

Федеральное государственное учреждение  
«Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»  
Российской академии наук»  
(ФИЦ ИУ РАН)

На правах рукописи



Мелешко Анна Константиновна

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПОМЕЧЕННЫХ СВЯЗНЫХ ГРАФОВ С  
ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ БЛОКОВ

01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научные руководители

Леонтьев В. К.,  
д.ф.-м.н., профессор  
Воблый В.А., д.ф.-м.н.

Москва 2017

## Оглавление

<b>Введение.....</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1. Перечисление графов с простой структурой блоков.....</b>	<b>15</b>
1.1. Кактусы с заданным числом вершин .....	15
1.2. Кактусы без треугольников .....	17
1.3. Гладкие кактусы .....	18
1.4. Двудольные кактусы .....	19
1.5. Полноблоchно-кактусные графы.....	21
1.6. $k$ - циклические полноблоchно-кактусные графы .....	23
1.7. Блоchно-колесные графы.....	29
<b>Глава 2. Перечисление эйлеровых графов .....</b>	<b>33</b>
2.1. Эйлеровы полноблоchные графы.....	33
2.2. Эйлеровы двудольные кактусы .....	34
2.3. Эйлеровы полноблоchно-кактусные графы.....	36
2.4. Эйлеровы тетрациклические блоки и графы .....	38
<b>Глава 3. Перечисление геодезических графов .....</b>	<b>47</b>
3.1. Геодезические эйлеровы кактусы.....	47
3.2. Геодезические полноблоchно-кактусные графы .....	49
3.3. Геодезические $k$ - циклические кактусы .....	51
<b>Глава 4. Перечисление планарных графов .....</b>	<b>53</b>
4.1. Планарные полноблоchно-кактусные графы.....	53
4.2. Внешнепланарные бициклические и трициклические графы .....	54
4.3. Непланарные тетрациклические графы .....	60

<b>Глава 5. Асимптотическое перечисление графов.....</b>	<b>62</b>
5.1. Кактусы без треугольников .....	62
5.2. Эйлеровы кактусы .....	64
5.3. Полноблоchно-кактусные графы.....	66
5.4. Планарные полноблоchно-кактусные графы.....	67
5.5. Эйлеровы пентациклические блоки .....	69
5.6. Внешнепланарные бициклические и трициклические графы .....	70
<b>Заключение .....</b>	<b>74</b>
<b>Список литературы.....</b>	<b>76</b>

## Введение

**Актуальность темы исследования.** Важным разделом теории графов является теория их перечисления.

Первые работы, опубликованные в 1857 – 1889 гг., по перечислению помеченных графов принадлежат британскому ученому А. Кэли, который перечислил помеченных деревья и связанные с ними химические структуры. Эти работы лежат у истоков теории графов. Но только прогресс вычислительной техники и кибернетики во второй половине XX века обусловил интенсивное развитие всей дискретной математики и в том числе теории перечисления графов [25, 34].

Перечисление графов применяют в таких областях естествознания, как статистическая физика [68] и структурная химия [47]. Результаты перечисления помеченных графов используются также для их случайной генерации и анализа эффективности алгоритмов [51].

Известно, что данный граф  $G$  с  $n$  вершинами можно пометить  $\frac{n!}{|Aut(G)|}$  способами, где  $|Aut(G)|$  – порядок группы автоморфизмов графа. Во многих случаях число непомеченных графов с  $n$  вершинами асимптотически равно числу соответствующих помеченных графов, деленному на  $n!$ , то есть почти все графы являются асимметричными ( $|Aut(G)| = 1$ ). Кроме того, в статистической физике используются как раз помеченные графы [30, 31, 32]. Во всех представлениях графа в компьютере необходимо сначала пометить числами вершины графа. Поэтому при анализе эффективности алгоритмов на графах используется перечисление помеченных графов. Перечисление графов тесно связано с теорией случайных графов, в которой исследуются помеченные графы. Все это объясняет причину того, что в большинстве современных работ по перечислению графов рассматриваются помеченные графы.

*Цикломатическим числом* связного графа называется увеличенная на единицу разность между числом ребер графа и числом его вершин. Под  $k$ -циклическим графом понимается связный граф с цикломатическим числом

равным  $k$ . Деревья – это 0-циклические графы. Они перечислены Кэли в 1857 году. Но только через 100 лет в 1959 году Ренни перечислил унициклические графы [76], а в 1973 Багаев перечислил бициклические графы [1]. В 1977 году Райтом [84] была получена рекуррентная формула для числа  $C_{n,n+k}$  помеченных связных графов с  $n$  вершинами и  $n+k$  ребрами, не содержащих петель и кратных ребер:

$$2(n+k+1)C_{n,n+k+1} = 2(n(n-1)/2 - n-k)C_{n,n+k} + \sum_{s=1}^n \binom{n}{s} s(n-s) \sum_{h=-1}^{k+1} C_{s,s+h} C_{n-s,n-s+k-h}.$$

В 1980 году Райт [85] получил асимптотику для числа  $C_{n,n+k}$  при  $n \rightarrow \infty$ , когда  $k = O(n^{1/3})$ :

$$C_{n,n+k} = f_k n^{(3k-1)/2} n^n \left(1 + O(n^{-1/2})\right),$$

где  $f_0 = \frac{\pi}{8}$ ,  $f_k = \frac{\sqrt{\pi} 3^k (k-1) d_k}{2^{(5k-1)/2} \Gamma(3k/2)}$ ,  $k \geq 1$  и  $d_k$  удовлетворяет рекуррентному соотношению:

$$d_1 = d_2 = \frac{5}{36}, \quad d_{k+1} = d_k + \sum_{h=1}^{k-1} \frac{d_h d_{k-h}}{(k+1) \binom{k}{h}}, \quad k \geq 1.$$

В 1990 году Бендер, Кенфилд и МакКей [48] представили рекуррентное соотношение Райта [84] в виде дифференциальных уравнений и получили асимптотику в более широком диапазоне для цикломатического числа.

Пусть  $u(n, q)$  – число помеченных блоков с  $n$  вершинами и  $q$  ребрами, а  $S = S(Z, Y) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} u(n, q) \frac{Z^n Y^q}{n!}$  экспоненциальная производящая функция для  $u(n, q)$ . Из уравнения в частных производных для  $S$  [86]:

$$Z^2 + Z^2 \frac{\partial^2 S}{\partial Z^2} \left(1 - Z \frac{\partial^2 S}{\partial Z^2}\right)^{-1} = 2(1+Y) \frac{\partial S}{\partial Y}$$

в 1978 году Райт [86] получил рекуррентную формулу для числа помеченных  $(k+1)$ -циклических блоков  $u(n, n+k)$ .

Для перечисления помеченных гладких  $k$ -циклических графов Райт применил второй метод, ранее использованный им для помеченных связных  $k$ -циклических графов. Два графа *гомеоморфны* (имеют один гомеоморфный тип), если их можно получить из одного общего графа (допускаются петли и кратные ребра), не содержащего вершин степени 2, и, называемого гомеоморфным типом, с помощью подразбиения ребер. Задача перечисления помеченных графов с заданным гомеоморфным типом сводится к выбору меток для вершин гомеоморфного типа, а затем к распределению вершин степени 2 по ребрам и петлям гомеоморфного типа с учетом его симметрии. Таким образом, перечисляли помеченные блоки и гладкие графы Форд и Уленбек [59], Е.Ф. Дмитриев [27] и В.Е. Степанов [43].

Второй метод Райта отличается тем, что он вместо гомеоморфного типа использует *базисный граф*, который получается из гомеоморфных типа вставкой двух вершин степени 2 в каждую его петлю и по максимум одной вершине степени 2 в его кратные ребра так, чтобы из общего графа получился простой граф. Хотя число базисных графов больше числа соответствующих гомеоморфных типов, этот метод является более гибким и позволяет, в частности, перечислять внешнепланарные графы.

Пусть  $C_n$  и  $B_n$  – числа помеченных связных графов с  $n$  вершинами, соответственно, а  $C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{x^n}{n!}$  и  $B(x) = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$  – их производящие функции. Известно классическое соотношение [46, с. 20]:

$$\ln C'(x) = B'(xC'(x)). \quad (1)$$

Это соотношение является универсальным, оно верно также для подклассов связных графов и блоков [66]. В частности, оно выполняется для блочно-устойчивых классов графов [73]. Класс графов называется *блочно-устойчивым*, если граф принадлежит этому классу тогда и только тогда, когда каждый блок графа принадлежит этому классу [69]. Кактусы, полноблочные графы, полноблочно-кактусные графы, эйлеровы графы, геодезические графы, планарные графы – блочно-устойчивые классы графов.

Из формулы (1) в 2012 году Воблым В.А. была получена формула

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n} [x^{n-1}] \exp(nB'(x)) = \frac{(n-1)!}{n} [x^{-1}] \exp(nB'(x)) x^{-n}, \quad (2)$$

где  $[x^n]$  – коэффициентный оператор и  $[x^{-1}]$  – оператор формального вычета [26]. Это соотношение эквивалентно (1), так как получено из (1) с помощью формулы обращения Лагранжа. Поэтому формула (2) верна не только для всего класса связных графов, но и для блочно-устойчивых классов графов.

Как следствие основной формулы (2), в 2016 году Воблый В.А. [5] получил формулу для числа помеченных связных графов с заданными количествами вершин и цикломатическим числом с помощью многочленов разбиений.

Пусть  $S(n, k)$  – число помеченных связных графов с  $n$  вершинами и цикломатическим числом  $k$ , а  $B_k(z)$  – экспоненциальная производящая функция для числа помеченных блоков с цикломатическим числом  $k$ .

Тогда

$$S(n, k) = \frac{(n-1)!}{n 2^k k!} [z^{-1}] \exp(nz) Y_k(nB'_1(z), \dots, nk! B'_k(z)) z^{-n}, \quad (3)$$

где  $[z^{-1}]$  – оператор формального вычета [26], а  $Y_k(x_1, \dots, x_k)$  – многочлен разбиений.

Многочлены разбиений (многочлены Белла)  $Y_m(x_1, \dots, x_m)$  могут быть определены с помощью формулы [42]:

$$Y_m(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\pi(m)} \frac{m!}{k_1! \dots k_m!} \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{x_m}{m!}\right)^{k_m},$$

где суммирование проводится по всем разбиениям  $\pi(m)$  числа  $m$ :  $k_1 + 2k_2 + \dots + mk_m = m$ ,  $k_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

В 1967 году Муном [70], были представлены комбинаторные и вероятностные результаты о помеченных деревьях и сделан обзор наиболее важных методов по перечислению помеченных деревьев. Деревья также являются кактусами. Кактусы являются после деревьев следующим по простоте классом графом и находят широкое применение в различных областях математики и информатики [56, 80]. В 1950 году К. Хусими [62] перечислил

помеченные кактусы и полноблочные графы. В 1956 году Форд и Уленбек [58] перечислили помеченные кактусы  $Ca_n$  с заданным распределением числа вершин по многоугольникам:

$$Ca_n(n_2, n_3, \dots) = \frac{(n-1)! n^{k-1}}{n_2! \prod_{i \geq 3} 2^{n_i} n_i!},$$

где  $n - 1 = n_2 + 2n_3 + \dots$ ,  $n_2 + n_3 + \dots = k$  – число блоков, и нашли соответствующую асимптотику при большом числе вершин [57, 70]:

$$Ca_n \sim n! \frac{b}{2\sqrt{\pi}} a^{-n+1/2} n^{-5/2},$$

где  $b = 0.87170$  и  $a = 0.23874$ .

В 1962 году Рид [74] перечислил помеченные четные и эйлеровы графы с заданными числами вершин и ребер. Пусть  $u_n$  – число помеченных эйлеровых графов с  $n$  вершинами,  $B_n$  – число помеченных эйлеровых блоков с  $n$  вершинами,  $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \frac{x^n}{n!}$ ,  $B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$  – соответствующие производящие функции. В 1998 Тазава [79] получил соотношение  $u'(x) = \exp\{B'(xu'(x))\}$ , которое аналогично соотношению между производящими функциями помеченных связных графов и блоков.

В 2012 Воблый В.А. [2] перечислил помеченные эйлеровы кактусы  $D_n$  с заданным числом вершин:

$$D_n = (n-1)! \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{n^{k-1}}{k! 2^k} \binom{n-k-2}{k-1}.$$

В 2012 году Воблым В.А. [3] были получены явные формулы для числа помеченных эйлеровых  $n$ -вершинных бициклических  $e(n, n+1)$  и трициклических графов  $e(n, n+2)$ :  $e(n, n+1) = \frac{n-4}{8} n!$ ,  $e(n, n+2) = \frac{n!}{288} (4n^3 - 33n^2 + 53n + 84)$  и найдена соответствующая асимптотика для числа таких графов с большим числом вершин:

$$e(n, n+1) \sim \frac{n}{8} n!, \quad e(n, n+2) \sim \frac{n^3}{72} n!.$$

Однако общая задача перечисления эйлеровых  $k$ -циклических графов не решена до сих пор.

Геодезические графы применяются при проектировании структуры компьютерных сетей [60]. Класс геодезических графов не был перечислен до последнего времени. В 2015 году Воблы В.А. [6] впервые перечислил планарные геодезические графы:

$$P_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp \left( nz + \frac{nz^2}{2(1-z^2)} + \frac{n(z^3 + 2z^6)}{6(1-z)^5} \right),$$

а затем геодезические графы с малым цикломатическим числом [7].

*Планарный граф* – граф, который можно уложить на плоскости без пересечения ребер [45, с. 127]. *Внешнепланарным графом* называется планарный граф, если его можно уложить на плоскости так, что все его вершины принадлежат одной грани [45, с. 131]. В 2007 году Бодирски, Грепль и Канг [52] получили систему рекуррентных формул для числа помеченных планарных графов с заданными числами вершин и ребер. Полученные рекуррентные формулы пригодны только для компьютерных вычислений. В 2002 году Бендером, Гао и Уормалдом [49] была получена асимптотика для числа помеченных планарных графов  $B_n$ :

$$B_n \sim c_2 n^{-7/2} \gamma_2^n n!,$$

где  $\gamma_2 \approx 26.18$ .

В 2016 году [9] Воблы В. А. была получена формула для числа  $OB(n, k)$  помеченных внешнепланарных  $k$ -циклических блоков с  $n$  вершинами при  $k \geq 1$  и  $n \geq k + 2$ :

$$OB(n, k) = \frac{(n-3)! (n+k-2)!}{2(k-1)! k! (n-k-2)!}.$$

Также Воблы В. А. была найдена соответствующая асимптотика для числа таких графов при фиксированном  $k \geq 1$  и  $n \rightarrow \infty$ :

$$OB(n, k) \sim n! \frac{n^{2k-3}}{2(k-1)! k!}.$$

Перечисление графов тесно связано с теорией случайных графов [33, 41, 53, 63]. Если в модели Эрдеша – Рены случайных графов  $G(n, p)$  вероятность появления ребра  $p = \frac{1}{2}$ , то имеем равномерное распределение вероятностей на множестве графов, то есть все графы равновероятны. При этом вероятность принадлежности графа к некоторому классу равна отношению числа графов из этого класса к общему числу графов. Таким образом, из решения перечислительной задачи теории графов получаются следствия о свойствах соответствующих случайных графов.

Обозначим через  $G(n)$  множество всех помеченных простых графов с множеством вершин  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Пусть  $P$  – некоторое свойство, которым каждый отдельно взятый граф из  $G(n)$  может обладать или не обладать. Через  $GP(n)$  обозначим множество тех графов из  $G(n)$ , которые обладают свойством  $P$ . Будем говорить, что *почти все графы* (почти каждый граф) обладают свойством  $P$  [29], если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{GP(n)}{G(n)} = 1$$

и *почти нет графов, обладающих свойством  $P$* , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{GP(n)}{G(n)} = 0.$$

Следовательно, если почти все графы обладают свойством  $P$ , то почти нет графов, не обладающих свойством  $P$ . К настоящему времени получены результаты о большом количестве свойств графов в терминах “почти всех графов” [29]:

- Почти все графы связны.
- Почти все связные графы являются блоками [46].
- Группа автоморфизмов почти каждого графа совпадает с единичной группой.

Несмотря на то, что теория перечисления графов ведет начало с 19 века, интерес к этому разделу теории графов не ослабевает до сих пор.

**Цели и задачи.** Перечисление некоторых классов помеченных связных графов с заданными свойствами блоков, нахождение для них явных формул и соответствующей асимптотики.

**Научная новизна.** Все основные результаты диссертации являются новыми и ранее получены не были.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях по перечислению графов. Ряд разделов диссертации могут быть использованы в спецкурсе для аспирантов по специальности “Дискретная математика и математическая кибернетика”.

**Методология и методы исследования.** В работе использованы методы теории графов, комбинаторного анализа и теории функций комплексного переменного.

**Положения, выносимые на защиту:**

- Перечислены полноблоchно-кактусные графы и найдена соответствующая асимптотика для этих графов. Получены явные формулы для числа кактусов: кактусов с заданным числом вершин, кактусов без треугольников, гладких кактусов, двудольных кактусов. Также были получены явные формулы для числа  $k$ -циклических полноблоchно-кактусных графов и блоchно-колесных графов. Найдена асимптотика для числа кактусов без треугольников.
- Перечислены эйлеровы графы: эйлеровы полноблоchные графы, эйлеровы двудольные кактусы, эйлеровы полноблоchно-кактусные графы. Получены явные формулы для числа эйлеровых тетрациклических блоков и графов. Была получена явная формула для числа графов розы, которые являются кактусами, а также  $k$ -циклическими эйлеровыми графами. Найдена асимптотика для числа эйлеровых кактусов и эйлеровых пентациклических блоков.

- Получены явные формулы для числа геодезических графов: геодезических эйлеровых кактусов, геодезических полноблоно-кактусных графов, геодезических  $k$ -циклических кактусов.
- Перечислены внешнепланарные бициклические и трициклические графы и получена соответствующая асимптотика для числа таких графов. Были получены явные формулы для числа планарных полноблоно-кактусных графов и найдена соответствующая асимптотика для числа таких графов.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Достоверность изложенных в диссертации результатов обусловлена строгостью математических доказательств всех утверждений, а также независимой экспериментальной проверкой всех полученных формул.

