На правах рукописи

Мелешко Анна Константиновна

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПОМЕЧЕННЫХ СВЯЗНЫХ ГРАФОВ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ БЛОКОВ

01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном учреждении «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук»

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, профессор **Леонтьев Владимир Константинович**, доктор физико-математических наук, **Воблый Виталий Антониевич**.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор, **Зиновьев Виктор Александрович**, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение науки Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук, главный научный сотрудник. кандидат физико-математических наук, доцент, **Ревякин Александр Михайлович,** Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники»».
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Центральный экономико-математический институт Российской академии наук, Москва.

Защита диссертации состоится 15 февраля 2018 г. в 14 часов 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 002.073.05 на базе Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» по адресу: 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» и на сайте http: // www. frccsc.ru

Автореферат разослан «__» _________ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 002.073.05, д. ф.-м. н., профессор Рязанов В.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Важным разделом теории графов является теория их перечисления.

Первые работы, опубликованные в 1857 – 1889 гг., по перечислению помеченных графов принадлежат британскому ученому А. Кэли, который перечислил помеченных деревья и связанные с ними химические структуры. Эти работы лежат у истоков теории графов. Но только прогресс вычислительной техники и кибернетики во второй половине XX века обусловил интенсивное развитие всей дискретной математики и в том числе теории перечисления графов.

Перечисление графов применяют в таких областях естествознания, как статистическая физика[1] и структурная химия[2]. Результаты перечисления помеченных графов используются также для их случайной генерации и анализа эффективности алгоритмов[3].

Цикломатическим числом связного графа называется увеличенная на единицу разность между числом ребер графа и числом его вершин.

Под k-циклическим графом понимается связный граф с цикломатическим числом равным k. Деревья – это 0–циклические графы. Они перечислены Кэли в 1857 году. Но только через 100 лет в 1959 году Реньи перечислил унициклические графы[4], а в 1973 Багаев перечислил бициклические графы[5]. В 1977 году Райтом[6] была получена рекуррентная формула для числа k-циклических графов. В 1980 году Райт[7] получил асимптотику для числа таких графов, когда цикломатическое

---

[1] Leroux P. Enumerative problems inspired by Mayer's theory of cluster integrals. // Electron. J. Comb. – 2004. – Vol. 11. – № 32.

[2] Chemical application of graph theory. Ed. A. T. Balaban. // Academic Press, London a.o., 1976.

[3] Bodirsky M., Kang M. Generating outerplanar graphs uniformly at random 4. // Combinatorics, Probability and Computing. – 2006. – Vol 15. – № 3. – P. 333-343.

[4] Renyi A. On connected graphs I. // Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kȍzl. – 1959. – № 4. – P. 385-388.

[5] Багаев Г. Н. Случайные графы со степенью связности 2. //Дискретный анализ. – 1973. – № 22. – С. 3–14.

[6] Wright E. M. The number of connected sparsely edged graphs. // J. Graph Theory I. – 1977. – P. 317 – 330.

[7] Wright E. M. The number of connected sparsely edged graphs III. Asymptotic results. // J. Graph theory IV. – 1980. – P. 393-407.

число может увеличиваться с ростом числа вершин медленнее, чем корень кубический из числа вершин. В 1990 году Бендер, Кенфилд и МакКей[8] представили рекуррентное соотношение Райта[6] в виде дифференциальных уравнений и получили асимптотику в более широком диапазоне для цикломатического числа.

Граф называется *четным,* если каждая его вершина имеет четную степень. *Эйлеров граф* – это связный четный граф[9]. В 1962 году Рид[10] перечислил помеченные четные и эйлеровы графы с заданными числами вершин и ребер. В 1998 году Тазава[11] перечислил помеченные эйлеровы блоки с заданным числом вершин, им найдено нелинейное функциональное уравнение для соответствующей производящей функции. Но из результатов Рида и Тазавы неясно, как получить явные или рекуррентные формулы и асимптотику для числа эйлеровых и k-циклических блоков и графов.

В 2012 году Воблый В.А.[12] перечислил помеченные эйлеровы кактусы с заданным числом вершин. В том же году Воблым В.А.[13] были получены явные формулы для числа помеченных эйлеровых бициклических и трициклических графов и найдена соответствующая асимптотика для числа таких графов с большим числом вершин. Однако общая задача перечисления эйлеровых k-циклических графов не решена до сих пор.

Блок – это связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения[14].

