        Next i
                                        o = o + 1
                                    End If

                                Next d
                            Next c
                        Next b
                    Next a
                Next t
            Next l
            ProgressBar1.Value = v * 100
        Next v

        GoTo finish


finish:
        If o <> 0 Then
            For i = 1 To VsegoBymag
                str = str & "   x" & i & "=" & Math.Round(iks(i), 3)
            Next i
```

```
                str = str & vbCrLf & " Мат. ожидание доходности портфеля=" & Math.Round(Q * 1000) / 1000 & "%" & vbCrLf & " СКО портфеля" & Math.Round(1000 * Math.Sqrt(u)) / 1000 & "%" & vbCrLf
            Else : str = str & "Нет набора для такой желаемой доходности" & vbCrLf
            End If
            TextBox6.Text = str

        End Sub

        Private Sub Button6_Click(ByVal sender As System.Object, ByVal e As System.EventArgs) Handles Button6.Click
            TextBox4.Text = ""
        End Sub

        Private Sub Button7_Click(ByVal sender As System.Object, ByVal e As System.EventArgs) Handles Button7.Click
            TextBox6.Text = ""
        End Sub

        Private Sub Button1_Click(ByVal sender As System.Object, ByVal e As System.EventArgs) Handles Button1.Click
            TextBox8.Text = ""
            TextBox9.Text = ""
            TextBox10.Text = ""
            TextBox11.Text = ""
            TextBox12.Text = ""
            TextBox13.Text = ""
            TextBox14.Text = ""
            TextBox15.Text = ""
        End Sub

        Private Sub Button3_Click(ByVal sender As System.Object, ByVal e As System.EventArgs) Handles Button3.Click
            TextBox2.Text = ""
            TextBox16.Text = ""
            TextBox17.Text = ""
            TextBox18.Text = ""
            TextBox19.Text = ""
            TextBox20.Text = ""
            TextBox21.Text = ""
            TextBox22.Text = ""
        End Sub

        Private Sub Button8_Click(ByVal sender As System.Object, ByVal e As System.EventArgs) Handles Button8.Click
            TextBox23.Text = ""
            TextBox24.Text = ""
            TextBox25.Text = ""
            TextBox26.Text = ""
            TextBox27.Text = ""
            TextBox28.Text = ""
            TextBox29.Text = ""
            TextBox30.Text = ""
        End Sub

        Private Sub Button9_Click(ByVal sender As System.Object, ByVal e As System.EventArgs) Handles Button9.Click
            Dim xx(8), yy(8), x(8), y(8), OZ As Object
            Dim xlApp As Application = New Application 'создаём приложение Excel
            Dim xlWB As Workbook, xlSht As Worksheet, Rng As Range
            Dim myArray(,), iLastRowVS, iLastColVS, VsegoBymag As Object
            Dim Nom(8), j(8), a, b As Integer

            xx(1) = TextBox22.Text
```

```
            xx(2) = TextBox21.Text
            xx(3) = TextBox20.Text
            xx(4) = TextBox19.Text
            xx(5) = TextBox18.Text
            xx(6) = TextBox17.Text
            xx(7) = TextBox16.Text
            xx(8) = TextBox2.Text

            b = 0
            For k = 1 To 8
                If xx(k) <> "" Then
                    x(b + 1) = xx(k)
                    b = b + 1
                End If
            Next k

            yy(1) = TextBox23.Text
            yy(2) = TextBox24.Text
            yy(3) = TextBox25.Text
            yy(4) = TextBox26.Text
            yy(5) = TextBox27.Text
            yy(6) = TextBox28.Text
            yy(7) = TextBox29.Text
            yy(8) = TextBox30.Text

            b = 0
            For k = 1 To 8
                If yy(k) <> "" Then
                    y(b + 1) = yy(k)
                    b = b + 1
                End If
            Next k

            xlWB  =  xlApp.Workbooks.Open("D:\АСПИРАНТУРА\TwoSets\Статистика.xlsx")   '
открываем нужную книгу
            xlSht = xlWB.Worksheets(1) 'или  xlWB.Worksheets("Лист1")

            With xlSht
                iLastRowVS     =     .Cells(.Rows.Count,     1).End(XlDirection.xlUp).Row
'последняя строка в столбце А
                iLastColVS                          =                         .Cells(1,
.Columns.Count).End(XlDirection.xlToLeft).Column 'последний столбец в первой строке
                Rng   =   .Range("A1",   .Cells(iLastRowVS,   iLastColVS))   'присваиваем
переменной Rng диапазон ячеек нашей таблице на листе
            End With

            Dim   MatOzh(iLastCol),    vspom(iLastCol,    iLastRow),    SrDoh(iLastCol),
Dispers(iLastCol), SKO(iLastCol), KOV(iLastCol, iLastRow) As Object
            myArray  =  Rng.Value(XlRangeValueDataType.xlRangeValueDefault)  'заполняем
массив значениями диапазона ячеек

            Nom(1) = Val(TextBox8.Text)
            Nom(2) = Val(TextBox9.Text)
            Nom(3) = Val(TextBox10.Text)
            Nom(4) = Val(TextBox11.Text)
            Nom(5) = Val(TextBox12.Text)
            Nom(6) = Val(TextBox13.Text)
            Nom(7) = Val(TextBox14.Text)
            Nom(8) = Val(TextBox15.Text)

            a = 0
            For k = 1 To 8
                If Nom(k) > 0 Then
                    j(a + 1) = Nom(k)
```

```
                a = a + 1
            End If
        Next k

        VsegoBymag = a

        If VsegoBymag > iLastCol Then
            MessageBox.Show("Недостаточно   статистических   данных!",   "Ошибка",
MessageBoxButtons.OK, MessageBoxIcon.Error)
            Exit Sub
        End If

        For i = 1 To VsegoBymag
            MatOzh(i) = myArray(j(i), 1)
            SrDoh(i) = myArray(j(i), 2)
            Dispers(i) = myArray(j(i), 3)
            SKO(i) = myArray(j(i), 4)
        Next i

        For i = 1 To VsegoBymag
            For m = 1 To VsegoBymag
                KOV(m, i) = myArray(j(m), 4 + j(i))
            Next m
        Next i

        xlWB.Close(SaveChanges:=False) 'закрыть и сохранить изменения True/False
        xlApp.Quit()

        'освобождаем память от объектов
        ReleaseObject(xlSht)
        ReleaseObject(xlWB)
        ReleaseObject(xlApp)
        GC.Collect()

        OZ = 0
        For i = 1 To VsegoBymag
            For k = 1 To VsegoBymag
                OZ = OZ + KOV(i, k) * x(i) * y(k)
            Next k
        Next i

        Label5.Text  =  "Ковариация  портфелей=   "  &  Math.Round(OZ  *  100)  /  100  &
vbCrLf
    End Sub


    Private   Sub   Button2_Click(ByVal   sender   As   System.Object,   ByVal   e   As
System.EventArgs) Handles Button2.Click
        Dim xlApp As Application = New Application 'создаём приложение Excel
        Dim xlWB As Workbook, xlSht As Worksheet, Rng As Range
        Dim xlApp1 As Application = New Application 'создаём приложение Excel
        Dim xlWB1 As Workbook, xlSht1 As Worksheet, Rng1 As Range
        Dim iLastRoww(100), iLastRow, iRow, iCol, i, j, k, n, iLastRow1, iLastCol1
As Integer
        Dim myArray(,), myArray1(iLastCol, 5) As Object
        Dim M As Object
        Dim str As String

        str = ""

        xlWB    =    xlApp.Workbooks.Open("D:\АСПИРАНТУРА\TwoSets\Данные.xlsx")    '
открываем нужную книгу
        xlSht = xlWB.Worksheets(1) 'или  xlWB.Worksheets("Лист1")
```