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на Международной научной конференции «Дискретная математика, теория графов и их приложения» (Минск, 2013), Международной научной конференции “Дискретная математика, алгебра и их приложения” (Минск, 2015), Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Казань, 2014, 2017), IX Международной конференции «Дискретная математика и теории управляющих систем» (Москва, МГУ, 2015), International Russian-Chinese conference “Actual problems of Applied Mathematics and Physics”(Нальчик, 2015), Шестнадцатом симпозиуме по прикладной и промышленной математике, (Сочи-Дагомыс, 2015), Всероссийской конференции “XV Сибирская научная школа-семинар с международным участием “Компьютерная безопасность и криптография”, SIBERCRIPT’16”, (Новосибирск, 2016), Международном научно-практическом семинаре «Комбинаторные конфигурации и их приложения» (Кировоград, 2013, 2015, 2016, 2017), X Молодежной научной школе по дискретной математике и ее приложениям. (Москва, 2015), XX Международном семинаре «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О.Б. Лупанова, (МГУ, 2016).

Материалы, составляющие основное содержание диссертации, опубликованы в 19 печатных работах, из них 3 статьи – в изданиях,

включенных в перечень ВАК РФ [12], [15], [22], 16 – в сборниках и трудах конференций [10-11, 13-14, 16-21, 35-37, 81, 23-24].

**Личный вклад автора в работе с соавторами.** В работах, опубликованных в соавторстве с научным руководителем В.А. Вобlyм, вклад соискателя состоит в решении задачи, поставленной руководителем, и изложении результатов, а вклад руководителя – в постановке задачи и редактировании текста.

**Структура и объем диссертации.** Работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы, содержащего 87 источника. Полный объем диссертации составляет 85 страниц.

### КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Работа посвящена получению явных формул для числа помеченных связных графов с заданными свойствами блоков и соответствующих асимптотик.

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследования, определяются цели и задачи работы, раскрывается научная новизна, теоретическая и практическая значимость диссертационной работы, выдвигаются основные положения, выносимые на защиту, идается краткое содержание работы.

В главах I-IV при получении явных формул для числа помеченных связных графов с заданной структурой блоков была применена формула (2).

В **первой главе** получены явные формулы для числа помеченных графов с простой структурой блоков.

Получены явные формулы для числа помеченных кактусов с заданным числом вершин, кактусов без треугольников, гладких кактусов, двудольных кактусов и полноблоочно-кактусных графов. Также перечислены  $k$ -циклические полноблоочно-кактусные графы с малым цикломатическим числом и блочно-колесные графы.

При перечислении  $k$ -циклических полноблоочно-кактусных графов с малым цикломатическим числом была применена формула, полученная

Воблым В.А. [5], для числа помеченных связных графов с заданными количествами вершин и цикломатическим числом с помощью многочленов разбиений.

**Во второй главе** перечислены эйлеровы графы. Получены явные формулы для числа помеченных эйлеровых полноблоочных графов, эйлеровых двудольных кактусов и эйлеровых полноблоочно-кактусных графов. Для перечисления помеченных эйлеровых тетрациклических блоков и графов была применена лемма Степанова [43].

**В третьей главе** получены явные формулы для геодезических графов. Перечислены геодезические эйлеровы кактусы, геодезические полноблоочно-кактусные графы, геодезические  $k$ -циклические графы.

**В четвертой главе** перечислены планарные графы. Получены явные формулы для числа помеченных планарных полноблоочно-кактусных графов. Для перечисления помеченных внешнепланарных бициклических и трициклических графов были применены лемма Степанова [43] и формула Райта [84].

**В пятой главе** получена асимптотика для кактусов, эйлеровых графов, полноблоочно-кактусных графов и  $k$ -циклических графов. Была применена теорема Флажоле-Седжвика [55] для получения асимптотических равенств кактусов, эйлеровых графов и полноблоочно-кактусных графов. Используя лемму Степанова [43, лемма 4], была получена асимптотика для числа помеченных эйлеровых пентациклических блоков. Для получения асимптотик для внешнепланарных бициклических и трициклических графов было применено асимптотическое равенство, полученное Кнутом и Питтелем [65].

**Заключение** содержит результаты и выводы диссертации.

## Глава 1. Перечисление графов с простой структурой блоков

### 1.1. Кактусы с заданным числом вершин

*Точкой сочленения* связного графа называется его вершина, после удаления, которой вместе с инцидентными ей ребрами, граф становится несвязным [45]. *Блок* – это связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения [45, с. 41]. *Кактусом* называется связный граф, в котором нет ребер, лежащих более чем на одном простом цикле [46]. Все блоки кактуса – ребра или простые циклы (многоугольники). Перечисление кактусов используется в статистической физике [68], комбинаторной оптимизации [56] и теории кодов, исправляющих ошибки [80]. В [4] была получена формула для числа помеченных кактусов с заданным числом вершин:

$$Ca_n = \frac{n^{n-2}}{2^{n-1}} + (n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n^{k-1}}{2^k k!} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \binom{n-i-2}{k-i-1}.$$

Однако первое слагаемое в формуле не имеет ясной комбинаторной интерпретации. В предлагаемой новой формуле первое слагаемое совпадает с формулой Кэли, что естественно, так как деревья также являются кактусами.

**Теорема 1.** Пусть  $Ca_n$  – число помеченных кактусов с  $n$  вершинами. При  $n \geq 3$  верна формула

$$Ca_n = n^{n-2} + (n-1)! \sum_{r=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sum_{k=0}^{n-2r-1} \binom{n-k-r-2}{r-1} \frac{n^{k+1}}{k! r! 2^r}.$$

**Доказательство.** Пусть  $C_n$  – число помеченных связных графов с  $n$  вершинами, а  $B_n$  – число помеченных блоков с  $n$  вершинами. Введем производящую функцию:  $B(z) = \sum_{n=3}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$ .

Для доказательства теоремы воспользуемся соотношением (2), полученным В.А. Воблым в [4]:

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp(nB'(z)) = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB'(z)) z^{-n},$$

где  $[z^n]$  – коэффициентный оператор и  $[z^{-1}]$  – оператор формального вычета [26].

Обозначая через  $\bar{B}(z)$  экспоненциальную производящую функцию для числа помеченных блоков, которые являются ребром или простым циклом с  $n$  вершинами, получим

$$Ca_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(n\bar{B}'(z)) z^{-n}.$$

Так как число помеченных циклов с  $n$  вершинами равно  $(n-1)!/2$ , имеем

$$\bar{B}(z) = \frac{z^2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2} (n-1)! \frac{z^n}{n}, \quad \bar{B}'(z) = z + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{z^n}{n!} = z + \frac{z^2}{2(1-z)}.$$

Следовательно,

$$Ca_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nz) \exp\left(\frac{nz^2}{2(1-z)}\right) z^{-n}.$$

Разлагая экспоненту в степенной ряд, найдем

$$Ca_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k z^{k-n}}{k!} \left( z^{-n} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{n^r z^{2r-n}}{r! 2^r (1-z)^r} \right).$$

Используя известный ряд [42, с. 141]

$$(1-z)^{-r} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+r-1}{r-1} z^m, \quad (4)$$

имеем

$$\begin{aligned} Ca_n &= n^{n-2} + (n-1)! [z^{-1}] \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+r-1}{r-1} \frac{n^{k+r-1} z^{2r+k-n+m}}{k! r! 2^r} \\ &= n^{n-2} + (n-1)! \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-k-r-2}{r-1} \frac{n^{k+r-1}}{k! r! 2^r}. \end{aligned}$$

Учитывая, что биномиальный коэффициент обращается в нуль при  $n - k - r - 2 < r - 1$ , получим утверждение теоремы.

В [10] была допущена опечатка в формуле для числа помеченных кактусов  $Ca_n$ : был пропущен биномиальный коэффициент.

В следующей таблице представлены числа  $Ca_n$ , вычисленные с помощью формулы из теоремы.

Таблица 1.

$n$	3	4	5	6	7	8	9	10
$Ca_n$	6	76	1250	23976	521122	12657688	340147404	10029364300

## 1.2. Кактусы без треугольников

Графы без треугольников являются важным классом графов. По теореме Греща каждый планарный граф без треугольников 3-раскрашиваем.

**Теорема 2.** Пусть  $CT_n$  – число помеченных кактусов без треугольников с  $n$  вершинами. При  $n \geq 3$  верна формула

$$CT_n = n^{n-2} + (n-1)! \sum_{r=1}^{\left[\frac{n-1}{3}\right]} \sum_{k=0}^{n-3r-1} \binom{n-k-2r-2}{r-1} \frac{n^{k+r-1}}{k! r! 2^r}.$$

**Доказательство.** Пусть  $C_n$  – число помеченных связных графов с  $n$  вершинами, а  $B_n$  – число помеченных блоков с  $n$  вершинами. Введем производящую функцию:  $B(z) = \sum_{n=3}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$ .

Для доказательства теоремы используем соотношение (2), полученное В.А. Воблым в [4]:

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp(nB'(z)) = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB'(z)) z^{-n},$$

где  $[z^n]$  – коэффициентный оператор и  $[z^{-1}]$  – оператор формального вычета [26].

Обозначим через  $\bar{B}(z)$  экспоненциальную производящую функцию для числа блоков помеченных кактусов без треугольников, получим

$$CT_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(n\bar{B}'(z)) z^{-n}.$$

Так как число помеченных циклов с  $n$  вершинами равно  $(n-1)!/2$ , имеем

$$\bar{B}(z) = \frac{z^2}{2} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2} (n-1)! \frac{z^n}{n!}, \quad \bar{B}'(z) = z + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} z^n = z + \frac{1}{2} \left( \frac{z^3}{(1-z)} \right).$$

Подставив  $\bar{B}(z)$  в (2), получим

$$CT_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nz) \exp\left(\frac{nz^3}{2(1-z)}\right) z^{-n}.$$

Разлагая экспоненту в степенной ряд, найдем

$$CT_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{n^k z^k}{k!} \left( z^{-n} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{n^r z^{3r-n}}{r! 2^r (1-z)^r} \right).$$

Используя разложение в ряд (4), получим

$$\begin{aligned} CT_n &= n^{n-2} + (n-1)! \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+r-1}{r-1} \frac{n^{k+r-1}}{k! r! 2^r} z^{k+3r-n+m} = \\ &= n^{n-2} + (n-1)! \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-k-2r-2}{r-1} \frac{n^{k+r-1}}{k! r! 2^r}. \end{aligned}$$

Учитывая, что биномиальный коэффициент обращается в нуль при  $n - k - 2r - 2 < r - 1$ , получим утверждение теоремы.

В таблице 2 представлены числа  $CT_n$ , вычисленные с помощью формулы из теоремы

Таблица 2

$n$	4	5	6	7	8	9
$CT_n$	19	197	2796	49717	1060984	26471601

### 1.3. Гладкие кактусы

*Гладкий граф* – это связный граф без висячих вершин [87]. Гладкий граф также называется 2-графом [72].

**Теорема 3.** Пусть  $SG_n$  – число помеченных гладких кактусов с  $n$  вершинами, тогда при  $n \geq 3$  верна формула

$$SG_n = \sum_{m=3}^n \frac{(-1)^{n-m} n!}{(n-m)!} \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{m-2r-1} \binom{m-k-r-2}{r-1} \frac{m^{n-m+k+r-2}}{k! r! 2^r}.$$

**Доказательство.** Пусть  $V_n$  – число гладких связных графов с  $n$  помеченными вершинами, а  $C_n$  – число связных графов с  $n$  помеченными вершинами. В [8] из работы Рида [75] была получена формула

$$V_n = \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} \frac{n!}{m!(n-m)!} m^{n-m} A_m,$$

где  $A_m = C_m - m^{m-2}$ .

Подставив в  $A_m$  вместо  $C_m$  выражение для числа помеченных кактусов, полученных в теореме 1, получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

В следующей таблице представлены числа  $SG_n$ , вычисленные с помощью формулы из теоремы.

Таблица 3.

$n$	3	4	5	6	7	8	9
$SG_n$	1	3	27	330	4875	85680	1752345

#### 1.4. Двудольные кактусы

*Двудольный граф*  $G$  – это граф, множество вершин  $V$  которого можно разбить на два подмножества  $V_1$  и  $V_2$  таким образом, что каждое ребро графа  $G$  соединяет вершины из разных множеств  $V_1$  и  $V_2$  [45, с. 31].

**Теорема 4.** Пусть  $D_n$  – число помеченных двудольных кактусов с  $n$  вершинами, тогда при  $n \geq 4$  верна формула

$$D_n = n^{n-2} + (n-1)! \sum_{i=1}^{\left[\frac{n-1}{3}\right]} \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-3i-1}{2}\right]} \binom{i+j-1}{j} \frac{n^{n-2i-2j-2}}{2^i i! (n-3i-2j-1)!}.$$

**Доказательство.** По теореме Кенига граф является двудольным только тогда, когда все его простые циклы четны [45, с. 32]. Пусть  $C_n$  – число помеченных связных графов с  $n$  вершинами, а  $B_n$  – число помеченных блоков с  $n$  вершинами. Введем производящую функцию:  $B(z) = \sum_{n=3}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$ .

Для доказательства теоремы используем соотношение (2), полученное В.А. Воблым в [4]:

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp(nB'(z)) = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB'(z)) z^{-n},$$

где  $[z^n]$  – коэффициентный оператор и  $[z^{-1}]$  – оператор формального вычета [26].

Обозначим через  $B(z)$  экспоненциальную производящую функцию для числа помеченных двудольных кактусов.

Следовательно,

$$D_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB'(z)) z^{-n}.$$

Так как число циклов с  $n$  помеченными вершинами равно  $(n-1)!/2$ , получим

$$B(z) = \frac{z^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} (2n-1)! \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad B'(z) = z + \frac{z^3}{2(1-z^2)}.$$

Подставив  $B(z)$  в формулу (2), получим

$$D_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp\left(nz + \frac{nz^3}{2(1-z^2)}\right) z^{-n}.$$

Разлагая экспоненту в степенной ряд, найдем

$$D_n = n^{n-2} + \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k z^k}{k!} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n^i z^{3i-n}}{2^i i! (1-z^2)^i} \right).$$

Используя ряд (4), имеем

$$\begin{aligned} D_n &= n^{n-2} + (n-1)! [z^{-1}] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{k-1} z^k}{k!} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n^i z^{3i-n}}{2^i i!} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{i+j-1}{j} z^{2j} = \\ &= n^{n-2} + (n-1)! \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{i+j-1}{j} \frac{n^{n-2i-2j-2}}{2^i i! (n-3i-2j-1)!}. \end{aligned}$$

Учитывая, что факториал обнуляет слагаемые при  $n-3i-2j-1 < 0$ , получим утверждение теоремы.

В таблице 4 представлены числа  $D_n$ , вычисленные с помощью формулы из теоремы.

Таблица 4

$n$	3	4	5	6	7	8	9
$D_n$	3	19	185	2436	40537	815704	19261881

## 1.5. Полноблоchно-кактусные графы

*Полноблоchным графом* называется связный граф, у которого все блоки – полные графы. Он называется также графом Хусими или графом блоков [68]. *Полноблоchно-кактусным графом* называется связный граф, у которого все блоки или полные графы, или циклы. Класс полноблоchно-кактусных графов – естественное расширение классов кактусов и полноблоchных графов. Ряд задач алгоритмической теории графов, как, например, задача  $k$ -доминирования, являющихся в общем случае NP-полными задачами, могут быть решены в классе полноблоchно-кактусных графов полиномиальными алгоритмами [72].

**Теорема 5.** Пусть  $F_n$  – число помеченных полноблоchно-кактусных графов с  $n$  вершинами. При  $n \geq 4$  верна формула

$$F_n = \frac{1}{n} P_{n-1}(n) + (n-1)! \sum_{p=1}^{\left[\frac{n-1}{3}\right]} \sum_{i=0}^{n-3p-1} \binom{n-i-2p-2}{p-1} \frac{P_i(n)n^{p-1}}{2^p p! i!},$$

где  $P_i(x)$  – многочлен Белла одной переменной [54].

**Доказательство.** Множества полноблоchных графов и кактусов имеют непустое пересечение, так как деревья и кактусы, у которых все блоки – ребра или треугольники, являются одновременно полноблоchными графами и кактусами.

Пусть  $C_n$  – число помеченных связных графов с  $n$  вершинами, а  $B_n$  – число помеченных блоков с  $n$  вершинами. Введем производящую функцию:

$$B(z) = \sum_{n=3}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}.$$

Для доказательства теоремы воспользуемся соотношением (2), полученным В.А. Воблым в [4]:

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp(nB'(z)) = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB'(z)) z^{-n},$$

где  $[z^n]$  – коэффициентный оператор и  $[z^{-1}]$  – оператор формального вычета [26].

Обозначая через  $B(z)$  экспоненциальную производящую функцию для числа блоков помеченных полноблоочно-кактусных графов, имеем

$$F_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB(z)) z^{-n}.$$

Так как у полноблоочно-кактусного графа все блоки или полные графы, или циклы, а число помеченных циклов с  $n$  вершинами равно  $(n-1)!/2$ , то экспоненциальная производящая функция запишется в виде

$$\begin{aligned} B(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2} (n-1)! \frac{z^n}{n!}, \\ B'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2} z^n = e^z - 1 + \frac{z^3}{2(1-z)}. \end{aligned}$$

Подставив  $B(z)$  в формулу (2), получим

$$F_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(n(e^z - 1)) \exp\left(\frac{nz^3}{2(1-z)}\right) z^{-n}. \quad (5)$$

Многочлен Белла одной переменной определяется через числа Стирлинга 2-го рода и имеет следующую производящую функцию:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n S(n, k) x^k, \quad \exp(x(e^z - 1)) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(x) \frac{z^i}{i!}.$$

Таким образом, разлагая вторую экспоненту в степенной ряд, найдем

$$F_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \sum_{i=0}^{\infty} \frac{P_i(n)}{i!} z^i \left( 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n^p z^{3p}}{2^p (1-z)^p p!} \right) z^{-n}.$$

Используя ряд (4), получим

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{P_{n-1}(n)}{n} + (n-1)! [z^{-1}] \sum_{i=0}^{\infty} \frac{P_i(n)}{i!} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n^{p-1}}{2^p p!} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+p-1}{p-1} z^{3p+r+i-n} \\ &= \frac{P_{n-1}(n)}{n} + (n-1)! \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{P_i(n) n^{p-1}}{2^p p! i!} \binom{n-i-2p-2}{p-1}. \end{aligned}$$

Учитывая, что биномиальный коэффициент при  $p-1 > n-i-2p-2$  обращается в нуль, завершим доказательство теоремы.