---

[8] Bender E. A., Canfield E.R., McKay B.D. The asymptotic number of labeled connected graphs with a given number of vertices and edges. // Random Structures Algorithms 2. – 1990. – P. 127 – 169.

[9] Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. – М.: Мир, 1977. – 324 с.

[10] Read R.C. Euler graphs on labeled nodes. // Canad. J. Math. – 1962. – № 14. – P. 482-486.

[11] Tazawa S. Enumeration of labeled 2-connected Euler graphs. // J. Combinatorics, Information and System Sciences. 1998. – V. 23, Nos. 1-4. – P. 407-414.

[12] Воблый В.А. Перечисление помеченных эйлеровых кактусов.// Мат. XI Междунар. Семинара «Дискретная математика и ее приложения». – М.:МГУ. – 2012. – С. 275-277.

[13] Воблый В.А. Перечисление помеченных бициклических и трициклических эйлеровых графов. // Матем. Заметки. –2012. – Т. 92. – № 5. – С. 678-683.

[14] Харари Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1973. – 302 с.

Пусть C_n и B_n – числа помеченных связных графов с n вершинами, соответственно, а $C(x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{x^n}{n!}$ и $B(x)=\sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$ – их производящие функции. Известно классическое соотношение[9]:

$$lnC'(x)=B'(xC'(x)). \qquad (1)$$

Это соотношение является универсальным, оно верно также для подклассов связных графов и блоков[15]. В частности, оно выполняется для блочно-устойчивых классов графов[16]. Класс графов называется *блочно-устойчивым,* если граф принадлежит этому классу тогда и только тогда, когда каждый блок графа принадлежит этому классу[17]. Кактусы, полноблочные графы, полноблочно-кактусные графы, эйлеровы графы, геодезические графы, планарные графы – блочно-устойчивые классы графов.

Из формулы (1) в 2012 году Воблым В.А.[18] была получена формула

$$C_n=\frac{(n-1)!}{n}[x^{n-1}]\exp\big(nB'(x)\big)=\frac{(n-1)!}{n}[x^{-1}]\exp\big(nB'(x)\big)\,x^{-n}, \qquad (2)$$

где $[x^n]$ – коэффициентный оператор и $[x^{-1}]$ – оператор формального вычета[19]. Это соотношение эквивалентно (1), так как получено из (1) с помощью формулы обращения Лагранжа. Поэтому формула (2) верна не только для всего класса связных графов, но и для блочно-устойчивых классов графов.

Как следствие основной формулы (2), в 2016 году Воблый В.А.[20] получил формулу для числа помеченных связных графов с заданными количествами вершин и цикломатическим числом с помощью многочленов разбиений.

Кактусом называется связный граф, в котором нет ребер, лежащих более чем на одном простом цикле[9]. Все блоки кактуса – ребра или простые циклы

[15] Noy M. Random planar graphs and beyond. // Proceedings of the International Congress of Mathematicians. – Seoul 2014. – Vol. IV. – P. 407-431.

[16] Labelle G., Leroux P., Ducharme M.G. Graph weights arising from Mayer's theory of cluster integrals. // Seminaire Lotharingien de Combinatoire 54, 2007, Article B54m.

[17] McDiarmid C., Scott A. Random graphs from a block stable class. // Europe J. Combin. – 2016. – Vol. 58. – P. 96-106.

[18] Воблый В.А. Об одной формуле для числа помеченных связных графов. // Дискретный анализ и исследование операций. – 2012. – Т. 19. – № 4. – С. 48-59.

[19] Гульден Я., Джексон Д. Перечислительная комбинаторика.– М.: Наука, ГРФМЛ, 1981. – 504 с.

[20] Воблый В.А. О перечислении помеченных связных графов с заданными числами вершин и ребер. // Дискретный анализ и исследование операций. – 2016. – Т. 23. – № 2. – С. 5-20.

(многоугольники). Кактусы являются после деревьев следующим по простоте классом графом и находят широкое применение в различных областях математики и информатики[21, 22]. В 1950 году К. Хусими[23] перечислил помеченные кактусы и полноблочные графы. В 1956 году Форд и Уленбек перечислили помеченные кактусы с заданным распределением числа вершин по многоугольникам и нашли соответствующую асимптотику при большом числе вершин[24, 25].