```
            With xlSht
                iLastRow = .Cells(.Rows.Count, 1).End(XlDirection.xlUp).Row 'последняя
строка в столбце A
                iLastCol = .Cells(1, .Columns.Count).End(XlDirection.xlToLeft).Column
'последний столбец в первой строке
                For i = 1 To iLastCol
                    iLastRoww(i) = .Cells(.Rows.Count, i).End(XlDirection.xlUp).Row
'последняя строка в столбце A
                Next i
                Rng = .Range("A1", .Cells(iLastRow, iLastCol)) 'присваиваем переменной
Rng диапазон ячеек нашей таблице на листе
            End With

            Dim MatOzh(iLastCol), vspom(iLastCol, iLastRow), SrDoh(iLastCol),
Dispers(iLastCol), SKO(iLastCol), KOV(iLastCol, iLastRow) As Object
            myArray = Rng.Value(XlRangeValueDataType.xlRangeValueDefault) 'заполняем
массив значениями диапазона ячеек

            For iCol = LBound(myArray, 2) To UBound(myArray, 2) 'цикл по столбцам
                For iRow = LBound(myArray, 1) To UBound(myArray, 1) 'цикл по строкам
                Next iRow
            Next iCol


            'закрываем книгу
            xlWB.Close(SaveChanges:=False) 'закрыть и сохранить изменения True/False
            xlApp.Quit()

            'освобождаем память от объектов
            ReleaseObject(xlSht)
            ReleaseObject(xlWB)
            ReleaseObject(xlApp)
            GC.Collect()

            'заполняем получаемыми данными файл Статистика
            xlWB1 = xlApp1.Workbooks.Open("D:\АСПИРАНТУРА\TwoSets\Статистика.xlsx") '
открываем нужную книгу
            xlSht1 = xlWB1.Worksheets(1) 'или  xlWB.Worksheets("Лист1")

            With xlSht1
                iLastRow1 = .Cells(.Rows.Count, 1).End(XlDirection.xlUp).Row
'последняя строка в столбце A
                iLastCol1 = .Cells(1, .Columns.Count).End(XlDirection.xlToLeft).Column
'последний столбец в первой строке
                For i = 1 To iLastCol1
                    iLastRoww(i) = .Cells(.Rows.Count, i).End(XlDirection.xlUp).Row
'последняя строка в столбце A
                    'MsgBox("Последняя строка в " & i & " столбце: " & iLastRoww(i) &
vbCrLf, MsgBoxStyle.Information, "Инфо")
                Next i
                Rng1 = .Range("A1", .Cells(iLastRow1, iLastCol1)) 'присваиваем
переменной Rng диапазон ячеек нашей таблице на листе
            End With

            myArray1 = Rng1.Value(XlRangeValueDataType.xlRangeValueDefault) 'заполняем
массив значениями диапазона ячеек

            For j = 1 To iLastCol
                M = 0
                For i = 1 To iLastRoww(j)
                    M = M + myArray(i, j)
                Next i
                MatOzh(j) = M / iLastRoww(j)
                xlApp1.Cells(j, 1) = MatOzh(j)
```

```
            Next j

            For j = 1 To iLastCol
                SrDoh(j) = 0
                For i = 1 To iLastRoww(j) - 1
                    vspom(j,  i)  =  (myArray(i  +  1,  j)  -  myArray(i,  j))  *  100  /
myArray(i, j)
                    SrDoh(j) = SrDoh(j) + vspom(j, i) / (iLastRoww(j) - 1)
                Next i
                xlApp1.Cells(j, 2) = SrDoh(j)
                str = str & "Математическое ожидание доходности" & j & "й бумаги=" &
Math.Round(SrDoh(j) * 1000) / 1000 & vbCrLf
            Next j

            str = str & vbCrLf

            For j = 1 To iLastCol
                Dispers(j) = 0
                For i = 1 To iLastRoww(j) - 1
                    Dispers(j)  =  Dispers(j)  +  (SrDoh(j)  -  vspom(j,  i))  ^  2  /
(iLastRoww(j) - 1)
                Next i
                xlApp1.Cells(j, 3) = Dispers(j)
                str  =  str  &  "Дисперсия"  &  j  &  "й  бумаги="  &  Math.Round(Dispers(j)  *
1000) / 1000 & vbCrLf
            Next j

            str = str & vbCrLf

            For j = 1 To iLastCol
                SKO(j) = (Dispers(j)) ^ (1 / 2)
                xlApp1.Cells(j, 4) = SKO(j)
                str = str & "СКО" & j & "й бумаги=" & Math.Round(SKO(j) * 1000) / 1000
& vbCrLf
            Next j

            str = str & vbCrLf

            n = iLastRoww(1)
            For i = 2 To iLastCol
                If iLastRoww(i) < n Then n = iLastRoww(i)
            Next i

            For j = 1 To iLastCol
                For i = 1 To iLastCol
                    KOV(i, j) = 0
                    For k = 1 To n - 1
                        KOV(i,  j)  =  KOV(i,  j)  +  (vspom(i,  k)  -  SrDoh(i))  *  (vspom(j,
k) - SrDoh(j)) / (n - 1)

                    Next k
                    xlApp1.Cells(j, 4 + i) = KOV(i, j)
                    str = str & "Ковариация между бумагами " & i & " и" & j & " = " &
Math.Round(KOV(i, j) * 1000) / 1000 & vbCrLf
                Next i
            Next j

            TextBox1.Text = str

            xlWB1.Close(SaveChanges:=True) 'закрыть и сохранить изменения True/False
            xlApp1.Quit()

            'освобождаем память от объектов
            ReleaseObject(xlSht1)
```

```
            ReleaseObject(xlWB1)
            ReleaseObject(xlApp1)
            GC.Collect()
        End Sub

        Private  Sub  LinkClicked(ByVal  sender  As  System.Object,  ByVal  e  As
System.Windows.Forms.LinkLabelLinkClickedEventArgs)   Handles   LinkLabel1.LinkClicked,
LinkLabel2.LinkClicked
            Dim s As String = sender.ToString.Substring(48, 1)
            Select Case s
                Case "n"
                    System.Diagnostics.Process.Start("opera.exe",
"http://www.finam.ru/analysis/profile00008/default.asp")
                Case "f"

System.Diagnostics.Process.Start("D:\АСПИРАНТУРА\TwoSets\Данные.xlsx")
            End Select
        End Sub

        Private  Sub  Button11_Click(ByVal  sender  As  System.Object,  ByVal  e  As
System.EventArgs) Handles Button11.Click
            TextBox31.Text = ""
        End Sub