Заметим, что первое слагаемое в формуле для числа помеченных полноблоочно-кактусных графов равно числу помеченных полноблоочных графов [68].

В таблице 5 представлены числа  $F_n$ , вычисленные с помощью формулы из теоремы 5.

Таблица 5

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9
$F_n$	1	4	32	383	6127	123155	2986041	84856924

### 1.6. $k$ -циклические полноблоочно-кактусные графы

**Теорема 6.** Пусть  $S(n, 2)$  – число помеченных бициклических полноблоочно-кактусных графов. Тогда при  $n \geq 5$  верна формула

$$S(n, 2) = \frac{(n-1)!}{8} \sum_{l=0}^{n-5} (l+1) \frac{n^{n-l-4}}{(n-l-5)!}.$$

**Доказательство.** Пусть  $S(n, k)$  – число помеченных связных графов с  $n$  вершинами и цикломатическим числом  $k$ , а  $B_k(z)$  – экспоненциальная производящая функция для числа помеченных блоков с цикломатическим числом  $k$ .

Для доказательства теоремы воспользуемся соотношением (3), полученным В.А. Воблым в [5]:

$$S(n, k) = \frac{(n-1)!}{n2^k k!} [z^{-1}] \exp(nz) Y_k(nB'_1(z), \dots, nk! B'_k(z)) z^{-n}$$

где  $[z^{-1}]$  – оператор формального вычета [26], а  $Y_k(x_1, \dots, x_k)$  – многочлен разбиений.

Бициклические полноблоочно-кактусные графы содержат только блоки с цикломатическим числом  $k = 1$ , тогда  $B_2 = 0$  и  $Y_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 = x_1^2$ . Число помеченных циклов с  $n$  вершинами равно  $(n-1)!/2$ , имеем

$$B_1(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} (n-1)! \frac{z^n}{n!}, \quad B'_1(z) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2} z^n = \frac{z^2}{2(1-z)}.$$

После разложения экспоненты в ряд, получим

$$\begin{aligned}
S(n, 2) &= \frac{(n-1)!}{2} [z^{-1}] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{k+1} z^k}{k!} \left( \frac{z^2}{2(1-z)} \right)^2 z^{-n} = \\
&= \frac{(n-1)!}{8} [z^{-1}] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{k+1}}{k!} \frac{z^{4+k-n}}{(1-z)^2}.
\end{aligned}$$

Используя известный ряд [42, с. 141] и формулу (3)

$$(1-w)^{-m-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{m+l}{m} w^l, \quad (6)$$

имеем

$$\begin{aligned}
S(n, 2) &= \frac{(n-1)!}{8} [z^{-1}] \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{n^{k+1}}{k!} \binom{l+1}{1} z^{4+k-n+l} \\
&= \frac{(n-1)!}{8} \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{n^{n-l-4}}{(n-l-5)!}
\end{aligned}$$

Учитывая, что биномиальный коэффициент обращается в нуль при  $n - l - 5 < 0$ , получим утверждение теоремы.

В таблице 6 представлены числа  $S(n, 2)$ , вычисленные с помощью формулы из теоремы.

Таблица 6

$n$	5	6	7	8	9	10
$S(n, 2)$	15	720	26145	893760	30793770	1098921600

**Теорема 7.** Пусть  $S(n, 3)$  – число помеченных трициклических полноблоочно-кактусных графов. Тогда при  $n \geq 4$  верна формула

$$S(n, 3) = \frac{(n-1)!}{48} \sum_{l=0}^{n-7} \frac{(l+2)!}{2! l!} \frac{n^{n-l-5}}{(n-l-7)!} + \frac{n^{n-4}}{6} (n-1)(n-2)(n-3).$$

**Доказательство.** Пусть  $S(n, k)$  – число помеченных связных графов с  $n$  вершинами и цикломатическим числом  $k$ , а  $B_k(z)$  – экспоненциальная производящая функция для числа помеченных блоков с цикломатическим числом  $k$ .

Для доказательства теоремы воспользуемся соотношением (3), полученным В.А. Воблым в [5]:

$$S(n, k) = \frac{(n-1)!}{n2^k k!} [z^{-1}] \exp(nz) Y_k(nB'_1(z), \dots, nk! B'_k(z)) z^{-n}$$

где  $[z^{-1}]$  – оператор формального вычета [26], а  $Y_k(x_1, \dots, x_k)$  – многочлен разбиений.

Трициклические полноблочно-кактусные графы не содержат блоков с цикломатическим числом  $k = 2$ . Тогда

$$\begin{aligned} B_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} (n-1)! \frac{z^n}{n!}, \quad B_2(z) = 0, \quad B_3(z) = \frac{z^4}{4!}. \\ B'_1(z) &= \frac{z^2}{2(1-z)}, \quad B'_3(z) = \frac{z^3}{6}. \end{aligned}$$

Многочлен разбиений запишется в виде  $Y_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + 3x_1x_2 + x_3 = x_1^3 + x_3$ .

Используя формулу (3) и разложение экспоненты в степенной ряд, получим

$$\begin{aligned} S(n, 3) &= \frac{(n-1)!}{6} [z^{-1}] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k z^k}{k!} \left( n^2 \left( \frac{z^2}{2(1-z)} \right)^3 + z^3 \right) z^{-n} \\ &= \frac{(n-1)!}{48} [z^{-1}] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{k+2} z^{k+6-n}}{k! (1-z)^3} + \frac{(n-1)!}{6} [z^{-1}] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k z^{k+3-n}}{k!}. \end{aligned}$$

Применив ряд (6), имеем

$$S(n, 3) = \frac{(n-1)!}{48} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+2}{2} \frac{n^{n-l-5}}{(n-l-7)!} + \frac{n^{n-4}}{6} (n-1)(n-2)(n-3).$$

Учитывая, что биномиальный коэффициент обращается в нуль при  $n - l - 7 < 0$ , получим утверждение теоремы.

В таблице 7 представлены числа  $S(n, 3)$ , вычисленные с помощью формулы из теоремы.

Таблица 7

$n$	4	5	6	7	8	9	10
$S(n, 3)$	1	20	360	7595	217280	8307684	376320000

**Теорема 8.** Пусть  $S(n, 4)$  – число помеченных тетрациклических полноблоочно-кактусных графов. Тогда при  $n \geq 6$  верна формула

$$S(n, 4) = \frac{(n-1)!}{384} \sum_{l=0}^{n-9} \frac{(l+3)!}{3! l!} \frac{n^{n-l-6}}{(n-l-9)!} + \frac{(n-1)!}{12} \sum_{m=0}^{n-6} \frac{n^{n-m-5}}{(n-m-6)!}.$$

**Доказательство.** Пусть  $S(n, k)$  – число помеченных связных графов с  $n$  вершинами и цикломатическим числом  $k$ , а  $B_k(z)$  – экспоненциальная производящая функция для числа помеченных блоков с цикломатическим числом  $k$ .

Для доказательства теоремы воспользуемся соотношением (3), полученным В.А. Воблым в [5]:

$$S(n, k) = \frac{(n-1)!}{n2^k k!} [z^{-1}] \exp(nz) Y_k(nB'_1(z), \dots, nk! B'_k(z)) z^{-n}$$

где  $[z^{-1}]$  – оператор формального вычета [26], а  $Y_k(x_1, \dots, x_k)$  – многочлен разбиений.

Тетрациклические полноблоочно-кактусные графы не содержат блоков с цикломатическими числами  $k = 2$  и  $k = 4$ . Тогда

$$\begin{aligned} B_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} (n-1)! \frac{z^n}{n!}, & B_2(z) &= 0, & B_3(z) &= \frac{z^4}{4!}, & B_4(z) &= 0 \\ B'_1(z) &= \frac{z^2}{2(1-z)}, & B'_3(z) &= \frac{z^3}{6}. \end{aligned}$$

Многочлен разбиений запишется в виде  $Y_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^4 + 6x_2x_1^2 + 4x_3x_1 + 3x_2^2 + x_4 = x_1^4 + 4x_1x_3$ .

Применив формулу (3) и разложив экспоненту в степенной ряд, имеем

$$S(n, 4) = \frac{(n-1)!}{24n} [z^{-1}] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k z^k}{k!} \left( \frac{n^4 z^8}{16(1-z)^4} + \frac{2n^2 z^5}{1-z} \right) z^{-n}.$$

Используя ряд (6), найдем

$$\begin{aligned}
S(n, 4) &= \frac{(n-1)!}{384} [z^{-1}] \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+3}{3} \frac{n^{k+3}}{k!} z^{8-n+l+k} \\
&+ \frac{(n-1)!}{12} [z^{-1}] \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n^{k+1}}{k!} z^{k+5-n+m} = \\
&= \frac{(n-1)!}{384} \sum_{l=0}^{n-9} \binom{l+3}{3} \frac{n^{n-l-6}}{(n-l-9)!} + \frac{(n-1)!}{12} \sum_{m=0}^{n-6} \frac{n^{n-m-5}}{(n-m-6)!}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что биномиальные коэффициенты обращаются в нуль при  $n-l-9 < 0$  и  $n-m-6 < 0$ , получим утверждение теоремы.

В таблице 8 представлены числа  $S(n, 4)$ , вычисленные с помощью формул из теоремы.

Таблица 8

$n$	6	7	8	9	10	11
$S(n, 4)$	60	3360	137760	5277825	208076400	8912821995

**Теорема 9.** Пусть  $S(n, 5)$  – число помеченных пентациклических полноблоочно-кактусных графов. Тогда при  $n \geq 8$  верна формула

$$\begin{aligned}
S(n, 5) &= \frac{(n-1)!}{92160} \sum_{l=0}^{n-11} \frac{(l+4)!}{l!} \frac{n^{n-l-7}}{(n-l-11)!} + \\
&+ \frac{(n-1)!}{48} \sum_{l=0}^{n-8} (l+1) \frac{n^{n-l-6}}{(n-l-8)!}.
\end{aligned}$$

**Доказательство.** Пусть  $S(n, k)$  – число помеченных связных графов с  $n$  вершинами и цикломатическим числом  $k$ , а  $B_k(z)$  – экспоненциальная производящая функция для числа помеченных блоков с цикломатическим числом  $k$ .

Для доказательства теоремы воспользуемся соотношением (3), полученным В.А. Воблым в [5]:

$$S(n, k) = \frac{(n-1)!}{n2^k k!} [z^{-1}] \exp(nz) Y_k(nB'_1(z), \dots, nk! B'_k(z)) z^{-n}$$

где  $[z^{-1}]$  – оператор формального вычета [26], а  $Y_k(x_1, \dots, x_k)$  – многочлен разбиений.

Пентациклические полноблоочно-кактусные графы не содержат блоков с цикломатическими числами  $k = 2, k = 4, k = 5$ . Тогда

$$\begin{aligned} B_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} (n-1)! \frac{z^n}{n!}, \quad B_2(z) = 0, \\ B_3(z) &= \frac{z^4}{4!}, \quad B_4(z) = 0, \quad B_5(z) = 0. \\ B'_1(z) &= \frac{z^2}{2(1-z)}, \quad B'_3(z) = \frac{z^3}{6}. \end{aligned}$$

Многочлен разбиений запишется в виде  $Y_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1^5 + 10x_2x_1^3 + 10x_3x_1^2 + 15x_2^2x_1 + 5x_4x_1 + 10x_3x_2 + x_5 = x_1^5 + 10x_3x_1^2$ .

Используя формулу (3) и разложение экспоненты в степенной ряд, имеем

$$S(n, 5) = \frac{(n-1)!}{120n} [z^{-1}] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k z^k}{k!} \left( \frac{n^5 z^{10}}{32(1-z)^5} + \frac{5n^3 z^7}{2(1-z)^2} \right) z^{-n}.$$

Применив ряд (6), получим

$$\begin{aligned} S(n, 5) &= \frac{(n-1)!}{3840} [z^{-1}] \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+4}{4} \frac{n^{k+4}}{k!} z^{10-n+l+k} \\ &\quad + \frac{(n-1)!}{48} [z^{-1}] \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+1}{1} \frac{n^{k+2}}{k!} z^{k+7-n+l} = \\ &= \frac{(n-1)!}{3840} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+4}{4} \frac{n^{k+4}}{k!} + \frac{(n-1)!}{48} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+1}{1} \frac{n^{k+2}}{k!} = \\ &= \frac{(n-1)!}{3840} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+4}{4} \frac{n^{n-l-7}}{(n-l-11)!} + \frac{(n-1)!}{48} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+1}{1} \frac{n^{n-l-6}}{(n-l-8)!} = \end{aligned}$$

Учитывая, что биномиальные коэффициенты обращаются в нуль при  $n - l - 11 < 0$  и  $n - l - 8 < 0$  получим утверждение теоремы.

В таблице 9 представлены числа  $S(n, 5)$ , вычисленные с помощью формулы из теоремы.

Таблица 9

$n$	8	9	10	11	12
$S(n, 5)$	6720	680400	46116000	2706279345	151795607040

### 1.7. Блочно-колесные графы

*Колесо*  $W_n$  – граф с  $n \geq 4$  вершинами, который образован соединением единственной вершины со всеми вершинами  $(n - 1)$  – цикла [46, с. 63]. *Цветочно-колесный граф* с  $m$  лепестками – это связный граф с одной точкой сочленения, у которого все  $m$  блоков (лепестков) – колеса, причем вершина, являющаяся осью колеса, не может быть точкой сочленения. Цветочно-колесные графы представляют топологию коммуникационных, компьютерных и других сложных сетей [51].

**Теорема 10.** Число  $FW(n, m)$  помеченных цветочно-колесных графов с  $n$  вершинами и  $m$  лепестками при  $n \geq 7$  и  $m \geq 2$  равно

$$FW(n, m) = \frac{n!}{m! 6^m} \sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n - 2m - i - 2}{m - 1} 2^i,$$

где  $r = \min(m, n - 3m - 1)$ .

**Доказательство.** Пусть  $C_m(z) = \sum_{n=4}^{\infty} FW(n, m) \frac{z^n}{n!}$ ,  $NW_n$  – число помеченных колес с  $n$  вершинами,  $RW_n$  – число помеченных корневых колес с  $n$  вершинами,  $R(z) = \sum_{n=4}^{\infty} RW_n \frac{z^n}{n!}$ .

Так как метку для оси колеса  $W_n$  можно выбрать  $n$  способами и число циклов с  $n - 1$  помеченными вершинами равно  $(n - 2)!/2$  при  $n \geq 5$ ,  $NW_4 = 1$ . Поскольку корень колеса  $W_n$  не должен быть вершиной – осью колеса, то метку для него можно выбрать  $n - 1$  способами и при  $n \geq 5$   $RW_n = (n - 1)NW_n = n!/2$ . Однако в случае  $W_4$  (полный граф) осью может быть любая вершина и  $RW_4 = nNW_4 = 4$ .

Поэтому имеем

$$R(z) = \frac{z^4}{6} + \frac{1}{2} \sum_{n=5}^{\infty} z^n = \frac{z^4}{6} + \frac{z^5}{2(1 - z)}.$$

Граф с одной точкой сочленения может рассматриваться как корневой граф с корнем в точке сочленения. Такой граф можно получить склейкой в одну вершину непомеченных корней блоков. После склейки для непомеченной вершины вводится новая метка. Снятие метки с корня соответствует операция деления соответствующей производящей функции на  $z$ , а введение метки – операция умножения производящей функции на  $z$  [64, 77]. С учетом перестановок блоков вокруг точки сочленения, получим

$$C_m(z) = \frac{z}{m!} \left( \frac{R(z)}{z} \right)^m = \frac{z}{m!} \left( \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{2(1-z)} \right)^m = \frac{z^{3m+1}(1+2z)^m}{m! 6^m (1-z)^m}.$$

С помощью бинома Ньютона и ряда (4) найдем

$$C_m(z) = \frac{z^{3m+1}}{m! 6^m} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} 2^i z^i \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+m-1}{m-1} z^k.$$

Следовательно, имеем  $FW(n, m) = n! [z^{-1}] C_m(z) z^{-n-1}$ , где  $[z^{-1}]$  – оператор формального вычета [26].

$$\begin{aligned} FW(n, m) &= \frac{n!}{m! 6^m} [z^{-1}] \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{i} \binom{k+m-1}{m-1} 2^i z^{i+k+3m-n} = \\ &= \frac{n!}{m! 6^m} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \binom{n-2m-i-2}{m-1} 2^i. \end{aligned}$$

Поскольку биномиальный коэффициент обращается в ноль при  $m < i$  и  $n - 2m - i - 2 < 0$ , верхний предел суммы равен  $r = \min(m, n - 3m - 1)$ . Доказательство закончено.

В следующей таблице представлены числа  $FW(n, m)$ , вычисленные с помощью формулы из теоремы

Таблица 10

$n$	7	8	9	10	11	12
$m$	2	2	3	3	3	3
$FW(n, m)$	70	3360	0	2800	277200	13305600

Цветочно-колесные графы являются частным случаем блочно-колесных графов. Граф  $W_4$  изоморfen полному графу  $K_4$ . Блочно- колесный граф – граф, у которого каждый блок – колесо.

**Теорема 11.** Для числа  $BF_n$  помеченных блочно-колесных графов с  $n$  вершинами при  $n \geq 4$  верна формула

$$BF_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \frac{1}{(1-z)^{n/2}} \exp\left(\frac{nz^4}{2(1-z)} - \frac{nz}{2} - \frac{nz^2}{4}\right).$$

**Доказательство.** Пусть  $C_n$  – число помеченных связных графов с  $n$  вершинами, а  $B_n$  – число помеченных блоков с  $n$  вершинами. Введем производящую функцию:  $B(z) = \sum_{n=3}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$ .