Гладкий граф – это связный граф без висячих вершин[26]. Гладкий граф называется также 2-графом[27]. Помеченные гладкие k-циклические графы были перечислены в 1977 году Райтом[28]. *Геодезический граф* – это связный граф, у которого любая пара вершин связана единственной кратчайшей цепью (геодезической)[29]. Геодезические графы применяются при проектировании структуры компьютерных сетей[30]. Класс геодезических графов не был перечислен до последнего времени. В 2015 году Воблый В.А.[31] впервые перечислил планарные геодезические графы, а затем геодезические графы с малым цикломатическим числом[32].

---

[21] Fleisher L. Building chain and cactus representation of all minimum cuts from Hao-Orlin in the same asymptotic run time. // J. Algorithms. – 1999. – Vol. 33. – №. 1. – P. 51-72.

[22] Vicente R., Saad D., Kabashima Y. Error-correcting code on a cactus: a solvable modal. // Europhys. Lett. – 2000. – Vol. 51. – № 6. – P. 698-704.

[23] Husimi K. Note on Mayer's theory of cluster integrals. // J. Chem. Phys. – 1950. – Vol.18. – P. 682-684.

[24] Ford G.W., Uhlenbeck G.E. Combinatorial problems in theory graphs. III. // Proc. Nat. Acad. Sci.USA. – 1956. – Vol. 42. – P. 529-535.

[25] Ford G.W., Uhlenbeck G.E. Combinatorial problems in theory graphs. I. // Proc. Nat. Acad. Sci.USA. – 1956. – Vol. 42. – P. 13-25.

[26] Wright E.M. Enumeration of smooth labeled graphs. // Proc. of the Royal Society of Edinburgh. – 1982. – P. 205-212.

[27] M. Noy Graph Enumeration. – Ch. 6 in Handbook of Enumerative Combinatorics, Ed. M. Bona, CRC Press. – 2015. – P. 403-442.

[28] Wright E.M. The number of connected sparsely edged graphs II. Smooth graphs and blocks.// J. Graph theory. – 1977. – Vol. 175. – P. 335-349.

[29] Stemple J.G., Watkins M.E. On planar geodetic graphs. // J. Combin. Theory. – 1968. – Vol. 4. – P. 101-117.

[30] Frasser S.E. k – geodetic graphs and their application to the topological design of computer networks. // Proc. Argentinian Workshop on theoretical Computer Science 28, JAIIO-WAIT' 99 (1999). – P. 187-203.

[31] Воблый В.А. Перечисление помеченных геодезических планарных графов.// Математические заметки. – 2015. – Т. 97. – № 3. – С. 336-341.

[32] Воблый В.А. Перечисление помеченных геодезических графов с малым цикломатическим числом. // Математические заметки. – 2017. – Т. 101. – № 5. – С. 684-689.

Планарный граф – граф, который можно уложить на плоскости без пересечения ребер[14]. *Внешнепланарным графом* называется планарный граф, если его можно уложить на плоскости так, что все его вершины принадлежат одной грани[14]. В 2007 году Бодирски, Грепль и Канг [33] получили систему рекуррентных формул для числа помеченных планарных графов с заданными числами вершин и ребер. Полученные рекуррентные формулы пригодны только для компьютерных вычислений. В 2002 году Бендером, Гао и Уормалдом[34] была получена асимптотика для числа помеченных n-вершинных планарных графов, когда n стремится к бесконечности.

В 2006 году Бодирски и Канг[3] получили систему рекуррентных формул для числа помеченных внешнепланарных графов. В 2007 году Бодирски и др[35]. была получена асимптотика для числа помеченных внешнепланарных графов с большим числом вершин.

В 2016 году Воблым В. А.[36] была получена формула для числа помеченных внешнепланарных k-циклических блоков с n вершинами при $k \geq 1$ и $n \geq k+2$. Также Воблым В. А. была найдена соответствующая асимптотика для числа таких графов при фиксированном k.

Перечисление графов тесно связано с теорией случайных графов. Если в модели Эрдеша – Реньи случайных графов $G(n,p)$ вероятность появления ребра $p = \frac{1}{2}$, то имеем равномерное распределение вероятностей на множестве графов, то есть все графы равновероятны. При этом вероятность принадлежности графа к некоторому классу равна отношению числа графов из этого класса к общему числу графов. Таким образом, из решения перечислительной задачи теории графов получаются следствия о свойствах соответствующих случайных графов.

---

[33] Bodirsky M., Gopel C., Kang M. Generating labeled planar graphs uniformly at random. // Theoretical Computer Science 379. – 2007 – P. 377-386.