        Private  Sub  Button12_Click(ByVal  sender  As  System.Object,  ByVal  e  As
System.EventArgs) Handles Button12.Click
            Dim xlApp As Application = New Application 'создаём приложение Excel
            Dim xlWB As Workbook, xlSht As Worksheet, Rng As Range
            Dim myArray(,), iLastRowVS, iLastColVS, VsegoBymag, f, Q, ZZ, u As Object
            Dim iLastRoww(100) As Integer
            Dim str, dan As String
            Dim i, j(8), m, o, g, Nom(8) As Integer
            Dim v, l, t, b, c, d, a, x(8), aa, iks(8), Ris As Object
            str = ""
            dan = ""

            xlWB   =   xlApp.Workbooks.Open("D:\АСПИРАНТУРА\TwoSets\Данные.xlsx")   '
открываем нужную книгу
            xlSht = xlWB.Worksheets(1) 'или  xlWB.Worksheets("Лист1")

            With xlSht
                iLastRow = .Cells(.Rows.Count, 1).End(XlDirection.xlUp).Row 'последняя
строка в столбце A
                iLastCol  =  .Cells(1,  .Columns.Count).End(XlDirection.xlToLeft).Column
'последний столбец в первой строке
                For i = 1 To iLastCol
                    iLastRoww(i)  =  .Cells(.Rows.Count,  i).End(XlDirection.xlUp).Row
'последняя строка в столбце A
                Next i
                Rng = .Range("A1", .Cells(iLastRow, iLastCol)) 'присваиваем переменной
Rng диапазон ячеек нашей таблице на листе
            End With

            Dim   MatOzh(iLastCol),   vspom(iLastCol,   iLastRow),   SrDoh(iLastCol),
Dispers(iLastCol), SKO(iLastCol), KOV(iLastCol, iLastRow) As Object

            myArray  =  Rng.Value(XlRangeValueDataType.xlRangeValueDefault)  'заполняем
массив значениями диапазона ячеек

            xlWB.Close(SaveChanges:=False) 'закрыть и сохранить изменения True/False
            xlApp.Quit()

            xlWB  =  xlApp.Workbooks.Open("D:\АСПИРАНТУРА\TwoSets\Статистика.xlsx")  '
открываем нужную книгу
```

```
            xlSht = xlWB.Worksheets(1) 'или  xlWB.Worksheets("Лист1")

            With xlSht
                iLastRowVS    =    .Cells(.Rows.Count,    1).End(XlDirection.xlUp).Row
'последняя строка в столбце A
                iLastColVS                         =                         .Cells(1,
.Columns.Count).End(XlDirection.xlToLeft).Column 'последний столбец в первой строке
                Rng   =   .Range("A1",   .Cells(iLastRowVS,   iLastColVS))   'присваиваем
переменной Rng диапазон ячеек нашей таблице на листе
            End With

            myArray  =  Rng.Value(XlRangeValueDataType.xlRangeValueDefault)  'заполняем
массив значениями диапазона ячеек

            Nom(1) = Val(TextBox8.Text)
            Nom(2) = Val(TextBox9.Text)
            Nom(3) = Val(TextBox10.Text)
            Nom(4) = Val(TextBox11.Text)
            Nom(5) = Val(TextBox12.Text)
            Nom(6) = Val(TextBox13.Text)
            Nom(7) = Val(TextBox14.Text)
            Nom(8) = Val(TextBox15.Text)

            a = 0
            For k = 1 To 8
                If Nom(k) > 0 Then
                    j(a + 1) = Nom(k)
                    a = a + 1
                End If
            Next k

            VsegoBymag = a

            If VsegoBymag > iLastCol Then
                MessageBox.Show("Недостаточно   статистических   данных!",   "Ошибка",
MessageBoxButtons.OK, MessageBoxIcon.Error)
                Exit Sub
            End If

            If (VsegoBymag = 2 Or VsegoBymag = 3 Or VsegoBymag = 4) Then
                str = str & "Выбранно " & VsegoBymag & " ценные бумаги" & vbCrLf
            Else
                str = str & "Выбранно " & VsegoBymag & " ценных бумаг" & vbCrLf
            End If

            j(0) = 0
            For i = 1 To VsegoBymag
                MatOzh(i) = myArray(j(i), 1)
                SrDoh(i) = myArray(j(i), 2)
                Dispers(i) = myArray(j(i), 3)
                SKO(i) = myArray(j(i), 4)

                dan = dan & "Математическое ожидание доходности " & i & "й выбранной
бумаги" & " = " & Math.Round(SrDoh(i) * 1000) / 1000 & vbCrLf
                dan  =  dan  &  "Дисперсия  "  &  i  &  "й  выбранной  бумаги"  &  "  =  "  &
Math.Round(Dispers(i) * 1000) / 1000 & vbCrLf
                dan  =  dan  &  "СКО  "  &  i  &  "й  выбранной  бумаги"  &  "  =  "  &
Math.Round(SKO(i) * 1000) / 1000 & vbCrLf

            Next i

            For i = 1 To VsegoBymag
                For m = 1 To VsegoBymag
                    KOV(m, i) = myArray(j(m), 4 + j(i))
```

```
                    dan = dan & "Ковариация между бумагами " & m & " и" & i & " = " &
Math.Round(KOV(m, i) * 1000) / 1000 & vbCrLf
                Next m
            Next i


            xlWB.Close(SaveChanges:=False) 'закрыть и сохранить изменения True/False
            xlApp.Quit()

            'освобождаем память от объектов
            ReleaseObject(xlSht)
            ReleaseObject(xlWB)
            ReleaseObject(xlApp)
            GC.Collect()

            ZZ = TextBox32.Text

            Ris = 0
            Q = 0
            o = 0
            u = -1000
            ProgressBar1.Value = 0

            If VsegoBymag = 2 Then
                GoTo 2
            End If
            If VsegoBymag = 3 Then
                GoTo 3
            End If
            If VsegoBymag = 4 Then
                GoTo 4
            End If
            If VsegoBymag = 5 Then
                GoTo 5
            End If
            If VsegoBymag = 6 Then
                GoTo 6
            End If
            If VsegoBymag = 7 Then
                GoTo 7
            End If
            If VsegoBymag = 8 Then
                GoTo 8
            End If

2:          For v = 0 To 1 Step 0.001
                l = 1 - v
                x(1) = v
                x(2) = l
                f = 0
                aa = 0
                For i = 1 To VsegoBymag
                    For p = 1 To VsegoBymag
                        aa = aa + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
                    Next p
                    f = f + x(i) * SrDoh(i)
                Next i

                If aa >= (ZZ - 0.0005) And aa <= (ZZ + 0.0005) And (f >= u) Then
                    u = f
                    Q = f
                    Ris = aa
                    For i = 1 To VsegoBymag
                        iks(i) = x(i)
```

```
            Next i
            o = o + 1
        End If
        ProgressBar1.Value = v * 100
    Next v

    GoTo finish

3:  For v = 0 To 1 Step 0.001
        For l = 0 To 1 - v Step 0.001
            t = 1 - v - l
            x(1) = v
            x(2) = l
            x(3) = t
            f = 0
            aa = 0
            For i = 1 To VsegoBymag
                For p = 1 To VsegoBymag
                    aa = aa + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
                Next p
                f = f + x(i) * SrDoh(i)
            Next i

            If aa >= (ZZ - 0.0005) And aa <= (ZZ + 0.0005) And (f >= u) Then
                u = f
                Q = f
                Ris = aa
                For i = 1 To VsegoBymag
                    iks(i) = x(i)
                Next i
                o = o + 1
            End If
        Next l
        ProgressBar1.Value = v * 100
    Next v

    GoTo finish

4:

    For v = 0 To 1 Step 0.01
        For l = 0 To 1 - v Step 0.01
            For t = 1 To 1 - v - l Step 0.01
                a = 1 - v - l - t
                x(1) = v
                x(2) = l
                x(3) = t
                x(4) = a
                f = 0
                aa = 0
                For i = 1 To VsegoBymag
                    For p = 1 To VsegoBymag
                        aa = aa + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
                    Next p
                    f = f + x(i) * SrDoh(i)
                Next i

                If aa >= (ZZ - 0.0005) And aa <= (ZZ + 0.0005) And (f >= u)
Then
                    u = f
                    Q = f
                    Ris = aa
                    For i = 1 To VsegoBymag
                        iks(i) = x(i)
                    Next i
```

```
                        o = o + 1
                    End If
                Next t
            Next l
            ProgressBar1.Value = v * 100
        Next v

        GoTo finish

5:
        For v = 0 To 1 Step 0.01
            For l = 0 To 1 - v Step 0.01
                For t = 0 To 1 - v - l Step 0.01
                    For a = 0 To 1 - v - l - t Step 0.01
                        b = 1 - v - l - t - a
                        x(1) = v
                        x(2) = l
                        x(3) = t
                        x(4) = a
                        x(5) = b
                        f = 0
                        aa = 0
                        For i = 1 To VsegoBymag
                            For p = 1 To VsegoBymag
                                aa = aa + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
                            Next p
                            f = f + x(i) * SrDoh(i)
                        Next i

                        If aa >= (ZZ - 0.0005) And aa <= (ZZ + 0.0005) And (f >=
u) Then
                            u = f
                            Q = f
                            Ris = aa
                            For i = 1 To VsegoBymag
                                iks(i) = x(i)
                            Next i
                            o = o + 1
                        End If
                    Next a
                Next t
            Next l
            ProgressBar1.Value = v * 100
        Next v

        GoTo finish

6:
        For v = 1 To 0 Step -0.01
            For l = 1 - v To 0 Step -0.01
                For t = 0 To 1 - v - l Step 0.01
                    For a = 0 To 1 - v - l - t Step 0.01
                        For b = 0 To 1 - v - l - t - a Step 0.01
                            c = 1 - v - l - t - a - b
                            x(1) = v
                            x(2) = l
                            x(3) = t
                            x(4) = a
                            x(5) = b
                            x(6) = c
                            f = 0
                            aa = 0
                            For i = 1 To VsegoBymag
                                For p = 1 To VsegoBymag
```

```
                        aa = aa + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
                    Next p
                    f = f + x(i) * SrDoh(i)
                Next i

                If aa >= (ZZ - 0.0005) And aa <= (ZZ + 0.0005) And (f
>= u) Then
                    u = f
                    Q = f
                    Ris = aa
                    For i = 1 To VsegoBymag
                        iks(i) = x(i)
                    Next i
                    o = o + 1
                End If
            Next b
        Next a
    Next t
Next l
ProgressBar1.Value = v * 100
Next v

GoTo finish

7:      For v = 1 To 0 Step -0.01
    For l = 1 - v To 0 Step -0.01
        For t = 0 To 1 - v - l Step 0.01
            For a = 0 To 1 - v - l - t Step 0.01
                For b = 0 To 1 - v - l - t - a Step 0.01
                    For c = 0 To 1 - v - l - t - a - b Step 0.01
                        d = 1 - v - l - t - a - b - c
                        x(1) = v
                        x(2) = l
                        x(3) = t
                        x(4) = a
                        x(5) = b
                        x(6) = c
                        x(7) = d
                        f = 0
                        aa = 0
                        For i = 1 To VsegoBymag
                            For p = 1 To VsegoBymag
                                aa = aa + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
                            Next p
                            f = f + x(i) * SrDoh(i)
                        Next i

                        If aa >= (ZZ - 0.0005) And aa <= (ZZ + 0.0005) And
(f >= u) Then
                            u = f
                            Q = f
                            Ris = aa
                            For i = 1 To VsegoBymag
                                iks(i) = x(i)
                            Next i
                            o = o + 1
                        End If
                    Next c
                Next b
            Next a
        Next t
    Next l
    ProgressBar1.Value = v * 100
Next v
```

```vb
                GoTo finish

        8:
                For v = 1 To 0 Step -0.01
                    For l = 1 - v To 0 Step -0.01
                        For t = 0 To 1 - v - l Step 0.01
                            For a = 0 To 1 - v - l - t Step 0.01
                                For b = 0 To 1 - v - l - t - a Step 0.01
                                    For c = 0 To 1 - v - l - t - a - b Step 0.01
                                        For d = 0 To 1 - v - l - t - a - b - c Step 0.01
                                            g = 1 - v - l - t - a - b - c - d
                                            x(1) = v
                                            x(2) = l
                                            x(3) = t
                                            x(4) = a
                                            x(5) = b
                                            x(6) = c
                                            x(7) = d
                                            x(8) = g
                                            f = 0
                                            aa = 0
                                            For i = 1 To VsegoBymag
                                                For p = 1 To VsegoBymag
                                                    aa = aa + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
                                                Next p
                                                f = f + x(i) * SrDoh(i)
                                            Next i

                                            If aa >= (ZZ - 0.0005) And aa <= (ZZ + 0.0005)
And (f >= u) Then
                                                u = f
                                                Q = f
                                                Ris = aa
                                                For i = 1 To VsegoBymag
                                                    iks(i) = x(i)
                                                Next i
                                                o = o + 1
                                            End If
                                        Next d
                                    Next c
                                Next b
                            Next a
                        Next t
                    Next l
                    ProgressBar1.Value = v * 100
                Next v

                GoTo finish

        finish:
                If o <> 0 Then
                    For i = 1 To VsegoBymag
                        str = str & "  x" & i & "=" & Math.Round(iks(i), 3)
                    Next i
                    str  =  str  &  vbCrLf  &  "  Мат.  ожидание  доходности  портфеля="  &
Math.Round(Q  *  1000)  /  1000  &  "%"  &  vbCrLf  &  "  СКО  портфеля"  &  Math.Round(1000  *
Math.Sqrt(Ris)) / 1000 & "%" & vbCrLf
                Else : str = str & "Нет набора для такой дисперсии" & vbCrLf
                End If
                TextBox31.Text = str
            End Sub
```

```
        Private  Sub  Button13_Click(ByVal  sender  As  System.Object,  ByVal  e  As
System.EventArgs) Handles Button13.Click
            TextBox5.Text = ""
        End Sub

        Private  Sub  Button10_Click(ByVal  sender  As  System.Object,  ByVal  e  As
System.EventArgs) Handles Button10.Click
            Dim xlApp As Application = New Application 'создаём приложение Excel
            Dim xlWB As Workbook, xlSht As Worksheet, Rng As Range
            Dim  myArray(,),  iLastRowVS,  iLastColVS,  VsegoBymag,  f,  Q,  x(8),  u  As
Object
            Dim iLastRoww(100) As Integer
            Dim str As String
            Dim i, j(8), m, o, g, Nom(8) As Integer
            Dim v, l, t, a, b, c, d, aa, iks(8), Ris As Object
            str = ""

            xlWB    =    xlApp.Workbooks.Open("D:\АСПИРАНТУРА\TwoSets\Данные.xlsx")    '
открываем нужную книгу
            xlSht = xlWB.Worksheets(1) 'или  xlWB.Worksheets("Лист1")