Для доказательства теоремы воспользуемся соотношением (2), полученным В.А. Воблым в [4]:

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp(nB'(z)) = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB'(z)) z^{-n},$$

где  $[z^n]$  – коэффициентный оператор и  $[z^{-1}]$  – оператор формального вычета [26].

Обозначим через  $B(z)$  экспоненциальную производящую функцию для числа помеченных блочно-колесных графов, тогда

$$BF_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB(z)) z^{-n}.$$

Рассмотрим граф колесо как единый блок. Так как число помеченных колес с  $n$  вершинами равно  $n!/2(n-1)$ , то производящая функция запишется в виде:

$$\begin{aligned} B(z) &= \frac{z^4}{4!} + \frac{1}{2} \sum_{n=5}^{\infty} \frac{z^n}{n-1}. \\ B'(z) &= -\frac{\ln(1-z)}{2} + \frac{z^4}{2(1-z)} - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{4}. \end{aligned}$$

Подставим  $B(z)$  в (2) и получим

$$BF_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp\left(-\frac{n \ln(1-z)}{2} + \frac{nz^4}{2(1-z)} - \frac{nz}{2} - \frac{nz^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \frac{1}{(1-z)^{n/2}} \exp\left(\frac{nz^4}{2(1-z)} - \frac{nz}{2} - \frac{nz^2}{4}\right).$$

Теорема доказана.

В таблице 11 представлены числа  $BF_n$ , вычисленные с помощью формулы из теоремы

*Таблица 11*

$n$	4	5	6	7	8	9	10
$BF_n$	1	15	72	490	7080	129843	1275750

## Глава 2. Перечисление эйлеровых графов

*Эйлеров граф* – это связный граф, все вершины которого имеют четную степень [46, с. 22]. В [12] доказано, что граф эйлеров тогда и только тогда, когда каждый его блок – эйлеров граф. Следовательно, класс эйлеровых графов является блочно-устойчивым классом.

### 2.1. Эйлеровы полноблочные графы

*Мостом* связного графа называется его ребро, после удаления, которого граф становится несвязным [45, с. 41]. Эйлеровы графы являются графами без мостов [2].

**Теорема 12.** Пусть  $EH_n$  – число помеченных эйлеровых полноблочных графов с  $n$  вершинами. При  $n \geq 3$  верна формула:

$$EH_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} P_i \left( \frac{n}{2} \right) P_{n-1-i} \left( \frac{n}{2} \right),$$

где  $P_i(z)$  – многочлен Белла одной переменной [54].

**Доказательство.** Пусть  $C_n$  – число помеченных связных графов с  $n$  вершинами, а  $B_n$  – число помеченных блоков с  $n$  вершинами. Введем производящую функцию:  $B(x) = \sum_{n=3}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$ .

Для доказательства теоремы воспользуемся соотношением (2), полученным В.А. Вобльм в [4]:

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n} [x^{n-1}] \exp(nB'(x)) = \frac{(n-1)!}{n} [x^{-1}] \exp(nB'(x)) x^{-n},$$

где  $[x^n]$  – коэффициентный оператор и  $[x^{-1}]$  – оператор формального вычета [26].

Обозначим через  $B(x)$  экспоненциальную производящую функцию для числа блоков помеченных эйлеровых полноблочных графов, тогда

$$EH_n = \frac{(n-1)!}{n} [x^{-1}] \exp(nB(x)) x^{-n}.$$

Так как у эйлеровых полноблочных графов не может быть блоков с четным числом вершин, имеем  $B(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ .

Продифференцировав и сделав замену  $n - 1 = k$ , получим

$$B'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh(x) - 1 = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1.$$

Подставив  $B(x)$  в (2), имеем

$$EH_n = \frac{(n-1)!}{n} [x^{-1}] \exp\left(n\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1\right)\right) x^{-n}.$$

Используя известное соотношение для многочленов Белла одной переменной, найдем

$$\begin{aligned} EH_n &= \frac{(n-1)!}{n} [x^{-1}] \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{P_k\left(\frac{n}{2}\right) P_i\left(\frac{n}{2}\right)}{k! i!} x^{k+i-n} = \\ &= \frac{(n-1)!}{n} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{P_{n-1-i}\left(\frac{n}{2}\right) P_i\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-1-i)! i!}. \end{aligned}$$

Введем биномиальный коэффициент и учтем, что предел суммирования изменяется от 0 до  $n - 1$ . Теорема доказана.

В таблице 12 представлены числа  $EH_n$ , вычисленные с помощью формулы из теоремы.

Таблица 12

$n$	3	4	5	6	7	8	9	10
$EH_n$	4	29	311	4447	79745	1722681	43578820	1264185051

## 2.2. Эйлеровы двудольные кактусы

По теореме Кенига граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его простые циклы четны [45, с. 22].

**Теорема 13.** Пусть  $BE_n$  число помеченных эйлеровых двудольных кактусов с  $n$  вершинами, тогда при  $p \geq 2$  верны формулы

$$BE_{2p} = \frac{(2p-1)!}{2p} \sum_{l=1}^{\left[\frac{p+1}{3}\right]} \frac{2p^{2l-1}}{2^{2l-1}(2l-1)!} \binom{p-l-1}{2l-2}, \quad (7)$$

$$BE_{2p+1} = (2p)! \sum_{l=1}^{\left[\frac{p}{3}\right]} \frac{(2p+1)^{2l-1}}{2^{2l}(2l)!} \binom{p-l-1}{2l-1}. \quad (8)$$

**Доказательство.** Пусть  $C_n$  – число помеченных связных графов с  $n$  вершинами, а  $B_n$  – число помеченных блоков с  $n$  вершинами. Введем производящую функцию:  $B(z) = \sum_{n=3}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$ .

Для доказательства теоремы воспользуемся соотношением (2), полученным В.А. Воблым в [4]:

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp(nB'(z)) = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB'(z)) z^{-n},$$

где  $[z^n]$  – коэффициентный оператор и  $[z^{-1}]$  – оператор формального вычета [26].

Обозначая через  $B(z)$  экспоненциальную производящую функцию для числа блоков помеченных эйлеровых двудольных кактусов, имеем

$$BE_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB(z)) z^{-n}.$$

Так как эйлеровы графы не имеют блоков, состоящих из одного ребра, а по теореме Кенига все простые циклы двудольного графа четны, то все блоки эйлеровых двудольных кактусов – циклы с четным числом вершин.

Так как число циклов с  $n$  помеченными вершинами равно  $(n-1)!/2$ , тогда

$$B(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} (2n-1)! \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad B'(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} z^{2n-1} = \frac{z^3}{2(1-z^2)}.$$

Подставив  $B(z)$  в (2), получим

$$BE_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp\left(\frac{nz^3}{2(1-z^2)}\right) z^{-n}.$$

Разлагая экспоненту в степенной ряд, найдем

$$BE_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k z^{3k-n}}{k! 2^k (1-z^2)^k}.$$

Используя ряд (4), получим

$$BE_n = (n-1)! [z^{-1}] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{2^k k!} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k-1} z^{3k-n+2m}.$$

Найдем решение уравнения  $3k - n + 2m = -1$  в целых числах.

Пусть число вершин  $n$  – четное число. Так как  $3k = 2p - 2m - 1$ , то число  $k$  нечетное. Положим  $k = 2l - 1$ , следовательно,  $6l - 3 = 2p - 2m - 1$  и  $m = p - 3l + 1$ .

Вычислив вычет функции, найдем

$$BE_{2p} = \frac{(2p-1)!}{2p} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2p^{2l-1}}{2^{2l-1}(2l-1)!} \binom{p-l-1}{2l-2}.$$

Учитывая, что биномиальный коэффициент обращается в ноль при  $p - l - 1 < 2l - 2$ , получим (7).

Пусть число вершин  $n$  нечетно. Значит  $3k = 2p + 2m$  и число  $k$  четное. Положим  $k = 2l$ , тогда  $6l = 2p + 2m$  и  $m = p - 3l$ .

Вычислив вычет функции, найдем

$$BE_{2p+1} = (2p)! \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2p+1)^{2l-1}}{2^l (2l)!} \binom{p-l-1}{2l-1}.$$

Так как биномиальный коэффициент обращается в ноль при  $p - l - 1 < 2l - 1$ , получим (8). Теорема доказана.

В следующей таблице представлены числа  $BE_n$ , вычисленные с помощью формулы из теоремы

Таблица 13

$n$	4	5	6	7	8	9	10
$BE_n$	3	0	60	630	2520	90720	937440

### 2.3. Эйлеровы полноблочно-кактусные графы

**Теорема 14.** Пусть  $EF_n$  – число помеченных эйлеровых полноблочно-кактусных графов с  $n$  вершинами. При  $n \geq 4$  верна формула

$$EF_n = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n-1}{r} P_r \left( \frac{n}{2} \right) P_{n-1-r} \left( \frac{n}{2} \right) +$$

$$+(n-1)! \sum_{l=1}^{\left[\frac{n-1}{3}\right]} \sum_{r=0}^{n-3l-1} \sum_{k=0}^{n-r-3l-1} (-1)^r \frac{P_k\left(\frac{n}{2}\right) P_r\left(\frac{n}{2}\right) n^{l-1}}{k! r! l! 2^l} \binom{n-r-k-2l-2}{l-1},$$

где  $P_i(x)$  – многочлен Белла одной переменной [54].

**Доказательство.** Первое слагаемое в формуле для  $EF_n$  равно числу помеченных эйлеровых полноблочных графов, полученных в § 2.1.

Пусть  $C_n$  – число помеченных связных графов с  $n$  вершинами, а  $B_n$  – число помеченных блоков с  $n$  вершинами. Введем производящую функцию:

$$B(z) = \sum_{n=3}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}.$$

Для доказательства теоремы воспользуемся соотношением (2), полученным В.А. Вобльм в [4]:

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp(nB'(z)) = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB'(z)) z^{-n},$$

где  $[z^n]$  – коэффициентный оператор и  $[z^{-1}]$  – оператор формального вычета [26].

Обозначим через  $B(z)$  экспоненциальную производящую функцию для числа блоков помеченных эйлеровых полноблочно-кактусных графов, тогда

$$EF_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB(z)) z^{-n}.$$

У эйлеровых полноблочно-кактусных графов нет блоков, состоящих из одного ребра [2], а все блоки-полные графы имеют нечетное число вершин, так как в эйлеровом графе все вершины имеют четную степень, получим

$$\begin{aligned} B(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2} (n-1)! \frac{z^n}{n!}, \\ B'(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} z^k = chz - 1 + \frac{z^3}{2(1-z)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$EF_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp\left(n\left(chz - 1 + \frac{z^3}{2(1-z)}\right)\right) z^{-n},$$

$$EF_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp\left(n \frac{e^z - 1}{2}\right) \exp\left(n \frac{e^{-z} - 1}{2}\right) \exp\left(\frac{nz^3}{2(1-z)}\right) z^{-n}.$$

Применяя производящую функцию для многочленов Белла одной переменной и разлагая третью экспоненту в степенной ряд, найдем

$$EF_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k\left(\frac{n}{2}\right)}{k!} z^k \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{P_r\left(\frac{n}{2}\right)}{r!} z^r \sum_{l=0}^{\infty} \frac{n^l z^{3l}}{2^l (1-z)^l l!} z^{-n}.$$

Воспользовавшись (4), получим

$$\begin{aligned} EF_n &= \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n-1}{r} P_{n-r-1}\left(\frac{n}{2}\right) P_r\left(\frac{n}{2}\right) + \\ &+ \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^r \frac{P_k\left(\frac{n}{2}\right) P_r\left(\frac{n}{2}\right) n^l}{k! r! l! 2^l} \binom{p+l-1}{l-1} z^{k+3l+r-n+p} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} P_{n-1-r}\left(\frac{n}{2}\right) P_r\left(\frac{n}{2}\right) + \\ &+ (n-1)! \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^r \frac{P_k\left(\frac{n}{2}\right) P_r\left(\frac{n}{2}\right) n^{l-1}}{k! r! l! 2^l} \binom{n-k-r-2l-2}{l-1}. \end{aligned}$$

Учитывая, что биномиальный коэффициент при  $l-1 > n-k-r-2l-2$  обращается в нуль, получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

В таблице 14 представлены числа  $EF_n$ , вычисленные с помощью формулы из теоремы.

Таблица 14

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9
$EF_n$	0	1	3	28	240	3091	43680	756883

## 2.4. Эйлеровы тетрациклические блоки и графы

Под тетрациклическим графом понимается связный граф с цикломатическим числом равным 4.

Включением вершины степени 2 в ребро (петлю) графа называется его (ее) подразбиение этой вершиной. Обратная операция называется исключением

вершины степени 2 из ребра. В результате применения этой операции в графе могут появиться кратные ребра или петля. Два графа называются гомеоморфными, если они могут быть получены друг из друга с помощью последовательности операций включения и исключения вершин степени 2. Отношение «быть гомеоморфным» является отношением эквивалентности, оно однозначно разбивает множество рассматриваемых графов на классы эквивалентности. Эти классы называются гомеоморфными типами (топологическими графиками). Гомеоморфный тип – это общий граф (допускаются петли и кратные ребра), не содержащий вершин степени 2, из которого с помощью операций включения вершин степени 2 могут быть получены все графы данного класса гомеоморфных графов [43, 27, 59].

**Лемма 1** [Степанов, 43]. Пусть гомеоморфный тип  $H$  – связный гладкий общий граф, отличный от изолированной вершины или петли, который имеет  $a$  вершин,  $b$  ребер (включая петли),  $b_0$  петель,  $b_i$  пучков ребер кратности  $i$ , и пусть  $A(H)$  – порядок вершинно-реберной группы автоморфизмов графа  $H$ . Тогда число помеченных графов с  $n$  вершинами и гомеоморфным типом  $H$  равно

$$C_n = \frac{n!}{2^{b_0} A(H)} \text{Coef}_{x^{n-a}} \frac{x^{b+b_0-\sum_{i=1}^b b_i} \prod_{i=1}^b (x + i(1-x))^{b_i}}{(1-x)^b}.$$

Пусть  $G$  – базисный граф, т.е. связный гладкий граф, полученный из гомеоморфного типа  $H$  включением двух вершин степени 2 в каждую петлю, а также максимум по одной вершине степени 2 в кратные ребра  $H$  так, чтобы из общего графа получился простой граф. Назовем специальными вершинами вершины степени больше 2 в  $G$  и специальными цепями – простые цепи, у которых концевые вершины являются специальными вершинами, а все внутренние вершины, если они есть, имеют степень 2.

**Лемма 2** [Райт, 84]. Пусть  $a$  – число специальных цепей в базисном графе  $G$ , полученных из петли ( $\alpha$ -цепей),  $b$  – число специальных цепей, состоящих из

одного ребра, при условии, что две специальные вершины соединены только одной специальной цепью ( $\beta$ -цепей),  $c$  – число специальных цепей, имеющих внутреннюю вершину степени 2 ( $\gamma$ -цепей). Пусть, кроме того,  $r$  – число специальных вершин в  $G$ , а  $g$  – его число симметрии, т.е. порядок вершинной группы автоморфизмов. Тогда число помеченных графов с  $n$  вершинами, гомеоморфных графу  $G$ , равно

$$C_n = \frac{n!}{g} \binom{n-r-a+b-1}{a+b+c-1}$$

**Теорема 15.** Пусть  $B_n$  – число помеченных тетрациклических эйлеровых блоков с  $n$  вершинами, тогда при  $n \geq 6$  верна формула

$$B_n = \frac{n!}{5760} (n-2)(n-4)(n-5)(n^2 + 11n + 18).$$

**Доказательство.** Из 17 гомеоморфных типов тетрациклических блоков только один – эйлеров [61]. Он имеет вид треугольника с двойными ребрами.

Тогда в силу леммы 1 и известного ряда (6) для нашего типа имеем  $a = 3, b = 6, b_0 = b_1 = 0, b_2 = 3, b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0, A(H) = 48$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{n!}{48} \text{Coef}_{x^{n-3}} \frac{x^3(x+2(1-x))^3}{(1-x)^6} = \\ &= \frac{n!}{48} \text{Coef}_{x^{n-3}} \left( \frac{x^3}{(1-x)^3} + 3 \frac{x^3}{(1-x)^4} + 3 \frac{x^3}{(1-x)^5} + \frac{x^3}{(1-x)^6} \right) \\ &= \frac{n!}{48} \text{Coef}_{x^{n-3}} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^{k+3} + 3 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^{k+3} + 3 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{4} x^{k+3} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+5}{5} x^{k+3} \right) = \frac{n!}{48} \left( \binom{n-4}{2} + 3 \binom{n-3}{3} + 3 \binom{n-2}{4} + \binom{n-1}{5} \right) = \\ &= \frac{n!}{5760} (n-2)(n-4)(n-5)(n^2 + 11n + 18). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В следующей таблице представлены числа  $B_n$ , вычисленные с помощью формулы из теоремы.

Таблица 15

$n$	6	7	8	9	10
$B_n$	120	3780	85680	1746360	34473600

**Следствие 1.** При равномерном распределении вероятностей, вероятность  $P_n$  того, что помеченный связный эйлеров тетрациклический граф с  $n$  вершинами является блоком, равна  $\frac{2}{11}$ .

**Доказательство.** В [15] была получена асимптотика для числа помеченных тетрациклических эйлеровых графов:

$$E_n \sim \frac{11n^5}{11520} n!.$$

В [14] было получено асимптотическое равенство для числа помеченных тетрациклических эйлеровых блоков:

$$B_n \sim \frac{n^5}{5760} n!.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{E_n} = \frac{n^5 n!}{5760} \frac{11520}{11 n^5 n!} = \frac{2}{11}.$$

Следствие доказано.

Граф розы с  $k$  лепестками получается склеиванием в одну вершину единственных вершин каждого из  $k$  циклов. Такой граф называется еще графом  $k$ -розы [82, 83]. Графы розы являются кактусами, а также  $k$ -циклическими эйлеровыми графами. Частным случаем графов розы является ромашка-граф, где каждый цикл – треугольник [38]. Графы розы называются также обобщенными графиками дружбы [71].