[34] Bender E. A., Gao Z., Wormlad N. C. The number of 2-connected labeled planar graphs. // Electron. J. Combin, 9, 2002. – № 43.

[35] Bodirsky M., Gimenez O., Kang M., Noy M. Enumeration and limit laws for series-parallel graphs. // European Journal of Combinatorics. – 2007 – Vol. 28 – Issue 8 – P. 2091-2105.

[36] Воблый В. А. Простая формула для числа помеченных внешнепланарных k – циклических блоков и их асимптотическое перечисление. // Материалы XX международного семинара “Дискретная математика и ее приложения” имени академика О. Б. Лупанова, МГУ. – 2016 – С. 285-287.

Почти все графы обладают некоторым свойством, если отношение числа графов с n вершинами, имеющих это свойство, к числу всех графов с n вершинами стремится к 1 при $n \to \infty$.

Несмотря на то, что теория перечисления графов ведет начало с 19 века, интерес к этому разделу теории графов не ослабевает до сих пор.

Цели и задачи работы. Перечисление некоторых классов помеченных связных графов с заданными свойствами блоков, нахождение для числа таких графов явных формул и соответствующей асимптотики.

Общая методика исследования. В работе использованы методы теории графов, комбинаторного анализа и теории функций комплексного переменного.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях по перечислению графов. Ряд разделов диссертации могут быть использованы в спецкурсе для аспирантов по специальности “Дискретная математика и математическая кибернетика”.

Степень достоверности и апробация результатов.

Достоверность изложенных в диссертации результатов обусловлена строгостью математических доказательств всех утверждений, а также независимой экспериментальной проверкой всех полученных формул.

Основные результаты были представлены на научных конференциях и симпозиумах:

- Международная научная конференция «Дискретная математика, теория графов и их приложения» (Минск, 2013);
- Международная научная конференция “Дискретная математика, алгебра и их приложения” (Минск, 2015);
- Международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики» (Казань, 2014, 2017);
- IX Международная конференция «Дискретная математика и теории управляющих систем» (Москва, ФГБОУ МГУ, 2015);

- International Russian-Chinese conference “Actual problems of Applied Mathematics and Physics”(Нальчик, 2015);
- Шестнадцатый симпозиум по прикладной и промышленной математике, (Сочи-Дагомыс, 2015).
- Всероссийская конференция “XV Сибирская научная школа-семинар с международным участием “Компьютерная безопасность и криптография”, SIBERCRYPT’16”, (Новосибирск, 2016).

и на научных семинарах:

- Международный научно-практический семинар «Комбинаторные конфигурации и их приложения» (Кировоград, 2013, 2015, 2016, 2017);
- X Молодежная научная школа по дискретной математике и ее приложениям. (Москва, 2015);
- XX Международный семинар «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О.Б. Лупанова, (ФБГОУ МГУ, 2016).

Также основные результаты диссертации докладывались на научных семинарах в Вычислительном центре им. А. А. Дородницына Российской академии наук (Москва, 19 сентября 2017) и в Математическом институте имени В.А. Стеклова (Москва, 26 сентября 2017).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 19 печатных работах, из которых 3 статьи в изданиях из списка, рекомендованного ВАК РФ.

Личный вклад автора в работе с соавторами. В работах, опубликованных в соавторстве с научным руководителем В.А. Воблым, вклад соискателя состоит в решении задачи, поставленной руководителем, и изложении результатов, а вклад руководителя – в постановке задачи и редактировании текста.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, который включает 87 наименований. Объем диссертации составляет 85 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследования, определяются цели и задачи работы, раскрывается научная новизна, теоретическая и практическая значимость диссертационной работы, выдвигаются основные положения, выносимые на защиту, и дается краткое содержание работы.

В **первой главе** получены явные формулы для графов с простой структурой блоков.

При получении явных формул для числа помеченных связных графов с заданной структурой блоков была применена формула (2).

В **§ 1.1. – 1.4** были получены формулы для числа помеченных кактусов с заданным числом вершин (теорема 1), кактусов без треугольников (теорема 2), гладких кактусов (теорема 3), двудольных кактусов (теорема 4).

В **§ 1.5** перечислены помеченные полноблочно-кактусные графы.

Полноблочным графом называется связный граф, у которого все блоки – полные графы. Он называется также графом Хусими или графом блоков[1]. *Полноблочно-кактусным* графом называется связный граф, у которого все блоки или полные графы, или циклы.