            With xlSht
                iLastRow = .Cells(.Rows.Count, 1).End(XlDirection.xlUp).Row 'последняя
строка в столбце А
                iLastCol  =  .Cells(1,  .Columns.Count).End(XlDirection.xlToLeft).Column
'последний столбец в первой строке
                For i = 1 To iLastCol
                    iLastRoww(i)   =   .Cells(.Rows.Count,   i).End(XlDirection.xlUp).Row
'последняя строка в столбце А
                Next i
                Rng = .Range("A1", .Cells(iLastRow, iLastCol)) 'присваиваем переменной
Rng диапазон ячеек нашей таблице на листе
            End With

            Dim   MatOzh(iLastCol),   vspom(iLastCol,   iLastRow),   SrDoh(iLastCol),
Dispers(iLastCol), SKO(iLastCol), KOV(iLastCol, iLastRow) As Object

            myArray  =  Rng.Value(XlRangeValueDataType.xlRangeValueDefault)  'заполняем
массив значениями диапазона ячеек

            xlWB.Close(SaveChanges:=False) 'закрыть и сохранить изменения True/False
            xlApp.Quit()

            xlWB   =   xlApp.Workbooks.Open("D:\АСПИРАНТУРА\TwoSets\Статистика.xlsx")   '
открываем нужную книгу
            xlSht = xlWB.Worksheets(1) 'или  xlWB.Worksheets("Лист1")

            With xlSht
                iLastRowVS     =     .Cells(.Rows.Count,     1).End(XlDirection.xlUp).Row
'последняя строка в столбце А
                iLastColVS                          =                          .Cells(1,
.Columns.Count).End(XlDirection.xlToLeft).Column 'последний столбец в первой строке
                Rng   =   .Range("A1",   .Cells(iLastRowVS,   iLastColVS))   'присваиваем
переменной Rng диапазон ячеек нашей таблице на листе
            End With

            myArray  =  Rng.Value(XlRangeValueDataType.xlRangeValueDefault)  'заполняем
массив значениями диапазона ячеек

            Nom(1) = Val(TextBox8.Text)
            Nom(2) = Val(TextBox9.Text)
            Nom(3) = Val(TextBox10.Text)
            Nom(4) = Val(TextBox11.Text)
            Nom(5) = Val(TextBox12.Text)
```

```
            Nom(6) = Val(TextBox13.Text)
            Nom(7) = Val(TextBox14.Text)
            Nom(8) = Val(TextBox15.Text)

            a = 0
            For k = 1 To 8
                If Nom(k) > 0 Then
                    j(a + 1) = Nom(k)
                    a = a + 1
                End If
            Next k

            VsegoBymag = a

            If VsegoBymag > iLastCol Then
                MessageBox.Show("Недостаточно  статистических  данных!",  "Ошибка",
MessageBoxButtons.OK, MessageBoxIcon.Error)
                Exit Sub
            End If

            If (VsegoBymag = 2 Or VsegoBymag = 3 Or VsegoBymag = 4) Then
                str = str & "Выбранно " & VsegoBymag & " ценные бумаги" & vbCrLf
            Else
                str = str & "Выбранно " & VsegoBymag & " ценных бумаг" & vbCrLf
            End If

            j(0) = 0
            For i = 1 To VsegoBymag
                MatOzh(i) = myArray(j(i), 1)
                SrDoh(i) = myArray(j(i), 2)
                Dispers(i) = myArray(j(i), 3)
                SKO(i) = myArray(j(i), 4)
                For m = 1 To VsegoBymag
                    KOV(m, i) = myArray(j(m), 4 + j(i))
                Next m
            Next i

            xlWB.Close(SaveChanges:=False) 'закрыть и сохранить изменения True/False
            xlApp.Quit()

            'освобождаем память от объектов
            ReleaseObject(xlSht)
            ReleaseObject(xlWB)
            ReleaseObject(xlApp)
            GC.Collect()


            For i = 0 To VsegoBymag
                x(i) = 0
            Next i

            Q = 0
            o = 0
            Ris = 0
            u = Math.Pow(10, 6)
            ProgressBar1.Value = 0

            If VsegoBymag = 2 Then
                GoTo 2
            End If
            If VsegoBymag = 3 Then
                GoTo 3
            End If
            If VsegoBymag = 4 Then
```

```
            GoTo 4
        End If
        If VsegoBymag = 5 Then
            GoTo 5
        End If
        If VsegoBymag = 6 Then
            GoTo 6
        End If
        If VsegoBymag = 7 Then
            GoTo 7
        End If
        If VsegoBymag = 8 Then
            GoTo 8
        End If

2:      For v = 0 To 1 Step 0.001
            l = 1 - v
            x(1) = v
            x(2) = l
            f = 0
            aa = 0
            For i = 1 To VsegoBymag
                For p = 1 To VsegoBymag
                    f = f + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
                Next p
                aa = aa + x(i) * SrDoh(i)
            Next i
            f = Math.Sqrt(f) / (aa)
            If (f <= u) Then
                u = f
                Q = aa
                Ris = f * aa
                For i = 1 To VsegoBymag
                    iks(i) = x(i)
                Next i
                o = o + 1
            End If
            ProgressBar1.Value = v * 100
        Next v

        GoTo finish

3:      For v = 0 To 1 Step 0.001
            For l = 0 To 1 - v Step 0.001
                t = 1 - v - l
                x(1) = v
                x(2) = l
                x(3) = t
                f = 0
                aa = 0
                For i = 1 To VsegoBymag
                    For p = 1 To VsegoBymag
                        f = f + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
                    Next p
                    aa = aa + x(i) * SrDoh(i)
                Next i
                f = Math.Sqrt(f) / (aa)
                If (f <= u) Then
                    u = f
                    Q = aa
                    Ris = f * aa
                    For i = 1 To VsegoBymag
                        iks(i) = x(i)
                    Next i
```

```
                    o = o + 1
                End If

            Next l
            ProgressBar1.Value = v * 100
        Next v

        GoTo finish

4:
        For v = 0 To 1 Step 0.01
            For l = 0 To 1 - v Step 0.01
                For t = 0 To 1 - v - l Step 0.01
                    a = 1 - v - l - t
                    x(1) = v
                    x(2) = l
                    x(3) = t
                    x(4) = a
                    f = 0
                    aa = 0
                    For i = 1 To VsegoBymag
                        For p = 1 To VsegoBymag
                            f = f + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
                        Next p
                        aa = aa + x(i) * SrDoh(i)
                    Next i
                    f = Math.Sqrt(f) / (aa)
                    If (f <= u) Then
                        u = f
                        Q = aa
                        Ris = f * aa
                        For i = 1 To VsegoBymag
                            iks(i) = x(i)
                        Next i
                        o = o + 1
                    End If
                Next t
            Next l
            ProgressBar1.Value = v * 100
        Next v

        GoTo finish

5:
        For v = 0 To 1 Step 0.01
            For l = 0 To 1 - v Step 0.01
                For t = 0 To 1 - v - l Step 0.01
                    For a = 0 To 1 - v - l - t Step 0.01
                        b = 1 - v - l - t - a
                        x(1) = v
                        x(2) = l
                        x(3) = t
                        x(4) = a
                        x(5) = b
                        f = 0
                        aa = 0
                        For i = 1 To VsegoBymag
                            For p = 1 To VsegoBymag
                                f = f + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
                            Next p
                            aa = aa + x(i) * SrDoh(i)
                        Next i
                        f = Math.Sqrt(f) / (aa)
                        If (f <= u) Then
```