**Теорема 16.** Пусть  $R_{n,k}$  – число помеченных графов розы с  $n$  вершинами и  $k$  лепестками. При  $n \geq 5$  и  $k \geq 2$  верна формула

$$R_{n,k} = \frac{n!}{k! 2^k} \binom{n-k-2}{k-1}.$$

**Доказательство.** Введем производящую функцию для чисел  $R_{n,k}$ :

$$R_k(w) = \sum_{n=3}^{\infty} R_{n,k} \frac{w^n}{n!}.$$

Графы розы являются графами с одной точкой сочленения, у которых каждый блок является простым циклом. Пусть  $B_n$  – число помеченных блоков с  $n$  вершинами, а  $B_{n,k}$  – число помеченных графов с  $n$  вершинами и  $k$  блоками, инцидентными единственной точке сочленения. В работе Джина [64] была получена производящая функция для числа помеченных графов с  $n$  вершинами, одной точкой сочленения и  $k$  блоками:

$$B_k(w) = \sum_{n=3}^{\infty} B_{n,k} \frac{w^n}{n!} = w \frac{(B'(w))^k}{k!}, \text{ где } B(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n w^n}{n!}.$$

Поскольку все блоки – простые циклы, а число помеченных простых циклов с  $n$  вершинами равно  $\frac{(n-1)!}{2}$ , имеем

$$B(w) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2} (n-1)! \frac{w^n}{n!}, \quad B'(w) = \frac{w^2}{2(1-w)}, \quad R_k(w) = \frac{w^{2k+1}}{k! 2^k (1-w)^k}.$$

Используя разложение в ряд (4), получим

$$R_k(w) = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k-1} \frac{w^{r+2k+1}}{k! 2^k}.$$

Заменив  $r + 2k + 1 = n$ , найдем

$$R_k(w) = \sum_{n=2k+1}^{\infty} \binom{n-k-2}{k-1} \frac{w^n}{k! 2^k}.$$

Окончательно, имеем

$$R_{n,k} = \frac{n!}{k! 2^k} \binom{n-k-2}{k-1},$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что при  $k = 2$  получим  $R_{n,2} = \frac{n-4}{8} n!$ , что совпадает с выражением для числа помеченных бициклических эйлеровых графов с  $n$  вершинами, найденными в работе [3].

В таблице 16 представлены числа  $R_{n,k}$ , вычисленные с помощью формулы из теоремы.

Таблица 16

$n$	5	6	7	8	9	10
$k$	2	2	2	3	3	3
$R_{n,k}$	15	180	1890	2520	45360	756000

**Теорема 17.** При  $n \geq 6$  число  $E_n$  помеченных тетрациклических эйлеровых графов с  $n$  вершинами равно

$$E_n = \frac{n!}{11520} (11n^5 - 135n^4 + 440n^3 + 510n^2 - 3556n - 720).$$

**Доказательство.** Граф является эйлеровым только тогда, когда его гомеоморфный тип – эйлеров граф. Гладкие тетрациклические графы, не являющиеся блоками, могут содержать только унициклические, бициклические или трициклические блоки. Число таких графов в списке Дмитриева [28] равно  $105-15=90$ . Добавляя 17 тетрациклических блоков из списка Хипа [61], получим, что существует 107 гладких тетрациклических графов. Из 107 гладких тетрациклических гомеоморфных графов только 7 являются эйлеровыми графиками. Эти типы графов представлены на рис.1.

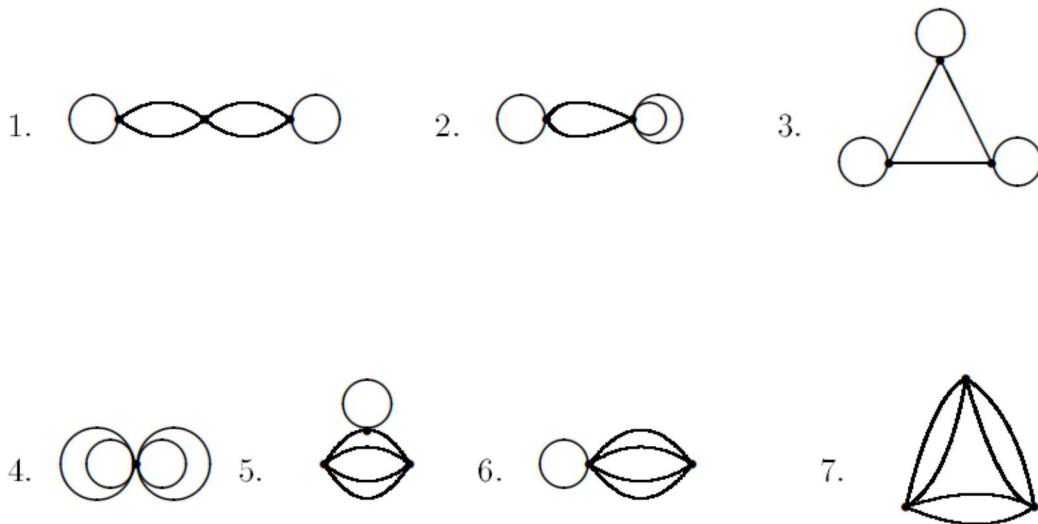


Рис. 1.

Используя лемму 1, перечислим гомеоморфные типы графов, изображенные на рис.1. Тогда в силу леммы 1, получим

$$1) \quad a = 3, b = 6, b_0 = 2, b_2 = 2, b_1 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0, A(H) = 8$$

$$C_{1,n} = \frac{n!}{32} Coef_{x^{n-3}} \frac{x^6(1+2(1-x))^2}{(1-x)^6}.$$

С помощью разложения в ряд (6) получим

$$\begin{aligned} C_{1,n} &= \frac{n!}{32} Coef_{x^{n-3}} \left( \frac{x^8}{(1-x)^6} + 4 \frac{x^7}{(1-x)^5} + 4 \frac{x^6}{(1-x)^4} \right) = \\ &\frac{n!}{32} Coef_{x^{n-3}} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+5}{5} x^{k+8} + 4 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{4} x^{k+7} + 4 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^{k+6} \right) = \\ &\frac{n!}{32} \left( \binom{n-6}{5} + 4 \binom{n-6}{4} + 4 \binom{n-6}{3} \right) = \\ &= \frac{n!}{3840} (n-6)(n-7)(n-8)(n^2+n-10). \end{aligned}$$

Аналогично, для остальных гомеоморфных типов графов найдем

$$2) \quad a = 2, b = 5, b_0 = 3, b_2 = 1, b_1 = b_3 = b_4 = b_5 = 0, A(H) = 4$$

$$\begin{aligned} C_{2,n} &= \frac{n!}{32} Coef_{x^{n-2}} \frac{x^7(x+2(1-x))}{(1-x)^5} = \frac{n!}{32} Coef_{x^{n-2}} \left( \frac{x^8}{(1-x)^5} + \frac{2x^7}{(1-x)^4} \right) = \\ &\frac{n!}{32} Coef_{x^{n-2}} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{4} x^{k+8} + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^{k+7} \right) = \\ &\frac{n!}{32} \left( \binom{n-6}{4} + 2 \binom{n-6}{3} \right) = \frac{n!}{768} (n-1)(n-6)(n-7)(n-8). \end{aligned}$$

$$3) \quad a = 3, b = 6, b_0 = 3, b_1 = 3, b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0, A(H) = 6$$

$$\begin{aligned} C_{3,n} &= \frac{n!}{48} Coef_{x^{n-3}} \frac{x^6}{(1-x)^6} = \frac{n!}{48} Coef_{x^{n-3}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+5}{5} x^{k+6} = \\ &\frac{n!}{5760} \binom{n-4}{5} = \frac{n!}{5760} (n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8). \end{aligned}$$

$$4) \quad a = 1, b = 4, b_0 = 4, b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0, A(H) = 24$$

$$\begin{aligned} C_{4,n} &= \frac{n!}{384} Coef_{x^{n-1}} \frac{x^8}{(1-x)^4} = \frac{n!}{384} Coef_{x^{n-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^{k+8} = \\ &\frac{n!}{384} \binom{n-6}{3} = \frac{n!}{2304} (n-6)(n-7)(n-8). \end{aligned}$$

$$5) \quad a = 3, b = 6, b_0 = 1, b_1 = 2, b_3 = 1, b_2 = b_4 = b_5 = b_6 = 0, A(H) = 12$$

$$C_{5,n} = \frac{n!}{24} Coef_{x^{n-3}} \frac{x^4(x+3(1-x))}{(1-x)^6} = \frac{n!}{24} Coef_{x^{n-3}} \left( \frac{x^5}{(1-x)^6} + 3 \frac{x^4}{(1-x)^5} \right) =$$

$$\frac{n!}{24} Coef_{x^{n-3}} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+5}{5} x^{k+5} + 3 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{4} x^{k+4} \right) =$$

$$\frac{n!}{24} \left( \binom{n-3}{5} + 3 \binom{n-3}{4} \right) = \frac{n!}{2880} (n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n+8).$$

6)  $a = 2, b = 5, b_0 = 1, b_4 = 1, b_1 = b_2 = b_3 = b_5 = 0, A(H) = 24$

$$C_{6,n} = \frac{n!}{48} Coef_{x^{n-2}} \frac{x^5(x+4(1-x))}{(1-x)^5} = \frac{n!}{48} Coef_{x^{n-2}} \left( \frac{x^6}{(1-x)^5} + 4 \frac{x^5}{(1-x)^4} \right) =$$

$$\frac{n!}{48} Coef_{x^{n-2}} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{4} x^{k+6} + 4 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^{k+5} \right) =$$

$$\frac{n!}{48} \left( \binom{n-4}{4} + 4 \binom{n-4}{3} \right) = \frac{n!}{1152} (n-4)(n-5)(n-6)(n+9).$$

7)  $a = 3, b = 6, b_0 = 0, b_2 = 3, b_1 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0, A(H) = 48$

$$C_{7,n} = \frac{n!}{48} Coef_{x^{n-3}} \frac{x^3(x+2(1-x))^3}{(1-x)^6} = \frac{n!}{48} Coef_{x^{n-3}} \frac{x^3(1+(1-x))^3}{(1-x)^6} =$$

$$\frac{n!}{48} Coef_{x^{n-3}} \left( \frac{x^3}{(1-x)^3} + 3 \frac{x^3}{(1-x)^4} + 3 \frac{x^3}{(1-x)^5} + \frac{x^3}{(1-x)^6} \right) =$$

$$\frac{n!}{48} Coef_{x^{n-3}} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^{k+3} + 3 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^{k+3} + 3 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{4} x^{k+3} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+5}{5} x^{k+3} \right) = \frac{n!}{48} \left( \binom{n-4}{2} + 3 \binom{n-3}{3} + 3 \binom{n-2}{4} + \binom{n-1}{5} \right) =$$

$$= \frac{n!}{5760} (n-2)(n-4)(n-5)(n^2 + 11n + 18).$$

Сложим сначала числа графов 1-4 типов (эти графы-кактусы)

$$E_n^{(1)} = C_{1,n} + C_{2,n} + C_{3,n} + C_{4,n} = \frac{n!}{3840} (n-6)(n-7)(n-8)(n^2 + n - 10) +$$

$$\frac{n!}{768} (n-1)(n-6)(n-7)(n-8) + \frac{n!}{5760} (n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{n!}{2304} (n-6)(n-7)(n-8) = \frac{n!}{11520} (n-6)(n-7)(n-8) 5n^2 \\
& = \frac{n! n^2}{384} \binom{n-6}{3}.
\end{aligned}$$

Сложим теперь числа графов 5-7 типов

$$\begin{aligned}
E_n^{(2)} &= C_{5,n} + C_{6,n} + C_{7,n} = \frac{n!}{2880} (n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n+8) + \\
& \quad \frac{n!}{1152} (n-4)(n-5)(n-6)(n+9) \\
& \quad + \frac{n!}{5760} (n-2)(n-4)(n-5)(n^2 + 11n + 18) \\
& = \frac{n!}{5760} (n-4)(n-5)(3n^3 + 12n^2 - 97n - 18).
\end{aligned}$$

Учитывая, что  $E_n = E_n^{(1)} + E_n^{(2)}$  получим

$$E_n = \frac{n!}{5760} \left( 15n^2 \binom{n-6}{3} + (n-4)(n-5)(3n^3 + 12n^2 - 97n - 18) \right).$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим утверждение теоремы.

Доказательство закончено.

В таблице 17 представлены числа  $E_n$ , вычисленные с помощью формулы из теоремы.

Таблица 17

$n$	6	7	8	9	10	11
$E_n$	120	4830	126840	2934225	64486800	1394801100

В [14] при перечислении тетрациклических эйлеровых блоков и графов были рассмотрены диаграммы из работы Дмитриева [27], которая содержит неполный список тетрациклических блоков. В диссертации дана ссылка на работу Хипа [61], в которой содержатся все гомеоморфные типы тетрациклических блоков. Данный недостаток не повлиял на итоговый результат, так как из всех гомеоморфных типов тетрациклических эйлеровых блоков и графов только один является эйлеровым.

## Глава 3. Перечисление геодезических графов

*Геодезический граф* – это связный граф, у которого любая пара вершин связана единственной кратчайшей цепью (геодезической) [78]. В [78] доказано, что граф геодезический тогда и только тогда, когда каждый его блок – геодезический граф. Следовательно, класс геодезических графов является блочно-устойчивым классом. Геодезические графы применяют при проектировании компьютерных систем и сетей [44].

### 3.1. Геодезические эйлеровы кактусы

Два графа называются *гомеоморфными*, если их можно получить из одного графа с помощью последовательности подразбиений ребер.

**Лемма 3.** Все помеченные геодезические эйлеровы кактусы – графы с нечетным числом вершин.

**Доказательство.** Используем индукцию по числу блоков. Пусть геодезический эйлеров кактус состоит из одного блока. Стемпл и Уотсон [78] доказали, что граф является геодезическим планарным только тогда, когда каждый его блок – ребро, нечетный цикл или граф, гомеоморфный полному графу  $K_4$ . Так как кактусы являются планарными графами, а эйлеровы графы – графы без мостов, то блоки геодезического эйлерова кактуса – нечетные циклы. Следовательно, для геодезического эйлерова кактуса, состоящего из одного блока, лемма верна.

Допустим, что лемма верна для графа, состоящего из  $k$  блоков,  $k \geq 1$ , и докажем, что она верна для графа, состоящего из  $k + 1$  блоков. Пусть геодезический эйлеров кактус, состоящий из  $k$  блоков, имеет нечетное число вершин  $n$ . Тогда к любой вершине кактуса присоединим блок с нечетным числом вершин  $m$  и получим граф, состоящий из  $k + 1$  блоков, имеет нечетное число вершин:  $m + n - 1$ . Лемма доказана.

**Теорема 18.** Пусть  $GE_n$  – число помеченных геодезических эйлеровых кактусов с  $n$  вершинами, тогда при  $p \geq 1$  верна формула

$$GE_{2p+1} = (2p)! \sum_{k=1}^p \frac{(2p+1)^{k-1}}{2^k k!} \binom{p-1}{k-1}.$$

**Доказательство.** Пусть  $C_n$  – число помеченных связных графов с  $n$  вершинами, а  $B_n$  – число помеченных блоков с  $n$  вершинами. Введем производящую функцию:  $B(z) = \sum_{n=3}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$ .

Для доказательства теоремы воспользуемся соотношением (2), полученным В.А. Воблым в [4]:

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp(nB'(z)) = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB'(z)) z^{-n},$$

где  $[z^n]$  – коэффициентный оператор и  $[z^{-1}]$  – оператор формального вычета [26].

Обозначая через  $B(z)$  экспоненциальную производящую функцию для числа блоков помеченных геодезических эйлеровых графов, имеем

$$GE_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB(z)) z^{-n}.$$

Так как, согласно лемме у геодезических эйлеровых кактусов не может быть блоков с четным числом вершин, то

$$B(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (2n)! \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad B'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} z^{2n} = \frac{z^2}{2(1-z^2)}.$$

Подставив  $B(z)$  в формулу (2), получим

$$GE_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp\left(\frac{nz^2}{2(1-z^2)}\right) z^{-n}.$$

Разлагая экспоненту в степенной ряд, имеем

$$GE_n = (n-1)! [z^{-1}] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{k-1} z^{2k-n}}{2^k (1-z^2)^k k!}.$$

Используя ряд (4), найдем

$$GE_n = (n-1)! [z^{-1}] \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n^{k-1} z^{2k-n+2m}}{2^k k!} \binom{m+k-1}{k-1}.$$

Найдем решение уравнения  $2k + 2m - n = -1$  в целых числах. Так как не существует геодезических эйлеровых кактусов с четным числом вершин, то  $n = 2p + 1$ . Тогда  $2k + 2m - (2p + 1) = -1$  и  $m = p - k$ .

Вычислив вычет функции, найдем

$$GE_{2p+1} = (2p)! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2p+1)^{k-1}}{2^k k!} \binom{p-1}{k-1}.$$

Учитывая, что биномиальный коэффициент обращается в нуль при  $p-1 < k-1$ , получим утверждение теоремы.

В соответствующей таблице представлены числа  $BE_n$ , вычисленные с помощью формулы из теоремы.

Таблица 18

$n$	3	5	7	9	11
$BE_n$	1	27	2355	436905	140805945

### 3.2. Геодезические полноблоchно-кактусные графы

**Теорема 19.** Пусть  $GF_n$  – число помеченных геодезических полноблоchно-кактусных графов с  $n$  вершинами, тогда при  $n \geq 3$  верна формула

$$GF_n = \frac{P_{n-1}(n)}{n} + (n-1)! \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{4}\right]} \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-4k-1}{2}\right]} \frac{n^{k-1} P_{n-4k-2m-1}(n)}{2^k k! (n-4k-2m-1)!} \binom{m+k-1}{k-1},$$

где  $P_i(x)$  – многочлен Белла одной переменной [54].