Теорема 5. Пусть F_n – число помеченных полноблочно-кактусных графов с n вершинами. При $n \geq 4$ верна формула

$$F_n = \frac{1}{n} P_{n-1}(n) + (n-1)! \sum_{p=1}^{\left[\frac{n-1}{3}\right]} \sum_{i=0}^{n-3p-1} \binom{n-i-2p-2}{p-1} \frac{P_i(n) n^{p-1}}{2^p p! \, i!},$$

где $P_i(x)$ – многочлен Белла одной переменной[37].

В **§ 1.6** была получена формула для k-циклических полноблочно-кактусных графов с малым цикломатическим числом.

Используя формулу, полученную Воблым В. А.[20], для числа помеченных связных графов с заданным количеством вершин и цикломатическим числом с помощью многочленов разбиений, были получены явные формулы для числа помеченных k-циклических полноблочно – кактусных графов с малым цикломатическим числом: бициклических, трициклических, тетрациклических и пентациклических полноблочно-кактусных графов (теоремы 6 – 9).

В **§ 1.7** была найдена формула для блочно-колесных графов.

[37] Carlitz L. Single variable Bell polynomials. // Collect. Math. –1962. – № 14. – P. 13-25.

Цветочно-колесный граф с m лепестками – это связный граф с одной точкой сочленения, у которого все m блоков (лепестков) – колеса, причем вершина, являющаяся осью колеса, не может быть точкой сочленения.

Теорема 10. Число $FW(n,m)$ помеченных цветочно-колесных графов с n вершинами и m лепестками при $n \geq 7$ и $m \geq 2$ равно

$$FW(n,m) = \frac{n!}{m!\,6^m} \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i} \binom{n-2m-i-2}{m-1} 2^i,$$

где $r = \min(m, n-3m-1)$.

Цветочно-колесные графы являются частным случаем полноблочно-колесных.

Колесо W_n – граф с $n \geq 4$ вершинами, который образован соединением единственной вершины со всеми вершинами $(n-1)$ – цикла[9]. Блочно- колесный граф – граф, у которого каждый блок – колесо.

Теорема 11. Для числа BF_n помеченных блочно-колесных графов с n вершинами при $n \geq 4$ верна формула

$$BF_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \frac{1}{(1-z)^{n/2}} exp\left(\frac{nz^4}{2(1-z)} - \frac{nz}{2} - \frac{nz^2}{4}\right).$$

Во **второй главе** перечислены эйлеровы графы.

В **§ 2.1 – 2.3** получены формулы для помеченных эйлеровых полноблочных графов (теорема 12), эйлеровых двудольных кактусов (теорема 13), эйлеровых полноблочно-кактусных графов (теорема 14).

В **§ 2.4** получены явные формулы для числа помеченных эйлеровых тетрациклических блоков и графов.

Включением вершины степени 2 в ребро (петлю) графа называется его (ее) подразбиение этой вершиной. Обратная операция называется *исключением* вершины степени 2 из ребра. В результате применения этой операции в графе могут появиться кратные ребра или петля. Два графа называются *гомеоморфными*, если они могут быть получены друг из друга с помощью последовательности операций включения и исключения вершин степени 2. Отношение «быть гомеоморфным» является отношением эквивалентности, оно однозначно разбивает множество рассматриваемых графов на классы эквивалентности. Эти классы называются гомеоморфными типами (*топологическими графами*). *Гомеоморфный тип* – это общий граф (допускаются петли и кратные ребра), не содержащий вершин степени 2, из которого с помощью операций включения вершин степени 2 могут быть получены все графы данного класса гомеоморфных графов[38,39,40].

В диссертации для перечисления помеченных k-циклических графов были применены формулы Райта[6] и Степанова[38].

Из 15 гомеоморфных типов тетрациклических блоков только один – эйлеров[40]. Он имеет вид треугольника с двойными ребрами.

Теорема 15. Пусть B_n – число помеченных тетрациклических эйлеровых блоков с n вершинами, тогда при $n \geq 6$ верна формула

$$B_n = \frac{n!}{5760}(n-2)(n-4)(n-5)(n^2+11n+18).$$

Из 107 гладких тетрациклических гомеоморфных графов только 7 являются эйлеровыми графами[41].