```
                            u = f
                            Q = aa
                            Ris = f * aa
                            For i = 1 To VsegoBymag
                                iks(i) = x(i)
                            Next i
                            o = o + 1
                        End If
                    Next a
                Next t
            Next l
            ProgressBar1.Value = v * 100
        Next v

        GoTo finish
6:
        For v = 1 To 0 Step -0.01
            For l = 1 - v To 0 Step -0.01
                For t = 0 To 1 - v - l Step 0.01
                    For a = 0 To 1 - v - l - t Step 0.01
                        For b = 0 To 1 - v - l - t - a Step 0.01
                            c = 1 - v - l - t - a - b
                            x(1) = v
                            x(2) = l
                            x(3) = t
                            x(4) = a
                            x(5) = b
                            x(6) = c
                            f = 0
                            aa = 0
                            For i = 1 To VsegoBymag
                                For p = 1 To VsegoBymag
                                    f = f + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
                                Next p
                                aa = aa + x(i) * SrDoh(i)
                            Next i
                            f = Math.Sqrt(f) / (aa)
                            If (f <= u) Then
                                u = f
                                Q = aa
                                Ris = f * aa
                                For i = 1 To VsegoBymag
                                    iks(i) = x(i)
                                Next i
                                o = o + 1
                            End If
                        Next b
                    Next a
                Next t
            Next l
            ProgressBar1.Value = v * 100
        Next v

        GoTo finish

7:      For v = 1 To 0 Step -0.01
            For l = 1 - v To 0 Step -0.01
                For t = 0 To 1 - v - l Step 0.01
                    For a = 0 To 1 - v - l - t Step 0.01
                        For b = 0 To 1 - v - l - t - a Step 0.01
                            For c = 0 To 1 - v - l - t - a - b Step 0.01
                                d = 1 - v - l - t - a - b - c
                                x(1) = v
                                x(2) = l
```

```
                            x(3) = t
                            x(4) = a
                            x(5) = b
                            x(6) = c
                            x(7) = d
                            f = 0
                            aa = 0
                            For i = 1 To VsegoBymag
                                For p = 1 To VsegoBymag
                                    f = f + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
                                Next p
                                aa = aa + x(i) * SrDoh(i)
                            Next i
                            f = Math.Sqrt(f) / (aa)
                            If (f <= u) Then
                                u = f
                                Q = aa
                                Ris = f * aa
                                For i = 1 To VsegoBymag
                                    iks(i) = x(i)
                                Next i
                                o = o + 1
                            End If
                        Next c
                    Next b
                Next a
            Next t
        Next l
        ProgressBar1.Value = v * 100
    Next v

    GoTo finish

8:
    For v = 1 To 0 Step -0.01
        For l = 1 - v To 0 Step -0.01
            For t = 0 To 1 - v - l Step 0.01
                For a = 0 To 1 - v - l - t Step 0.01
                    For b = 0 To 1 - v - l - t - a Step 0.01
                        For c = 0 To 1 - v - l - t - a - b Step 0.01
                            For d = 0 To 1 - v - l - t - a - b - c Step 0.01
                                g = 1 - v - l - t - a - b - c - d

                                x(1) = v
                                x(2) = l
                                x(3) = t
                                x(4) = a
                                x(5) = b
                                x(6) = c
                                x(7) = d
                                x(8) = g
                                f = 0
                                aa = 0
                                For i = 1 To VsegoBymag
                                    For p = 1 To VsegoBymag
                                        f = f + x(i) * x(p) * KOV(i, p)
                                    Next p
                                    aa = aa + x(i) * SrDoh(i)
                                Next i
                                f = Math.Sqrt(f) / (aa)
                                If (f <= u) Then
                                    u = f
                                    Q = aa
                                    Ris = f * aa
```

```
                                                    For i = 1 To VsegoBymag
                                                        iks(i) = x(i)
                                                    Next i
                                                    o = o + 1
                                                End If
                                            Next d
                                        Next c
                                    Next b
                                Next a
                            Next t
                        Next l
                        ProgressBar1.Value = v * 100
                    Next v

                    GoTo finish

        finish:
                    If o <> 0 Then
                        For i = 1 To VsegoBymag
                            str = str & "  x" & i & "=" & Math.Round(iks(i), 3)
                        Next i
                        str  =  str  &  vbCrLf  &  "  Мат.  ожидание  доходности  портфеля="  &
Math.Round(Q * 1000) / 1000 & "%" & vbCrLf & " СКО портфеля" & Math.Round(1000 * Ris) /
1000 & "%" & vbCrLf
                    Else : str = str & "Нет набора для такой желаемой доходности" & vbCrLf
                    End If
                    TextBox5.Text = str

                End Sub

                Private  Sub  Button14_Click(ByVal  sender  As  System.Object,  ByVal  e  As
System.EventArgs) Handles Button14.Click
                    TextBox33.Text = ""
                End Sub

                Private  Sub  Button15_Click(ByVal  sender  As  System.Object,  ByVal  e  As
System.EventArgs) Handles Button15.Click
                    Dim xlApp As Application = New Application 'создаём приложение Excel
                    Dim xlWB As Workbook, xlSht As Worksheet, Rng As Range
                    Dim  myArray(,),  iLastRowVS,  iLastColVS,  VsegoBymag,  f,  Q,  x(8),  u  As
Object
                    Dim iLastRoww(100) As Integer
                    Dim str As String
                    Dim i, j(8), m, o, g, Nom(8) As Integer
                    Dim v, l, t, a, b, c, d, zz, aa, iks(8), Ris, y(8), znam, funk As Object
                    str = ""

                    xlWB    =    xlApp.Workbooks.Open("D:\АСПИРАНТУРА\TwoSets\Данные.xlsx")    '
открываем нужную книгу
                    xlSht = xlWB.Worksheets(1) 'или  xlWB.Worksheets("Лист1")

                    With xlSht
                        iLastRow = .Cells(.Rows.Count, 1).End(XlDirection.xlUp).Row 'последняя
строка в столбце А
                        iLastCol  =  .Cells(1,  .Columns.Count).End(XlDirection.xlToLeft).Column
'последний столбец в первой строке
                        For i = 1 To iLastCol
                            iLastRoww(i)  =  .Cells(.Rows.Count,  i).End(XlDirection.xlUp).Row
'последняя строка в столбце А
                        Next i
                        Rng = .Range("A1", .Cells(iLastRow, iLastCol)) 'присваиваем переменной
Rng диапазон ячеек нашей таблице на листе
                    End With
```

```
        Dim    MatOzh(iLastCol),    vspom(iLastCol,    iLastRow),    SrDoh(iLastCol), Dispers(iLastCol), SKO(iLastCol), KOV(iLastCol, iLastRow) As Object

        myArray  =  Rng.Value(XlRangeValueDataType.xlRangeValueDefault)  'заполняем массив значениями диапазона ячеек

        xlWB.Close(SaveChanges:=False) 'закрыть и сохранить изменения True/False
        xlApp.Quit()

        xlWB  =  xlApp.Workbooks.Open("D:\АСПИРАНТУРА\TwoSets\Статистика.xlsx")  ' открываем нужную книгу
        xlSht = xlWB.Worksheets(1) 'или  xlWB.Worksheets("Лист1")