**Доказательство.** Пусть  $C_n$  – число помеченных связных графов с  $n$  вершинами, а  $B_n$  – число помеченных блоков с  $n$  вершинами. Введем производящую функцию:  $B(z) = \sum_{n=3}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$ .

Для доказательства теоремы воспользуемся соотношением (2), полученным В.А. Воблым в [4]:

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp(nB'(z)) = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB'(z)) z^{-n},$$

где  $[z^n]$  – коэффициентный оператор и  $[z^{-1}]$  – оператор формального вычета [26].

Обозначим через  $B(z)$  экспоненциальную производящую функцию для числа блоков помеченных геодезических полноблоочно-кактусных графов, имеем

$$F_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB(z)) z^{-n}.$$

Так как у геодезических полноблоочно-кактусных графов все блоки или полные графы, или циклы нечетной длины, то

$$B(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} (2n)! \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad B'(z) = e^z - 1 + \frac{z^4}{2(1-z^2)}.$$

Следовательно,

$$GF_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(n(e^z - 1)) \exp\left(\frac{nz^4}{2(1-z^2)}\right) z^{-n}.$$

Многочлен Белла одной переменной определяется через числа Стирлинга 2-го рода и имеют следующую производящую функцию:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n S(n, k) x^k, \quad \exp(x(e^z - 1)) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(x) \frac{z^i}{i!}.$$

Таким образом, разлагая экспоненту в степенной ряд, найдем

$$GF_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \sum_{i=0}^{\infty} \frac{P_i(n)}{i!} z^i \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^k z^{4k}}{2^k (1-z^2)^k k!} \right) z^{-n}.$$

Используя ряд (4), получим

$$GF_n = \frac{P_{n-1}(n)}{n} + (n-1)! \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n^{k-1} P_{n-4k-2m-1}(n)}{2^k k! (n-4k-2m-1)!} \binom{m+k-1}{k-1}.$$

Учитывая, что факториал обнуляет слагаемые при  $n-4k-2m-1 < 0$ , получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

В соответствующей таблице представлены числа  $GF_n$ , вычисленные с помощью формулы из теоремы.

Таблица 19

$n$	3	4	5	6	7	8	9	10
$GF_n$	4	29	323	4807	90185	2041881	54220780	1652632971

### 3.3. Геодезические $k$ -циклические кактусы

**Теорема 20.** Число помеченных геодезических  $k$ -циклических кактусов с  $n$  вершинами  $GC(n, k)$  равно

$$GC(n, k) = \frac{(n-1)!}{n2^k k!} \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-2k-1}{2}\right]} \binom{m+k-1}{k-1} \frac{n^{n-2m-k-1}}{(n-2m-2k-1)!}.$$

**Доказательство.** Пусть  $S(n, k)$  – число помеченных связных графов с  $n$  вершинами и цикломатическим числом  $k$ , а  $B_k(z)$  – экспоненциальная производящая функция для числа помеченных блоков с цикломатическим числом  $k$ .

Для доказательства теоремы воспользуемся соотношением (3), полученным В.А. Воблым в [5]:

$$S(n, k) = \frac{(n-1)!}{n2^k k!} [z^{-1}] \exp(nz) Y_k(nB'_1(z), \dots, nk! B'_k(z)) z^{-n}$$

где  $[z^{-1}]$  – оператор формального вычета [26], а  $Y_k(x_1, \dots, x_k)$  – многочлен разбиений.

Так как у кактусов нет блоков с цикломатическим числом  $k > 1$ , то  $B_k = 0$  при  $k > 1$  и  $Y_m(x_1, 0, \dots, 0) = x_1^m$ . Кроме того, у геодезических кактусов все циклы имеют нечетную длину и поскольку число помеченных циклов с  $2n+1$  вершинами равно  $(2n)!/2$ , получим

$$B_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (2n)! \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad B'_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} z^{2n} = \frac{z^2}{2(1-z^2)}.$$

Подставив в (3) и разложив экспоненту в ряд, имеем

$$\begin{aligned} GC(n, k) &= \frac{(n-1)!}{nk!} [z^{-1}] \sum_{l=0}^{\infty} \frac{n^l z^l}{l!} \left( \frac{nz^2}{2(1-z^2)} \right)^k z^{-n} = \\ &= \frac{(n-1)!}{nk!} [z^{-1}] \sum_{l=0}^{\infty} \frac{n^{l+k}}{l!} \frac{z^{l+2k-n}}{2^k (1-z^2)^k}. \end{aligned}$$

Используя разложение в ряд (4), получим

$$\begin{aligned}
GC(n, k) &= \frac{(n-1)!}{n2^k k!} [z^{-1}] \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k-1} \frac{n^{l+k}}{l!} z^{l+2k-n+2m} = \\
&= \frac{(n-1)!}{n2^k k!} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k-1} \frac{n^{n-2m-k-1}}{(n-2m-2k-1)!}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что биномиальный коэффициент обращается в нуль при  $n - 2m - 2k - 1 < 0$ , получим утверждение теоремы.

## Глава 4. Перечисление планарных графов

В [45] доказано, что граф является планарным тогда и только тогда, когда каждый его блок планарен. Следовательно, класс планарных графов является блочно-устойчивым классом.

### 4.1. Планарные полноблочно-кактусные графы

Из теоремы Понtryгина-Куратовского следует, что граф планарный тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных полному графу  $K_5$  и  $K_{3,3}$ .

**Теорема 21.** Для числа  $PF_n$  помеченных планарных полноблочно-кактусных графов с  $n$  вершинами при  $n \geq 3$  верна формула

$$PF_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp\left(nz + \frac{nz^2}{2} + \frac{nz^3}{6} + \frac{nz^3}{2(1-z)}\right).$$

**Доказательство.** Пусть  $C_n$  – число помеченных связных графов с  $n$  вершинами, а  $B_n$  – число помеченных блоков с  $n$  вершинами. Введем производящую функцию:  $B(z) = \sum_{n=3}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$ .

Для доказательства теоремы воспользуемся соотношением (2), полученным В.А. Воблым в [4]:

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp(nB'(z)) = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB'(z)) z^{-n},$$

где  $[z^n]$  – коэффициентный оператор и  $[z^{-1}]$  – оператор формального вычета [26].

Обозначая через  $\bar{B}(z)$  экспоненциальную производящую функцию для числа блоков помеченных планарных полноблочно-кактусных графов, получим

$$PF_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(n\bar{B}(z)) z^{-n}.$$

Из теоремы Понtryгина-Куратовского следует, что в рассматриваемых графах нет блоков-полных графов с числом вершин  $n > 4$ . Учитывая, что число помеченных циклов с  $n$  вершинами равно  $(n-1)!/2$ , найдем

$$\bar{B}(z) = \sum_{n=2}^4 \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2} (n-1)! \frac{z^n}{n!},$$

$$\bar{B}'(z) = nz + \frac{nz^2}{2} + \frac{nz^3}{6} + \frac{nz^3}{2(1-z)}.$$

Подставив  $\bar{B}(z)$  в (2), получим утверждение теоремы.

В следующей таблице представлены числа  $PF_n$ , вычисленные с помощью формулы из теоремы.

*Теорема 21*

$n$	3	4	5	6	7	8
$PF_n$	4	32	382	6096	122272	2958712

## 4.2. Внешнепланарные бициклические и трициклические графы

Под бициклическим (трициклическим) графом понимается связный граф с цикломатическим числом, равным 2 (соответственно 3).

Класс внешнепланарных графов является тестовым для класса планарных графов. Случайный помеченный внешнепланарный граф может быть сгенерирован полиномиальным алгоритмом, базирующимся на результатах перечисления таких графов.

**Теорема 22.** Число  $OB(n, 2)$  помеченных внешнепланарных бициклических блоков с  $n$  вершинами при  $n \geq 4$  равно

$$OB(n, 2) = \frac{n! (n - 3)}{4}.$$

**Доказательство.** Все гомеоморфные типы и базисные графы бициклических гладких графов изображены на рис. 2 и 3 соответственно [84].

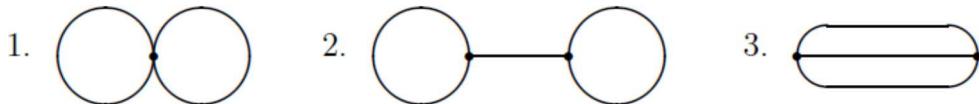


Рис. 2.



Рис. 3.

Только последний гомеоморфный тип является блоком, причем ему соответствует два базисных графа – 3 и 4. Но базисный граф 3 не является

внешнепланарным графом. В силу леммы 2 для графа 4 имеем  $r = 2, g = 4, a = b = 0, c = 2, C_n = \frac{n!}{4} \binom{n-3}{1}$ . Лемма доказана.

**Следствие 2.** При  $n \rightarrow \infty$  верно асимптотическое равенство

$$OB(n, 2) \sim \frac{n}{4} n!.$$

**Теорема 23.** Число  $OP(n, 2)$  помеченных связных внешнепланарных бициклических графов с  $n$  вершинами при  $n \geq 4$  равно

$$OP(n, 2) = \frac{(n-1)!}{16} \sum_{k=4}^n \frac{k^2(k-3)}{(n-k)!} n^{n-k}.$$

**Доказательство.** Пусть  $A_n$  – число связных графов с  $n$  помеченными вершинами, не являющимися деревьями,  $V_n$  – число гладких связных графов с  $n$  помеченными вершинами. Введем производящие функции  $V(z) = \sum_{n=3}^{\infty} V_n \frac{z^n}{n!}$  и  $A(z) = \sum_{n=3}^{\infty} A_n \frac{z^n}{n!}$ . Рид вывел [71] формулы

$$V(z) = A(ze^{-z}), \quad A(z) = V(T(z)), \quad (9)$$

где  $T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} z^n$  – древесная функция, удовлетворяющая уравнению  $T(z) \exp(-T(z)) = z$ . В [38] из первой формулы Рида получено соотношение

$$A_n = \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} k n^{n-k-1} V_k. \quad (10)$$

Перечислим первый и второй гомеоморфные типы графов, которым соответствуют базисные графы 1 и 2. В силу леммы Райта для графа 1 имеем  $r = 1, a = 2, b = 0, c = 0, g = 8, C_{1,n} = \frac{n!}{8} \binom{n-4}{1} = \frac{n!}{8}(n-4)$ .

Аналогично для графа 2 получим  $r = 2, a = 2, b = 1, c = 0, g = 8, C_{2,n} = \frac{n!}{8} \binom{n-4}{2} = \frac{n!}{16}(n-4)(n-5)$ .

Сложив числа графов  $C_{1,n}$  и  $C_{2,n}$  с числом  $OB(n, 2)$  помеченных внешнепланарных бициклических блоков, найдем число  $V_n$  помеченных гладких внешнепланарных бициклических графов:

$$V_n = C_{1,n} + C_{2,n} + OB(n, 2)$$

$$= \frac{n!}{8}(n-4) + \frac{n!}{16}(n-4)(n-5) + \frac{n!}{4}(n-3) = \frac{n!}{16}n(n-3).$$

Так как в нашем случае  $OP(n, 2) = A_n$ , в силу (4) получим требуемое. Теорема доказана.

В таблице 22 представлены числа  $OB(n, 2)$  и  $OP(n, 2)$ , вычисленные с помощью формул из теорем 22 и 23.

*Таблица 22*

$n$	4	5	6	7	8	9	10
$OB(n, 2)$	6	60	540	5040	50400	544320	6350400
$OP(n, 2)$	6	195	5220	139125	3887520	115839234	3699460800

**Теорема 24.** Число  $OB(n, 3)$  помеченных внешнепланарных трициклических блоков с  $n$  вершинами при  $n \geq 5$  равно

$$OB(n, 3) = \frac{n!(n-3)(n-4)(n+1)}{24}.$$

**Доказательство.** Все гомеоморфные типы трициклических гладких графов изображены на рис. 4 [27].

Из них только типы 12-15 являются блоками, причем блоков типов 14 и 15 не являются внешнепланарными графами. На рис. 5. изображены базисные графы Райта для гомеоморфных типов 8 – 13. Гомеоморфным типам 12 и 13 соответствуют базисные графы 9 – 14, из которых только типы 9 и 12 – внешнепланарные графы.

В силу леммы Райта для блока типа 12 (базисный граф 9) имеем  $r = 3, a = 0, b = 1, c = 2, g = 2, C_{1,n} = \frac{n!}{2} \binom{n-3}{2} = \frac{n!}{4}(n-3)(n-4)$ .

Также для блока типа 13 (базисный граф 12) получим  $r = 4, a = 0, b = 2, c = 2, g = 4, C_{2,n} = \frac{n!}{4} \binom{n-3}{3} = \frac{n!}{24}(n-3)(n-4)(n-5)$ .

Сложив числа графов  $C_{1,n}$  и  $C_{2,n}$ , получим требуемое. Лемма доказана.

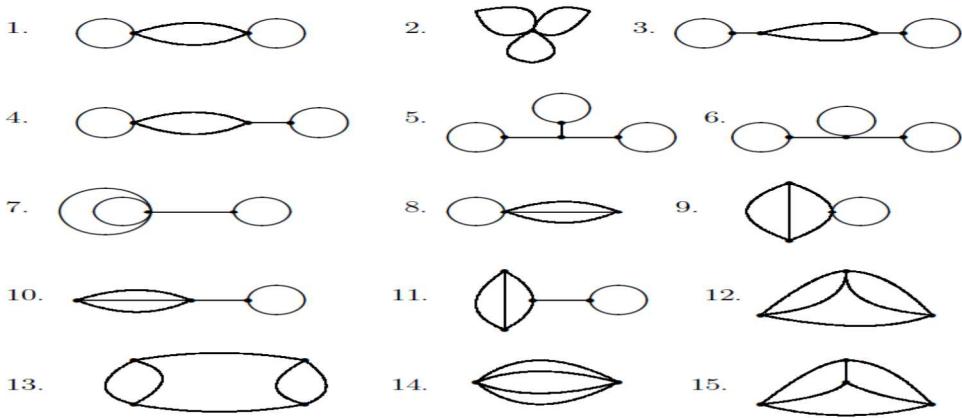


Рис. 4.

**Следствие 3.** При  $n \rightarrow \infty$  верно асимптотическое равенство

$$OB(n, 3) \sim \frac{n^3}{24} n!.$$

**Теорема 25.** Число  $OP(n, 3)$  помеченных связных внешнепланарных трициклических графов с  $n$  вершинами при  $n \geq 5$  равно

$$OP(n, 3) = \frac{(n-1)!}{5760} \sum_{k=5}^n \frac{k(k-3)(k-4)(4k^3 + 23k^2 + 103k - 150)}{(n-k)!} n^{n-k}.$$

**Доказательство.** Используя лемму 1, перечислим 1 и 3 – 7 гомеоморфные типы графов, изображенные на рис. 4. Тогда в силу леммы 1 и известного ряда (4)

для типа 1 имеем  $a = 2, b = 4, b_0 = 2, b_2 = 1, b_1 = b_3 = b_4 = 0, A(H) = 4$ ,

$$\begin{aligned} C_{1,n} &= \frac{n!}{16} \text{Coef}_{x^{n-2}} \frac{x^5(x+2(1-x))}{(1-x)^4} \\ &= \frac{n!}{16} \text{Coef}_{x^{n-2}} \left( \frac{x^6}{(1-x)^4} + 2 \frac{x^5}{(1-x)^3} \right) \\ &= \frac{n!}{16} \text{Coef}_{x^{n-2}} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^{k+6} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^{k+5} \right) \\ &= \frac{n!}{16} \left( \binom{n-5}{3} + 2 \binom{n-5}{2} \right) = \frac{n!}{16} (n-5)(n-6)(n-1); \end{aligned}$$

для типа 3:  $a = 4, b = 6, b_0 = 2, b_1 = 2, b_2 = 1, b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0, A(H) = 4$ ,

$$\begin{aligned}
C_{3,n} &= \frac{n!}{16} Coef_{x^{n-4}} \frac{x^5(x+2(1-x))}{(1-x)^6} \\
&= \frac{n!}{16} Coef_{x^{n-4}} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+5}{5} x^{k+6} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{4} x^{k+5} \right) \\
&= \frac{n!}{16} \left( \binom{n-5}{5} + 2 \binom{n-5}{4} \right) = \frac{n!}{1920} (n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n+1);
\end{aligned}$$

для типа 4:  $a = 3, b = 5, b_0 = 2, b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = b_4 = b_5 = 0, A(H) = 2,$

$$\begin{aligned}
C_{4,n} &= \frac{n!}{8} Coef_{x^{n-3}} \frac{x^5(x+2(1-x))}{(1-x)^5} = \frac{n!}{8} Coef_{x^{n-3}} \left( \frac{x^6}{(1-x)^5} + 2 \frac{x^5}{(1-x)^4} \right) \\
&= \frac{n!}{8} Coef_{x^{n-3}} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{4} x^{k+6} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^{k+5} \right) \\
&= \frac{n!}{8} \left( \binom{n-5}{4} + 2 \binom{n-5}{3} \right) = \frac{n!}{192} n(n-5)(n-6)(n-7);
\end{aligned}$$

для типа 5:  $a = 5, b = 6, b_0 = 3, b_1 = 3, b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0, A(H) = 6,$

$$\begin{aligned}
C_{5,n} &= \frac{n!}{48} Coef_{x^{n-4}} \frac{x^6}{(1-x)^6} = \frac{n!}{48} Coef_{x^{n-4}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+5}{5} x^{k+6} \\
&= \frac{n!}{48} \binom{n-5}{5} = \frac{n!}{5760} (n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9);
\end{aligned}$$

для типа 6:  $a = 3, b = 5, b_0 = 3, b_1 = 2, b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0, A(H) = 2,$

$$\begin{aligned}
C_{6,n} &= \frac{n!}{16} Coef_{x^{n-3}} \frac{x^6}{(1-x)^5} = \frac{n!}{16} Coef_{x^{n-3}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{4} x^{k+6} \\
&= \frac{n!}{16} Coef_{x^{n-3}} \binom{n-5}{4} = \frac{n!}{384} (n-5)(n-6)(n-7)(n-8);
\end{aligned}$$

для типа 7:  $a = 2, b = 4, b_0 = 3, b_1 = 1, b_2 = b_3 = b_4 = 0, A(H) = 2,$

$$\begin{aligned}
C_{7,n} &= \frac{n!}{16} Coef_{x^{n-2}} \frac{x^6}{(1-x)^4} = \frac{n!}{16} Coef_{x^{n-2}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^{k+6} \\
&= \frac{n!}{16} \binom{n-5}{3} = \frac{n!}{96} (n-5)(n-6)(n-7).
\end{aligned}$$

Гомеоморфный тип 2 (см. рис. 4) является графом розы с тремя лепестками.