Теорема 16. При $n \geq 6$ число E_n помеченных тетрациклических эйлеровых графов с n вершинами равно

$$E_n = \frac{n!}{11520}(11n^5 - 135n^4 + 440n^3 + 510n^2 - 3556n - 720)$$

Также была получена формула для числа помеченных графов розы. *Граф розы* с k лепестками получается склеиванием в одну вершину единственных вершин каждого из k циклов. Графы розы являются кактусами, а также k-циклическими эйлеровыми графами.

Теорема 17. Пусть $R_{n,k}$ – число помеченных графов с n вершинами и k лепестками. При $n \geq 5$ и $k \geq 2$ верна формула

---

[38] Степанов В. Е. О некоторых особенностях строения случайных графа вблизи критической точки. // Теория вероятн. и ее примен. – 1987. – Т. 32. – Вып.4. – С. 633-657.

[39] Ford G.W., Uhlenbeck G.E. Combinatorial problems in theory graphs. IV. // Proc. Nat. Acad. Sci.USA. – 1957. – Vol. 43. – №1. – P. 163-165.

[40] Дмитриев Е.Ф. Перечисление отмеченных двуцветных связных графов с небольшим цикломатическим числом. – Деп. в ВИНИТИ, № 4959-85.

[41] Дмитриев Е.Ф. Перечисление графов с заданными структурными свойствами: дис. канд. физ-мат. наук: 01.01.09 / Дмитриев Евгений Федорович, Институт математики АН БССР, Минск, 1985.

$$R_{n,k} = \frac{n!}{k!\,2^k}\binom{n-k-2}{k-1}.$$

При $k = 2$ верна формула $R_{n,2} = \frac{n-4}{8}n!$, что совпадает с выражением для числа помеченных бициклических эйлеровых графов с n вершинами[13].

В **третьей главе** получены явные формулы для геодезических графов.

В **§ 3.1. – 3.2** были получены формулы для числа помеченных геодезических эйлеровых кактусов (теорема 18), геодезических полноблочно-кактусных графов (теорема 19).

В **§ 3.3** была найдена формула для числа помеченных геодезических k-циклических кактусов.

Теорема 20. Число помеченных геодезических k-циклических кактусов с n вершинами $GC(n,k)$ равно

$$GC(n,k) = \frac{(n-1)!}{n2^k k!}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-2k-1}{2}\right]}\binom{m+k-1}{k-1}\frac{n^{n-2m-k-1}}{(n-2m-2k-1)!}.$$

В **четвертой главе** перечислены планарные графы.

В **§ 4.1** получена явная формула для числа помеченных планарных полноблочно-кактусных графов (теорема 21).

В **§ 4.2** получены явные формулы для числа помеченных внешнепланарных бициклических и трициклических блоков (теоремы 22 и 24) и графов.

Теорема 23. Число $OP(n,2)$ помеченных связных внешнепланарных бициклических графов с n вершинами при $n \geq 4$ равно

$$OP(n,2) = \frac{(n-1)!}{16}\sum_{k=4}^{n}\frac{k^2(k-3)}{(n-k)!}n^{n-k}.$$

Следствие 1. Почти все помеченные внешнепланарные бициклические графы являются кактусами.

Теорема 25. Число $OP(n,3)$ помеченных связных внешнепланарных трициклических графов с n вершинами при $n \geq 5$ равно

$$OP(n,3) = \frac{(n-1)!}{5760}\sum_{k=5}^{n}\frac{k(k-3)(k-4)(4k^3+23k^2+103k-150)}{(n-k)!}n^{n-k}.$$

Следствие 2. Почти все помеченные внешнепланарные трициклические графы являются кактусами.

В **§ 4.3** была получена явная формула для числа помеченных непланарных тетрацикличесих блоков (теорема 26) и графов (теорема 27).

В **пятой главе** получена асимптотика для кактусов, эйлеровых графов и k-циклических графов.

Для получения асимптотики в **§ 5.1-5.4** была использована теорема Флажоле-Седжвика[42], которая является вариантом метода перевала.

В § **5.1** была получена асимптотика для числа помеченных кактусов без треугольников.

Теорема 28. Для числа CT_n помеченных кактусов без треугольников с n вершинами при $n \to \infty$ верна асимптотическая формула

$$F_n \sim c_1 n^{-5/2} a_1^n n!,$$

где $c_1 \approx 0.1203161248$ и $a_1 \approx 3.73649$.

Следствие 3. Почти все помеченные кактусы содержат треугольники.

В **§ 5.2** была получена асимптотика для числа помеченных эйлеровых кактусов (теорема 29).