        With xlSht
            iLastRowVS    =    .Cells(.Rows.Count,    1).End(XlDirection.xlUp).Row 'последняя строка в столбце A
            iLastColVS                    =                    .Cells(1, .Columns.Count).End(XlDirection.xlToLeft).Column 'последний столбец в первой строке
            Rng   =   .Range("A1",   .Cells(iLastRowVS,   iLastColVS))   'присваиваем переменной Rng диапазон ячеек нашей таблице на листе
        End With

        myArray  =  Rng.Value(XlRangeValueDataType.xlRangeValueDefault)  'заполняем массив значениями диапазона ячеек

        Nom(1) = Val(TextBox8.Text)
        Nom(2) = Val(TextBox9.Text)
        Nom(3) = Val(TextBox10.Text)
        Nom(4) = Val(TextBox11.Text)
        Nom(5) = Val(TextBox12.Text)
        Nom(6) = Val(TextBox13.Text)
        Nom(7) = Val(TextBox14.Text)
        Nom(8) = Val(TextBox15.Text)

        a = 0
        For k = 1 To 8
            If Nom(k) > 0 Then
                j(a + 1) = Nom(k)
                a = a + 1
            End If
        Next k

        VsegoBymag = a

        If VsegoBymag > iLastCol Then
            MessageBox.Show("Недостаточно   статистических   данных!",   "Ошибка", MessageBoxButtons.OK, MessageBoxIcon.Error)
            Exit Sub
        End If

        If (VsegoBymag = 2 Or VsegoBymag = 3 Or VsegoBymag = 4) Then
            str = str & "Выбранно " & VsegoBymag & " ценные бумаги" & vbCrLf
        Else
            str = str & "Выбранно " & VsegoBymag & " ценных бумаг" & vbCrLf
        End If

        j(0) = 0
        For i = 1 To VsegoBymag
            MatOzh(i) = myArray(j(i), 1)
            SrDoh(i) = myArray(j(i), 2)
            Dispers(i) = myArray(j(i), 3)
            SKO(i) = myArray(j(i), 4)
            For m = 1 To VsegoBymag
                KOV(m, i) = myArray(j(m), 4 + j(i))
```

```
            Next m
        Next i

        xlWB.Close(SaveChanges:=False) 'закрыть и сохранить изменения True/False
        xlApp.Quit()

        'освобождаем память от объектов
        ReleaseObject(xlSht)
        ReleaseObject(xlWB)
        ReleaseObject(xlApp)
        GC.Collect()

        For i = 0 To VsegoBymag
            x(i) = 0
        Next i

        Q = 0
        o = 0
        Ris = 0
        u = Math.Pow(10, 8)
        ProgressBar1.Value = 0
        zz = TextBox34.Text
        If VsegoBymag = 2 Then
            GoTo 2
        End If
        If VsegoBymag = 3 Then
            GoTo 3
        End If
        If VsegoBymag = 4 Then
            GoTo 4
        End If
        If VsegoBymag = 5 Then
            GoTo 5
        End If
        If VsegoBymag = 6 Then
            GoTo 6
        End If
        If VsegoBymag = 7 Then
            GoTo 7
        End If
        If VsegoBymag = 8 Then
            GoTo 8
        End If

2:      For v = 0 To 10 Step 0.001
            For l = 0 To 10 Step 0.001
                y(1) = v
                y(2) = l
                f = 0
                aa = 0
                For i = 1 To VsegoBymag
                    For p = 1 To VsegoBymag
                        f = f + y(i) * y(p) * KOV(i, p)
                    Next p
                    aa = aa + y(i) * SrDoh(i) - zz * y(i)
                Next i
                If aa >= (1 - 0.00001) And aa <= (1 + 0.00001) And (f <= u) Then
                    u = f
                    For i = 1 To VsegoBymag
                        x(i) = y(i)
                    Next i
                    o = o + 1
                End If
            Next l
```

```
            ProgressBar1.Value = v * 10
        Next v

        znam = 0
        funk = 0
        For i = 1 To VsegoBymag
            znam = znam + x(i)
        Next i

        For i = 1 To VsegoBymag
            iks(i) = x(i) / znam
            Q = Q + iks(i) * SrDoh(i)
        Next i

        For i = 1 To VsegoBymag
            For p = 1 To VsegoBymag
                funk = funk + iks(i) * iks(p) * KOV(i, p)
            Next p
        Next i
        Ris = Math.Sqrt(funk)

3:      For v = 0 To 10 Step 0.001
            For l = 0 To 10 Step 0.001
                For t = 0 To 10 Step 0.001
                    y(1) = v
                    y(2) = l
                    y(3) = t
                    f = 0
                    aa = 0
                    For i = 1 To VsegoBymag
                        For p = 1 To VsegoBymag
                            f = f + y(i) * y(p) * KOV(i, p)
                        Next p
                        aa = aa + y(i) * SrDoh(i) - zz * y(i)
                    Next i
                    If aa >= (1 - 0.00001) And aa <= (1 + 0.00001) And (f <= u)
Then
                        u = f
                        For i = 1 To VsegoBymag
                            x(i) = y(i)
                        Next i
                        o = o + 1
                    End If
                Next t
            Next l
            ProgressBar1.Value = v * 10
        Next v

        znam = 0
        funk = 0
        For i = 1 To VsegoBymag
            znam = znam + x(i)
        Next i

        For i = 1 To VsegoBymag
            iks(i) = x(i) / znam
            Q = Q + iks(i) * SrDoh(i)
        Next i

        For i = 1 To VsegoBymag
            For p = 1 To VsegoBymag
                funk = funk + iks(i) * iks(p) * KOV(i, p)
            Next p
        Next i
```

```
                Ris = Math.Sqrt(funk)

                GoTo finish

        4:
                For v = 0 To 10 Step 0.001
                    For l = 0 To 10 Step 0.001
                        For t = 0 To 10 Step 0.001
                            For a = 0 To 10 Step 0.001
                                y(1) = v
                                y(2) = l
                                y(3) = t
                                y(4) = a
                                f = 0
                                aa = 0
                                For i = 1 To VsegoBymag
                                    For p = 1 To VsegoBymag
                                        f = f + y(i) * y(p) * KOV(i, p)
                                    Next p
                                    aa = aa + y(i) * SrDoh(i) - zz * y(i)
                                Next i
                                If aa >= (1 - 0.00001) And aa <= (1 + 0.00001) And (f <=
u) Then

                                    u = f
                                    For i = 1 To VsegoBymag
                                        x(i) = y(i)
                                    Next i
                                    o = o + 1
                                End If
                            Next a
                        Next t
                    Next l
                    ProgressBar1.Value = v * 10
                Next v

                znam = 0
                funk = 0
                For i = 1 To VsegoBymag
                    znam = znam + x(i)
                Next i

                For i = 1 To VsegoBymag
                    iks(i) = x(i) / znam
                    Q = Q + iks(i) * SrDoh(i)
                Next i

                For i = 1 To VsegoBymag
                    For p = 1 To VsegoBymag
                        funk = funk + iks(i) * iks(p) * KOV(i, p)
                    Next p
                Next i
                Ris = Math.Sqrt(funk)