Используем формулу для графов роз:

$$R_{n,k} = \frac{n!}{k! 2^k} \binom{n-2}{k-1},$$

где  $k$  – количество лепестков. Тогда

$$R_{n,3} = \frac{n!}{48} \binom{n-5}{2} = \frac{n!}{96} (n-5)(n-6).$$

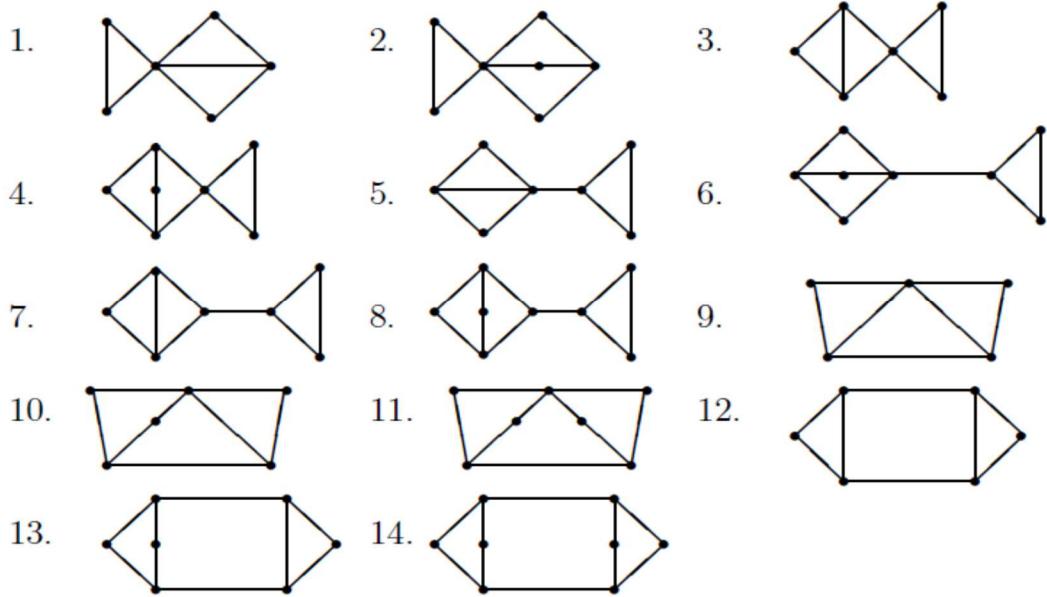


Рис. 5.

Гомеоморфным типам графов 8 – 11 на рис. 4 соответствуют базисные графы 1 – 8 на рис. 5, из которых только типы 1,3,5,7 – внешнепланарные графы. Поэтому в силу леммы Райта имеем

для типа 8:  $r = 2, a = 1, b = 0, c = 2, g = 4$ ,

$$C_{8,n} = \frac{n!}{4} \binom{n-4}{2} = \frac{n!}{8} (n-4)(n-5);$$

для типа 9:  $r = 3, a = 1, b = 2, c = 1, g = 4$ ,

$$C_{9,n} = \frac{n!}{4} \binom{n-3}{3} = \frac{n!}{24} (n-3)(n-4)(n-5);$$

для типа 10:  $r = 3, a = 1, b = 1, c = 2, g = 4$ ,

$$C_{10,n} = \frac{n!}{4} \binom{n-4}{3} = \frac{n!}{24} (n-4)(n-5)(n-6);$$

для типа 11:  $r = 4, a = 1, b = 3, c = 1, g = 4$ ,

$$C_{11,n} = \frac{n!}{4} \binom{n-3}{4} = \frac{n!}{96} (n-3)(n-4)(n-5)(n-6).$$

Остается сложить числа графов типов 1 – 13:

$$V_n = C_{1,n} + R_{n,3} + C_{3,n} + C_{4,n} + C_{5,n} + C_{6,n} + C_{7,n} + C_{8,n} + C_{9,n} + C_{10,n} + C_{11,n} +$$

$$OB(n, 3) = \frac{n!}{5760} (n-3)(n-4)(4n^3 + 23n^2 + 103n - 150)$$

и подставить в (4). Теорема доказана.

В таблице 23 представлены числа  $OB(n, 3)$  и  $OP(n, 3)$ , вычисленные с помощью формул из теорем 23 и 24.

Таблица 23

$n$	5	6	7	8	9	10
$OB(n, 3)$	60	1260	20160	302400	4536000	69854400
$OP(n, 3)$	60	3420	144375	5644800	219576420	8753774400

#### 4.3. Непланарные тетрациклические графы

**Теорема 26.** Пусть  $T_n$  – число помеченных непланарных тетрациклических блоков с  $n$  вершинами, тогда при  $n > 6$  верна формула

$$T_n = \frac{n!}{72} \binom{n+2}{8}.$$

**Доказательство.** Теорема Понtryгина-Куратовского утверждает, что граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных полному графу  $K_{3,3}$  и  $K_5$ . Известно, что существует 107 гомеоморфных типов гладких тетрациклических графов [28]. Из всех гомеоморфных типов тетрациклических блоков только один непланарный граф –  $K_{3,3}$ .

Воспользуемся леммой Степанова. Так как в нашем случае  $H = K_{3,3}$ , то  $A(H) = 72, a = 6, b = 9, b_0 = 0, b_1 = 9, b_i = 0, i = 2 \dots 9$  и тогда

$$T_n = \frac{n!}{72} \text{Coef}_{x^{n-6}} \frac{1}{(1-x)^9}.$$

Используя разложение (4), получим

$$T_n = \frac{n!}{72} \text{Coef}_{x^{n-6}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+8}{8} x^k = \frac{n!}{72} \binom{n+2}{8}.$$

Доказательство закончено.

В следующей таблице представлены числа  $T_n$ , вычисленные с помощью формулы из теоремы.

Таблица 24

$n$	6	7	8	9	10
$T_n$	10	630	25200	831600	24948000

**Теорема 27.** Число  $TC_n$  помеченных связных непланарных тетрациклических графов с  $n$  вершинами при  $n \geq 6$  равно

$$TC_n = \frac{n^{n-1}}{72} \sum_{k=6}^n \binom{k+2}{8} \frac{kn!}{(n-k)! n^k}.$$

**Доказательство.** Заметим, что непланарный тетрациклический граф должен иметь хотя бы один непланарный блок. Однако все унициклические, бициклические и трициклические блоки – планарные графы. Следовательно, непланарный тетрациклический граф состоит из единственного блока, который является непланарным тетрациклическим графом, и прикрепленных к нему деревьев.

Подставив в формулу (10) выражение для числа помеченных непланарных блоков  $T_n = \frac{n!}{72} \binom{n+2}{8}$  вместо  $V_k$ , получим утверждение теоремы.

В следующей таблице представлены числа  $TC_n$ , вычисленные с помощью формулы из теоремы.

Таблица 25

$n$	6	7	8	9	10
$T_n$	10	1050	73920	4483080	256032000

Следует отметить, что Дмитриев Е.Ф. другими методами перечислил помеченные непланарные тетрациклические блоки и связные графы, но не опубликовал свои результаты [28].

## Глава 5. Асимптотическое перечисление графов

### 5.1. Кактусы без треугольников

**Теорема 28.** Для числа  $CT_n$  помеченных кактусов без треугольников с  $n$  вершинами при  $n \rightarrow \infty$  верна асимптотическая формула

$$CT_n \sim c_1 n^{-5/2} a_1^n n!,$$

где  $c_1 \approx 0.1203161248$ ,  $a_1 \approx 3.73649$ .

**Доказательство.** В §1.2 была получена формула

$$CT_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp\left(nz + \frac{nz^3}{2(1-z)}\right) z^{-n},$$

где  $[z^{-1}]$  – оператор формального вычета [26].

Используем теорему Флажоле и Седжвика [55], являющуюся вариантом метода перевала.

Обозначим  $F(N, n) = [z^N] \{a(z)(b(z))^n\} = \frac{1}{2\pi i} \oint a(z)(b(z))^n \frac{dz}{z^{N+1}}$ .

**Теорема Флажоле – Седжвика [55].** Пусть функции  $a(z)$  и  $b(z)$  удовлетворяют следующим условиям:

1. Функции  $a(z) = \sum_{j \geq 0} a_j z^j$  и  $b(z) = \sum_{j \geq 0} b_j z^j$  аналитические в точке  $z = 0$  и имеют неотрицательные коэффициенты, кроме того  $b(0) \neq 0$ .
2.  $\text{НОД}\{j | b_j > 0\} = 1$ .
3. Если  $R \leq \infty$  радиус сходимости  $b(z)$ , то радиус сходимости  $a(z)$  не меньше  $R$ .

Через  $T$  обозначим величину  $T = \lim_{x \rightarrow R-0} \frac{x b'(x)}{b(x)}$ . Пусть  $\lambda$  положительное число такое, что  $0 < \lambda < T$ , и пусть  $r$  – единственный действительный корень уравнения  $r \frac{b'(r)}{b(r)} = \lambda$ . Обозначим  $\sigma = \frac{d^2}{dr^2} (\ln b(r) - \lambda \ln r)$ .

Тогда для  $N = \lambda n$  целого при  $n \rightarrow \infty$  и  $N \rightarrow \infty$  верно асимптотическое равенство

$$F(N, n) \sim a(r) \frac{(b(r))^n}{r^{N+1} \sqrt{2\pi n \sigma}}.$$

Заметим, что нужно требовать единственность действительного корня, лежащего внутри круга сходимости, так как все остальные корни, не лежащие в круге сходимости, будут посторонними корнями. В работах [12, 13] была допущена погрешность в формулировке теоремы Флажоле-Седжвика. При “единственности положительного корня” [теорема 1, 13] дает только асимптотическую оценку сверху вместо асимптотического равенства. При написании диссертации все расчеты были проведены заново, и всегда при решении уравнения был единственный действительный корень внутри круга сходимости.

Формула для  $CT_n$  может быть представлена в виде

$$CT_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^n] \left\{ z \left( \exp \left( z + \frac{z^3}{2(1-z)} \right) \right)^n \right\} = \frac{(n-1)!}{n} F(N, n),$$

где  $N = n$ ,  $\lambda = 1$ ,  $a(z) = z$ ,  $b(z) = \exp \left( z + \frac{z^3}{2(1-z)} \right)$ .

Так как ряд для  $\bar{B}(z)$  сходится при  $|z| < 1$ , оператор формального вычета является контурным интегралом. Очевидно, функции  $a(z)$  и  $b(z)$  аналитические в точке  $z = 0$  и  $b(0) = 1$ . Функция  $b(z)$  имеет положительные коэффициенты, так как  $b(z) = \exp(\bar{B}(z))$  и  $\bar{B}(z)$  – производящая функция для числа помеченных блоков частного вида. Поскольку  $b_2 > 0, b_3 > 0$ , имеем  $\text{НОД}\{j | b_j > 0\} = 1$ . Так как  $z = 1$  – ближайшая к началу координат особая точка  $b(z)$ , радиус сходимости  $R$  функции  $b(z)$  равен 1. Очевидно,  $a(z)$  имеет бесконечный радиус сходимости. Таким образом, условия 1-3 теоремы Флажоле-Седжвика выполнены.

Найдем  $T = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x b'(x)}{b(x)} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x(2-4x+5x^2-2x^3)}{2(1-x)^2} = +\infty$ ,  $0 < \lambda < T$ . В

нашем случае уравнение  $r \frac{b'(r)}{b(r)} = \lambda$  имеет вид  $r \frac{2-4r+5r^2-2r^3}{2(1-r)^2} = 1$ . Решая это уравнение с помощью Wolfram Mathematica, видим, что его единственным действительным корнем является число  $r = 0.5$ . Вычисляя величину,

$$\sigma = \left( \frac{b'(r)}{b(r)} \right)' + \frac{\lambda}{r^2} = \left( \frac{2-4r+5r^2-2r^3}{2(1-r)^2} \right)' + \frac{1}{r^2} = \frac{r(3r-3-r^2)}{(1-r)^2} + \frac{1}{r^2}$$

Получим  $\sigma = 11$ . Также с помощью Wolfram Mathematica вычислим

$$c = \frac{a(r)}{r\sqrt{2\pi\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \approx 0.1203161248, \quad a = \frac{b(r)}{r} \approx 3.73649$$

Окончательно при  $n \rightarrow \infty$  имеем асимптотику

$$CT_n = \frac{(n-1)!}{n} F(N, n) \sim \frac{(n-1)!}{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} n^{-1/2} \left( \frac{b(r)}{r} \right)^n \sim n! c n^{-5/2} a^n.$$

**Следствие 4.** Почти все помеченные кактусы содержат треугольники.

**Доказательство.** Известно [76, теорема 2], что для числа  $Ca_n$  помеченных кактусов с  $n$  вершинами при  $n \rightarrow \infty$  верна асимптотическая формула

$$Ca_n \sim c n^{-5/2} a^n n!,$$

где  $c = 0.1201498132$ ,  $a = 4.188654598$ .

В § 5.1. для числа  $CT_n$  кактусов без треугольников с  $n$  вершинами при  $n \rightarrow \infty$  верна асимптотическая формула

$$CT_n \sim c_1 n^{-5/2} a_1^n n!,$$

где  $c_1 \approx 0.3989422804$ ,  $a_1 \approx 3.73649191148$ .

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{CT_n}{Ca_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_1 n^{-5/2} a_1^n}{c n^{-5/2} a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_1}{c} \left( \frac{a_1}{a} \right)^n = 0,$$

то есть асимптотически почти все помеченные кактусы содержат треугольники.

## 5.2. Эйлеровы кактусы

**Теорема 29.** Для числа  $D_n$  помеченных эйлеровых кактусов с  $n$  вершинами при  $n \rightarrow \infty$  верна асимптотическая формула

$$D_n \sim c n^{-5/2} a^n n!,$$

где  $c \approx 0.1079436709$ ,  $a \approx 2.5424753735$ .

**Доказательство.** Используем теорему Флажоле-Седжвика. В работе [2] была получена формула

$$D_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp \left( \frac{n z^2}{2(1-z)} \right) z^{-n},$$

где  $[z^{-1}]$  – оператор формального вычета [26].

Тогда формула для  $D_n$  может быть представлена в виде

$$D_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^n] \left\{ z \left( \exp \left( \frac{z^2}{2(1-z)} \right)^n \right) \right\} = \frac{(n-1)!}{n} F(N, n),$$

где  $N = n$ ,  $\lambda = 1$ ,  $a(z) = z$ ,  $b(z) = \exp \left( \frac{z^2}{2(1-z)} \right)$ .

Так как ряд для  $\bar{B}(z)$  сходится при  $|z| < 1$ , оператор формального вычета является контурным интегралом. Очевидно, функции  $a(z)$  и  $b(z)$  аналитические в точке  $z = 0$  и  $b(0) = 1$ . Функция  $b(z)$  имеет положительные коэффициенты, так как  $b(z) = \exp(\bar{B}(z))$  и  $\bar{B}(z)$  – производящая функция для числа помеченных блоков частного вида. Поскольку  $b_2 > 0, b_3 > 0$ , имеем  $\text{НОД}\{j | b_j > 0\} = 1$ . Так как  $z = 1$  – ближайшая к началу координат особая точка  $b(z)$ , радиус сходимости  $R$  функции  $b(z)$  равен 1. Очевидно,  $a(z)$  имеет бесконечный радиус сходимости. Таким образом, условия 1-3 теоремы Флажоле-Седжвика выполнены.

Найдем  $T = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x b'(x)}{b(x)} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x(2x-x^2)}{2(1-x)^2} = +\infty$ ,  $0 < \lambda < T$ . В нашем случае уравнение  $r \frac{b'(r)}{b(r)} = \lambda$  имеет вид  $r \frac{2r-r^2}{2(1-r)^2} = 1$ . Решая это уравнение с помощью Wolfram Mathematica, видим, что его единственным действительным корнем является число  $r \approx 0.5391888728$ . Вычисляя величину,

$$\sigma = \left( \frac{b'(r)}{b(r)} \right)' + \frac{\lambda}{r^2} = \left( \frac{(2r-r^2)}{2(1-r)^2} \right)' + \frac{1}{r^2} = \frac{2-2r}{2(1-r)^2} + \frac{2r-r^2}{(1-r)^3} + \frac{1}{r^2}$$

Получим  $\sigma \approx 13.6592157423$ . Также с помощью Wolfram Mathematica вычислим

$$c = \frac{a(r)}{r\sqrt{2\pi\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \approx 0.1079436709, \quad a = \frac{b(r)}{r} \approx 2.5424753735.$$

Окончательно при  $n \rightarrow \infty$  имеем асимптотику

$$Ca_n = \frac{(n-1)!}{n} F(N, n) \sim \frac{(n-1)!}{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} n^{-1/2} \left( \frac{b(r)}{r} \right)^n \sim n! cn^{-5/2} a^n.$$

### 5.3. Полноблоочно-кактусные графы

**Теорема 30.** Для числа  $F_n$  помеченных полноблоочно-кактусных графов с  $n$  вершинами при  $n \rightarrow \infty$  верна асимптотическая формула

$$F_n \sim c_1 n^{-5/2} a_1^n n!,$$

где  $c_1 \approx 0.1178070871$ ,  $a_1 \approx 4.261224133$ .

**Доказательство.** Используем теорему Флажоле-Седжвика. В нашем случае в силу формулы (5) имеем

$$F_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^n] \left\{ z \left( \exp \left( e^z - 1 + \frac{z^3}{2(1-z)} \right)^n \right) \right\} = \frac{(n-1)!}{n} F(N, n),$$

где  $N = n$ ,  $\lambda = 1$ ,  $a(z) = z$ ,  $b(z) = \exp \left( e^z - 1 + \frac{z^3}{2(1-z)} \right)$ .