В **§ 5.3** была получена асимптотика для числа помеченных полноблочно-кактусных графов.

Теорема 30. Для числа F_n помеченных полноблочно-кактусных графов с n вершинами при $n \to \infty$ верна асимптотическая формула

$$F_n \sim c_1 n^{-5/2} a_1^n n!,$$

где $c_1 \approx 0.1178070871,\ \ a_1 \approx 4.261224133.$

Следствие 4. Почти все полноблочно-кактусные графы не являются кактусами.

В § **5.4** была получена асимптотика для числа помеченных планарных полноблочно-кактусных графов (теорема 31).

Следствие 5. Почти все помеченные полноблочно-кактусные графы не являются планарными.

---

[42] Flajolet Ph., Sedgewick R. Analytic Combinatorics. //Cambridge University Press. – 2009. 810 p.

В **§ 5.5** была получена асимптотика для числа помеченных эйлеровых пентациклических блоков.

Из 118 гомеоморфных пентациклических блоков только 5 являются эйлеровыми блоками[43]. Используя лемму Степанова[38], была получена асимптотика для числа помеченных эйлеровых пентациклических блоков:

Теорема 32. Для числа E_n помеченных эйлеровых пентациклических блоков с n вершинами при $n \to \infty$ верна асимптотическая формула

$$E_n \sim \frac{53n^7 n!}{5806080}.$$

В **§ 5.6** была получена асимптотика для числа помеченных внешнепланарных бициклических и трициклических графов.

В § 4.2 были получены явные формулы для числа помеченных внешнепланарных бициклических и трициклических графов и найдена асимптотика для числа таких графов с большим числом вершин.

Теорема 33. При $n \to \infty$ верны асимптотические равенства

$$OP(n,2) \sim \frac{n^{n+1}}{8}, \quad OP(n,3) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{192} n^{n+5/2}.$$

ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Получены точные и асимптотические формулы для числа помеченных полноблочно-кактусных графов. Этот класс графов существенно больше класса кактусов, так как в работе доказывается, что почти все полноблочно-кактусные графы не являются кактусами. Получены явные формулы для числа помеченных кактусов: кактусов без треугольников, гладких кактусов, двудольных кактусов. Найдена асимптотика для числа помеченных кактусов без треугольников, из которой следует, что почти все помеченные кактусы содержат треугольники.
2. Получены явные формулы для числа помеченных эйлеровых полноблочных графов, эйлеровых двудольных кактусов, эйлеровых полноблочно-

[43] Heap B.R. The enumeration of homeomorphically irreducible star graphs. // Journal of mathematical physics. – 1966. – Vol. 7. № 2. – P. 1582-1587.

кактусных графов, эйлеровых тетрациклических блоков и графов. Найдена асимптотика для числа помеченных эйлеровых кактусов.

3. Перечислены внешнепланарные бициклические и трициклические графы и получена соответствующая асимптотика для числа таких графов. В частности, доказывается, что почти все помеченные внешнепланарные бициклические и трициклические графы являются кактусами. Получены явные формулы для числа помеченных геодезических эйлеровых кактусов, геодезических полноблочно-кактусных графов и геодезических k-циклических кактусов.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК

1. Воблый В.А., Мелешко А.К. Перечисление помеченных полноблочно-кактусных графов. // Дискретный анализ и исследование операций. – 2014. – Т. 21. – № 2. – С. 24-32.
2. Воблый В.А., Мелешко А.К. Перечисление помеченных эйлеровых тетрациклических графов. // Дискретный анализ и исследование операций. – 2014. – Т. 21. – № 5. – С. 17-22.
3. Воблый В.А., Мелешко А.К. Перечисление помеченных внешнепланарных бициклических и трициклических графов. // Дискретный анализ и исследование операций. 2017. – Т. 24. – № 2. – С. 18-31.

Тезисы докладов на конференциях и семинарах

4. Воблый В.А., Мелешко А.К. Новая формула для числа помеченных кактусов с заданным числом вершин. // Тез. докл. Международной науч. конфер. «Дискретная математика, теория графов и их прилож.», Минск. – 2013. – С. 9-11.
5. Воблый В.А., Мелешко А.К. Перечисление помеченных эйлеровых полноблочных графов. // Материалы XV Международного научно-практического семинара «Комбинаторные конфигурации и их приложения», Кировоград, 12-13 апреля 2013 г. – Кировоград, изд-во Эксклюзив-Система, 2013. – С. 15-18.
6. Воблый В. А., Мелешко А.К. Асимптотическое перечисление помеченных эйлеровых кактусов. // Материалы XVII Международн. конфер. «Проблемы теоретической кибернетики», Казань, 16-20 июня 2014 г. – Казань, изд-во Отечество, 2014. – С. 58-60.