                GoTo finish

        5:
                For v = 0 To 10 Step 0.001
                    For l = 0 To 10 Step 0.001
                        For t = 0 To 10 Step 0.001
                            For a = 0 To 10 Step 0.001
                                For b = 0 To 10 Step 0.001
                                    y(1) = v
                                    y(2) = l
                                    y(3) = t
```

```
                                    y(4) = a
                                    y(5) = b
                                    f = 0
                                    aa = 0
                                    For i = 1 To VsegoBymag
                                        For p = 1 To VsegoBymag
                                            f = f + y(i) * y(p) * KOV(i, p)
                                        Next p
                                        aa = aa + y(i) * SrDoh(i) - zz * y(i)
                                    Next i
                                    If aa >= (1 - 0.00001) And aa <= (1 + 0.00001) And (f
<= u) Then
                                        u = f
                                        For i = 1 To VsegoBymag
                                            x(i) = y(i)
                                        Next i
                                        o = o + 1
                                    End If
                                Next b
                            Next a
                        Next t
                    Next l
                    ProgressBar1.Value = v * 10
                Next v

                znam = 0
                funk = 0
                For i = 1 To VsegoBymag
                    znam = znam + x(i)
                Next i

                For i = 1 To VsegoBymag
                    iks(i) = x(i) / znam
                    Q = Q + iks(i) * SrDoh(i)
                Next i

                For i = 1 To VsegoBymag
                    For p = 1 To VsegoBymag
                        funk = funk + iks(i) * iks(p) * KOV(i, p)
                    Next p
                Next i
                Ris = Math.Sqrt(funk)

                GoTo finish
6:
                For v = 0 To 10 Step 0.001
                    For l = 0 To 10 Step 0.001
                        For t = 0 To 10 Step 0.001
                            For a = 0 To 10 Step 0.001
                                For b = 0 To 10 Step 0.001
                                    For c = 0 To 10 Step 0.001
                                        y(1) = v
                                        y(2) = l
                                        y(3) = t
                                        y(4) = a
                                        y(5) = b
                                        y(6) = c
                                        f = 0
                                        aa = 0
                                        For i = 1 To VsegoBymag
                                            For p = 1 To VsegoBymag
                                                f = f + y(i) * y(p) * KOV(i, p)
                                            Next p
                                            aa = aa + y(i) * SrDoh(i) - zz * y(i)
```

```
                                        Next i
                                        If aa >= (1 - 0.00001) And aa <= (1 + 0.00001) And
(f <= u) Then
                                            u = f
                                            For i = 1 To VsegoBymag
                                                x(i) = y(i)
                                            Next i
                                            o = o + 1
                                        End If
                                    Next c
                                Next b
                            Next a
                        Next t
                    Next l
                    ProgressBar1.Value = v * 10
                Next v

                znam = 0
                funk = 0
                For i = 1 To VsegoBymag
                    znam = znam + x(i)
                Next i

                For i = 1 To VsegoBymag
                    iks(i) = x(i) / znam
                    Q = Q + iks(i) * SrDoh(i)
                Next i

                For i = 1 To VsegoBymag
                    For p = 1 To VsegoBymag
                        funk = funk + iks(i) * iks(p) * KOV(i, p)
                    Next p
                Next i
                Ris = Math.Sqrt(funk)

                GoTo finish

        7:      For v = 0 To 10 Step 0.001
                    For l = 0 To 10 Step 0.001
                        For t = 0 To 10 Step 0.001
                            For a = 0 To 10 Step 0.001
                                For b = 0 To 10 Step 0.001
                                    For c = 0 To 10 Step 0.001
                                        For d = 0 To 10 Step 0.001
                                            y(1) = v
                                            y(2) = l
                                            y(3) = t
                                            y(4) = a
                                            y(5) = b
                                            y(6) = c
                                            y(7) = d
                                            f = 0
                                            aa = 0
                                            For i = 1 To VsegoBymag
                                                For p = 1 To VsegoBymag
                                                    f = f + y(i) * y(p) * KOV(i, p)
                                                Next p
                                                aa = aa + y(i) * SrDoh(i) - zz * y(i)
                                            Next i
                                            If aa >= (1 - 0.00001) And aa <= (1 + 0.00001)
And (f <= u) Then
                                                u = f
                                                For i = 1 To VsegoBymag
                                                    x(i) = y(i)
```

```
                                        Next i
                                        o = o + 1
                                    End If
                                Next d
                            Next c
                        Next b
                    Next a
                Next t
            Next l
            ProgressBar1.Value = v * 10
        Next v

        znam = 0
        funk = 0
        For i = 1 To VsegoBymag
            znam = znam + x(i)
        Next i

        For i = 1 To VsegoBymag
            iks(i) = x(i) / znam
            Q = Q + iks(i) * SrDoh(i)
        Next i

        For i = 1 To VsegoBymag
            For p = 1 To VsegoBymag
                funk = funk + iks(i) * iks(p) * KOV(i, p)
            Next p
        Next i
        Ris = Math.Sqrt(funk)

        GoTo finish

8:

        For v = 0 To 10 Step 0.001
            For l = 0 To 10 Step 0.001
                For t = 0 To 10 Step 0.001
                    For a = 0 To 10 Step 0.001
                        For b = 0 To 10 Step 0.001
                            For c = 0 To 10 Step 0.001
                                For d = 0 To 10 Step 0.001
                                    For g = 0 To 10 Step 0.001
                                        y(1) = v
                                        y(2) = l
                                        y(3) = t
                                        y(4) = a
                                        y(5) = b
                                        y(6) = c
                                        y(7) = d
                                        y(8) = g
                                        f = 0
                                        aa = 0
                                        For i = 1 To VsegoBymag
                                            For p = 1 To VsegoBymag
                                                f = f + y(i) * y(p) * KOV(i, p)
                                            Next p
                                            aa = aa + y(i) * SrDoh(i) - zz * y(i)
                                        Next i
                                        If aa >= (1 - 0.00001) And aa <= (1 +
0.00001) And (f <= u) Then

                                            u = f
                                            For i = 1 To VsegoBymag
                                                x(i) = y(i)
                                            Next i
                                            o = o + 1
```

```
                                                End If
                                            Next g
                                        Next d
                                    Next c
                                Next b
                            Next a
                        Next t
                    Next l
                    ProgressBar1.Value = v * 10
                Next v

                znam = 0
                funk = 0
                For i = 1 To VsegoBymag
                    znam = znam + x(i)
                Next i

                For i = 1 To VsegoBymag
                    iks(i) = x(i) / znam
                    Q = Q + iks(i) * SrDoh(i)
                Next i

                For i = 1 To VsegoBymag
                    For p = 1 To VsegoBymag
                        funk = funk + iks(i) * iks(p) * KOV(i, p)
                    Next p
                Next i
                Ris = Math.Sqrt(funk)

                GoTo finish

        finish:
                If o <> 0 Then
                    For i = 1 To VsegoBymag
                        str = str & "  x" & i & "=" & Math.Round(iks(i), 3)
                    Next i
                    str  =  str  &  vbCrLf  &  "  Мат.  ожидание  доходности  портфеля="  &
Math.Round(Q * 1000) / 1000 & "%" & vbCrLf & " СКО портфеля" & Math.Round(1000 * Ris) /
1000 & "%" & vbCrLf
                Else : str = str & "Нет набора для такой желаемой доходности" & vbCrLf
                End If

                TextBox33.Text = str

            End Sub
        End Class
```