7. Воблый В.А., Мелешко А.К. Перечисление помеченных тетрациклических эйлеровых блоков. // Материалы XVII Международн. конфер. «Проблемы теоретической кибернетики», Казань, 16-20 июня 2014 г. – Казань, изд-во Отечество, 2014, с. 60-62.
8. Воблый В. А., Мелешко А.К. Перечисление помеченных графов розы. // Материалы XVI Международного научно-практического семинара «Комбинаторные конфигурации и их приложения», Кировоград, 11-12 апреля 2014 г. – Кировоград, изд-во Эксклюзив-Система, 2014. – С. 27-29.
9. Мелешко А.К. Перечисление помеченных гладких кактусов. // Материалы X Молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям, Москва. – 2015. – С. 50-51.
10. Воблый В. А., Мелешко А.К. Перечисление помеченных двудольных кактусов. // IX Международн. конф. «Дискретная математика и теории управляющих систем», Москва и Подмосковье, 20-22 мая 2015 г. – Москва, изд-во ООО МАКС Пресс, 2015. – С. 56-58.
11. Воблый В.А., Мелешко А.К., Перечисление помеченных эйлеровых двудольных кактусов. // Материалы XVII Международного научно-практического семинара «Комбинаторные конфигурации и их приложения», Кировоград, 17-18 апреля 2015 г. – Кировоград, изд-во Эксклюзив-Система, 2015. – С. 23-25.
12. Мелешко А.К. Перечисление помеченных геодезических эйлеровых кактусов. // Материалы международной научной конференции "Дискретная математика, алгебра и их приложения", Минск, 14-18 сентября 2015 г. – Минск, изд-во Институт математики НАН Беларуси, 2015. – С. 120-122.
13. Мелешко А.К. Перечисление помеченных геодезических полноблочно-кактусных графов. // Материалы шестнадцатого симпозиума по прикладной и промышленной математике, Сочи-Дагомыс 27 сентября – 4 октября 2015 г. – Москва, изд-во Цифровая типография ООО Буки Веди, 2015. – С. 480-481.
14. Voblyi V.A., Meleshko A.K. Asymptotic enumeration of labeled Eulerian pentacyclic blocks. // International Russian-Chinese conference "Actual problems of Applied Mathematics and Physics", Elbrus, Kabardino-Balkarian Republic, December 14-18, 2015. – Elbrus, Kabardino-Balkarian Republic, KBSC RAS, 2015. – P. 212-214.
15. Воблый В.А., Мелешко А.К. Перечисление помеченных непланарных тетрациклических графов. // Материалы XVIII Международного научно-практического семинара «Комбинаторные конфигурации и их приложения», Кировоград, 15-16 апреля 2016 г. –Кировоград, изд-во Эксклюзив-Система, 2016. – С. 33-36.

16. Воблый В.А., Мелешко А.К. Перечисление помеченных цветочно-колесных графов. // Материалы Всероссийской конференции “XV Сибирская научная школа-семинар с международным участием “Компьютерная безопасность и криптография”, SIBERCRYPT’16”, Новосибирск, 5-10 сентября 2016 г. – Томск, изд-во Издательский Дом Томского государственного университета, 2016. – С.109-110.
17. Воблый В.А., Мелешко А.К. Перечисление помеченных планарных полноблочно-кактусных графов. // Материалы XX международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О.Б. Лупанова, Москва, 20-25 июня 2016 г. – Москва, изд-во механико-математического факультета МГУ, 2016. – С. 287-290.
18. Воблый В.А., Мелешко А.К. Перечисление помеченных геодезических k – циклических графов. // Проблемы теоретической кибернетики, Материалы XVIII международной конференции, Пенза, 19-23 июня 2017. – Москва, изд-во ООО МАКС Пресс, 2017 – С. 56-58.
19. Воблый В.А., Мелешко А.К. Перечисление помеченных кактусов без треугольников. // Материалы XIX Международного научно-практического семинара «Комбинаторные конфигурации и их приложения», Кропивницкий, 7-8 апреля 2017 г. – Кировоград, изд-во Эксклюзив-Система, 2017. – С. 17-19.