Так как ряд для  $\bar{B}(z)$  сходится при  $|z| < 1$ , оператор формального вычета является контурным интегралом. Очевидно, функции  $a(z)$  и  $b(z)$  аналитические в точке  $z = 0$  и  $b(0) = e^{-1}$ . Функция  $b(z)$  имеет положительные коэффициенты, так как  $b(z) = \exp(\bar{B}(z))$  и  $\bar{B}(z)$  – производящая функция для числа помеченных блоков частного вида. Поскольку  $b_2 > 0, b_3 > 0$ , имеем  $\text{НОД}\{j | b_j > 0\} = 1$ . Так как  $z = 1$  – ближайшая к началу координат особая точка  $b(z)$ , радиус сходимости  $R$  функции  $b(z)$  равен 1. Очевидно,  $a(z)$  имеет бесконечный радиус сходимости. Таким образом, условия 1-3 теоремы Флажоле-Седжвика выполнены.

Найдем  $T = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x b'(x)}{b(x)} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \left( e^z - 1 + \frac{z^3}{2(1-z)} \right) = +\infty$ ,  $0 < \lambda < T$ . В нашем случае уравнение  $r \frac{b'(r)}{b(r)} = \lambda$  имеет вид  $r \left( e^r + \frac{3r^2 - 2r^3}{2(1-r)^2} \right) = 1$ . Решая это уравнение с помощью Wolfram Mathematica, находим его единственный действительный корень  $r \approx 0.4457376225$ . Вычисляя величину,

$$\sigma = \left( \frac{b'(r)}{b(r)} \right)' + \frac{\lambda}{r^2} = \left( e^r + \frac{3r^2 - 2r^3}{2(1-r)^2} \right)' + \frac{1}{r^2} = e^r + \frac{r^3 - 3r^2 + 3r}{(1-r)^3} + \frac{1}{r^2}$$

Получим  $\sigma \approx 11.46772568$ . Также с помощью Wolfram Mathematica вычислим

$$c_1 = \frac{a(r)}{r\sqrt{2\pi\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \approx 0.1178070871, \quad a_1 = \frac{b(r)}{r} \approx 4.261224133$$

Окончательно при  $n \rightarrow \infty$  имеем асимптотику

$$F_n = \frac{(n-1)!}{n} F(N, n) \sim \frac{(n-1)!}{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} n^{-1/2} \left(\frac{b(r)}{r}\right)^n \sim n! c_1 n^{-5/2} a_1^n.$$

Теорема доказана.

**Следствие 5.** Почти все полноблоочно-кактусные графы не являются кактусами.

**Доказательство.** В [4, теорема 2] была получена асимптотическая формула для числа  $Ca_n$  помеченных кактусов с  $n$  вершинами:

$$Ca_n \sim cn^{-5/2} a^n n!, \quad (11)$$

где  $c = 0.1201498132$ ,  $a = 4.188654598$ .

Для числа  $F_n$  полноблоочно-кактусных графов с  $n$  вершинами при  $n \rightarrow \infty$  верна асимптотическая формула

$$F_n \sim c_1 n^{-5/2} a_1^n n!,$$

где  $c_1 = 0.1178070871$ ,  $a_1 = 4.261224133$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Ca_n}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{cn^{-5/2} a^n}{c_1 n^{-5/2} a_1^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{c_1} \left(\frac{a}{a_1}\right)^n = 0,$$

то есть асимптотически почти все помеченные полноблоочно-кактусные графы не являются кактусами.

#### 5.4. Планарные полноблоочно-кактусные графы

**Теорема 31.** Для числа  $PF_n$  помеченных планарных полноблоочно-кактусных графов с  $n$  вершинами при  $n \rightarrow \infty$  верна асимптотическая формула

$$PF_n \sim cn^{-5/2} a^n n!,$$

где  $c \approx 0.1183273421$ ,  $a \approx 4.2534965791$ .

**Доказательство.** Используем теорему Флажоле-Седжвика. В § 4.1. была получена формула для числа помеченных планарных полноблоочно-кактусных графов. Тогда

$$PF_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^n] \left\{ z \left( \exp \left( z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^3}{2(1-z)} \right)^n \right) \right\} = \frac{(n-1)!}{n} F(N, n),$$

где  $N = n$ ,  $\lambda = 1$ ,  $a(z) = z$ ,  $b(z) = \exp \left( z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^3}{2(1-z)} \right)$ .

Так как ряд для  $\bar{B}(z)$  сходится при  $|z| < 1$ , оператор формального вычета является контурным интегралом. Очевидно, функции  $a(z)$  и  $b(z)$  аналитические в точке  $z = 0$  и  $b(0) = 1$ . Функция  $b(z)$  имеет положительные коэффициенты, так как  $b(z) = \exp(\bar{B}(z))$  и  $\bar{B}(z)$  – производящая функция для числа помеченных блоков частного вида. Поскольку  $b_2 > 0, b_3 > 0$ , имеем  $\text{НОД}\{j | b_j > 0\} = 1$ . Так как  $z = 1$  – ближайшая к началу координат особая точка  $b(z)$ , радиус сходимости  $R$  функции  $b(z)$  равен 1. Очевидно,  $a(z)$  имеет бесконечный радиус сходимости. Таким образом, условия 1-3 теоремы Флажоле-Седжвика выполнены.

Найдем  $T = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x b'(x)}{b(x)} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \left( x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{3x^3}{2(1-x)} + \frac{x^4}{2(1-x)^2} \right) = +\infty$ ,  $0 < \lambda < T$ . В нашем случае уравнение  $r \frac{b'(r)}{b(r)} = \lambda$  имеет вид  $r + r^2 + \frac{r^3}{2} + \frac{3r^3}{2(1-r)} + \frac{r^4}{2(1-r)^2} = 1$ . Решая это уравнение с помощью Wolfram Mathematica, находим его единственный действительный корень  $r \approx 0.4471957138$ . Вычисляя величину,

$$\sigma = \left( \frac{b'(r)}{b(r)} \right)' + \frac{\lambda}{r^2} = 1 + r + \frac{3r}{1-r} + \frac{3r^2}{(1-r)^2} + \frac{r^3}{(1-r)^3} + \frac{1}{r^2}.$$

Получим  $\sigma \approx 11.3671060792$ . Также с помощью Wolfram Mathematica вычислим

$$c = \frac{a(r)}{r\sqrt{2\pi\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \approx 0.1183273421, \quad a = \frac{b(r)}{r} \approx 4.2534965791$$

Окончательно при  $n \rightarrow \infty$  имеем асимптотику

$$PF_n = \frac{(n-1)!}{n} F(N, n) \sim \frac{(n-1)!}{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} n^{-1/2} \left( \frac{b(r)}{r} \right)^n \sim n! c n^{-5/2} a^n.$$

Теорема доказана.

**Следствие 6.** Почти все помеченные полноблоочно-кактусные графы не являются планарными.

**Доказательство.** В § 5.3. было получено асимптотическое равенство для числа  $PF_n$  полноблоочно-кактусных графов:

$$PF_n \sim cn^{-5/2}a^n n!,$$

где  $c = 0.1178070871$ ,  $a = 4.261224133$ . Следовательно, в силу теоремы 31 имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{PF_n}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{cn^{-5/2}a^n}{c_1 n^{-5/2}a_1^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{c_1} \left(\frac{a}{a_1}\right)^n = 0,$$

то есть асимптотически почти все помеченные полноблоочно-кактусные графы не являются планарными.

### 5.5. Эйлеровы пентациклические блоки

**Теорема 32.** Для числа  $E_n$  помеченных эйлеровых пентациклических блоков с  $n$  вершинами при  $n \rightarrow \infty$  верна асимптотическая формула

$$E_n \sim \frac{53n^7 n!}{5806080}.$$

**Доказательство.** Граф является эйлеровым только тогда, когда его гомеоморфный тип – эйлеров граф. Из 118 гомеоморфных пентациклических блоков только 5 являются эйлеровыми блоками [61]. Эти графы представлены на рис. 6.

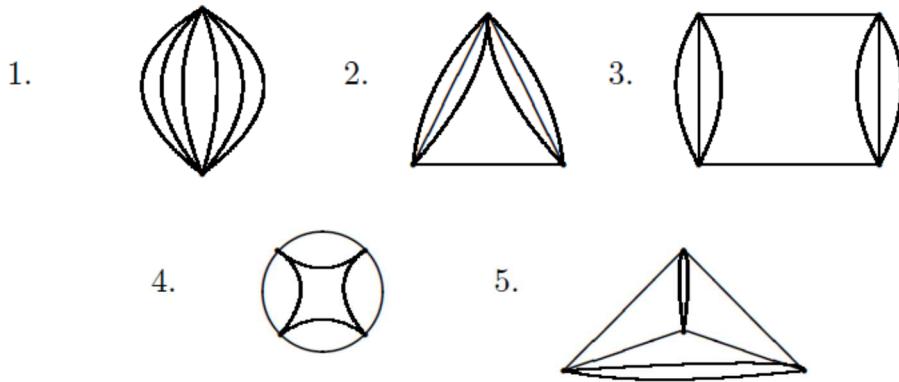


Рис. 6.

Пусть  $H$  – гомеоморфный тип с  $n$  вершинами,  $b$  ребрами,  $b_0$  петлями и порядком вершинно-реберной группы автоморфизмов  $A(H)$ , причем  $H$  является связным гладким графом, отличным от изолированной вершины или петли. Тогда для числа помеченных графов  $C_n(H)$  с  $n$  вершинами и гомеоморфным типом  $H$  при  $n \rightarrow \infty$  верно асимптотическое равенство [43, лемма 4]:

$$C_n(H) \sim \frac{n! n^{b-1}}{2^{b_0} A(H)(b-1)!}.$$

Заметим, что для блоков  $b_0 = 0$  и основной вклад в асимптотику в нашем случае дают графы с 8 ребрами. Пусть  $C_{i,n}$  – число графов с  $i$ -м гомеоморфным типом и  $n$  вершинами, тогда при  $n \rightarrow \infty$  имеем

$$3) A(H) = 144, C_{3,n} \sim \frac{n! n^7}{7! 144}; \quad 4) A(H) = 128, C_{4,n} \sim \frac{n! n^7}{7! 128};$$

$$5) A(H) = 32, C_{5,n} \sim \frac{n! n^7}{7! 32}.$$

Теперь получим при  $n \rightarrow \infty$

$$E_n \sim C_{3,n} + C_{4,n} + C_{5,n} = \frac{n! n^7}{7!} \left( \frac{1}{144} + \frac{1}{128} + \frac{1}{32} \right) = \frac{53n^7 n!}{5806080}.$$

Доказательство закончено.

## 5.6. Внешнепланарные бициклические и трициклические графы

В § 4.2 были получены явные формулы для числа помеченных внешнепланарных бициклических и трициклических графов:

$$\begin{aligned} OP(n, 2) &= \frac{(n-1)!}{16} \sum_{k=4}^n \frac{k^2(k-3)}{(n-k)!} n^{n-k}, \\ OP(n, 3) &= \frac{(n-1)!}{5760} \sum_{k=5}^n \frac{k(k-3)(k-4)(4k^3 + 23k^2 + 103k - 150)}{(n-k)!} n^{n-k}. \end{aligned}$$

Соответствующая асимптотика для числа таких графов равна:

**Теорема 33.** При  $n \rightarrow \infty$  верны асимптотические равенства

$$OP(n, 2) \sim \frac{n^{n+1}}{8}, \quad OP(n, 3) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{192} n^{n+5/2}.$$

**Доказательство.** Из формул Рида [75]:  $V(z) = A(ze^{-z})$ ,  $A(z) = V(T(z))$  имеем  $A(z) = V(T(z))$ , где

$$A_n = OP(n, 2), \quad V(z) = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n(n-3)}{16} z^n = \frac{z^4(2-z)}{8(1-z)^3}.$$

Здесь суммирование степенного ряда выполнено с помощью известных степенных рядов [40].

Раскладывая  $V(z)$  в ряд Лорана по степеням  $1 - z$ , получим

$$\begin{aligned} A(z) = & \frac{1}{8(1-T(z))^3} + \frac{3}{8(1-T(z))^2} + \frac{1}{4(1-T(z))} \\ & + \frac{1}{4} - \frac{3(1-T(z))}{8} + \frac{(1-T(z))^2}{8}. \end{aligned}$$

Пусть

$$\frac{1}{(1-T(z))^y} = \sum_{n=0}^{\infty} t_n(y) \frac{z^n}{n!},$$

где  $t_n(y)$  – древесный полином степени  $n$ . Тогда

$$OP(n, 2) = \frac{1}{8}t_n(3) + \frac{3}{8}t_n(2) + \frac{1}{4}t_n(1) + \frac{1}{4}t_n(0) - \frac{3}{8}t_n(-1) + \frac{1}{8}t_n(-2).$$

В [65] при  $n \rightarrow \infty$  и  $y > -1$  выведено асимптотическое равенство

$$t_n(y) = \frac{\sqrt{2\pi} n^{n-1/2+y/2}}{2^{y/2} \Gamma(y/2)} + O(n^{n-1+y/2}).$$

Очевидно, что  $t_n(0) = 0$  и  $t_n(-1) = -n^{n-1}$  при  $n > 0$ . Райт доказал [85], что

$$2(T(z) - W_{-1}(z)) = T^2(z), \quad \text{где } W_{-1}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-2}}{n!} z^n. \quad \text{Следовательно,}$$

$(1 - T(z))^2 = 1 - 2W_{-1}(z)$  и  $t_n(-2) = -2n^{n-2}$  при  $n > 0$ , поэтому

$$OP(n, 2) \sim \frac{1}{8}t_n(3) \sim \frac{1}{8} \frac{\sqrt{2\pi} n^{n+1}}{2^{3/2} \Gamma(3/2)} = \frac{n^{n+1}}{8}.$$

Аналогично для трициклических графов имеем

$$\begin{aligned} V(z) = & \frac{1}{5760} \sum_{n=4}^{\infty} (n-3)(n-4)(4n^3 + 23n^2 + 103n - 150)z^n = \\ = & -\frac{z^5(3z^3 - 19z^2 + 36z - 24)}{48(1-z)^6}. \end{aligned}$$

Здесь суммирование степенного ряда выполнено с помощью пакета программ Maple. Раскладывая числитель дроби в ряд Тейлора по степеням  $1 - z$  с помощью Maple, найдем

$$V(z) = \frac{1}{48} \left( \frac{4}{(1-z)^6} - \frac{13}{(1-z)^5} + \frac{15}{(1-z)^4} - \frac{17}{(1-z)^3} + \right.$$

$$+ \frac{35}{(1-z)^2} - \frac{39}{1-z} + 13 + 5(1-z) - 3(1-z)^2 \Big).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} OP(n, 3) &= \frac{1}{48} (4t_n(6) - 13t_n(5) + 15t_n(4) - 17t_n(3) + 35t_n(2) - \\ &- 39t_n(1) + 13t_n(0) + 5t_n(-1) - 3t_n(-2)) \sim \frac{1}{48} 4t_n(6) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{192} n^{n+5/2}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Следствие 5.** Почти все помеченные внешнепланарные бициклические графы являются кактусами.

**Доказательство.** В [5, теорема 4] было получено асимптотическое равенство для числа помеченных  $k$ -циклических кактусов:

$$Ca(n, k) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3k/2} k! \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} n^{n+\frac{3k}{2}-2}. \quad (12)$$

Под бициклическим графом понимается связный граф с цикломатическим числом равным 2, тогда

$$Ca(n, 2) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{16 \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} n^{n+1} = \frac{n^{n+1}}{8},$$

$$\text{где } \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

В § 5.6 была получена асимптотика для числа помеченных внешнепланарных бициклических графов:

$$OP(n, 2) \sim \frac{n^{n+1}}{8}.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{OP(n, 2)}{Ca(n, 2)} = 1,$$

т.е. асимптотически почти все помеченные внешнепланарные бициклические графы являются кактусами. Следствие доказано.

**Следствие 6.** Почти все помеченные внешнепланарные трициклические графы являются кактусами.

**Доказательство.** Под трициклическими графом понимается связный граф с цикломатическим числом равным 3, тогда формула (12) запишется в виде:

$$Ca(n, 3) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{96\sqrt{2}\Gamma(2)} n^{n+\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{96\sqrt{2}} n^{n+\frac{5}{2}},$$

где  $\Gamma(2) = 1$ .

Используя из § 5.6 асимптотическое равенство для числа помеченных внешнепланарных трициклических графов  $OP(n, 3) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{192} n^{n+5/2}$ , получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{OP(n, 3)}{Ca(n, 3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{2\pi}n^{n+5/2}}{192}}{\frac{\sqrt{\pi}}{96\sqrt{2}} n^{n+\frac{5}{2}}} = 1,$$

т.е. асимптотически почти все помеченные внешнепланарные трициклические графы являются кактусами.

## Заключение

В диссертации получены следующие основные результаты по перечислению помеченных связных графов с заданными свойствами блоков:

1. Перечислены полноблоочно-кактусные графы и найдена соответствующая асимптотика для этих графов. Получены явные формулы для числа кактусов: кактусов с заданным числом вершин, кактусов без треугольников, гладких кактусов, двудольных кактусов. Также были получены явные формулы для числа  $k$ -циклических полноблоочно-кактусных графов и блочно-колесных графов. Найдена асимптотика для числа кактусов без треугольников.
2. Перечислены эйлеровы графы: эйлеровы полноблочные графы, эйлеровы двудольные кактусы, эйлеровы полноблоочно-кактусные графы. Получены явные формулы для числа эйлеровых тетрациклических блоков и графов. Была получена явная формула для числа графов розы, которые являются кактусами, а также  $k$ -циклическими эйлеровыми графами. Найдена асимптотика для числа эйлеровых кактусов и эйлеровых пентациклических блоков.
3. Получены явные формулы для числа геодезических графов: геодезических эйлеровых кактусов, геодезических полноблоочно-кактусных графов, геодезических  $k$ -циклических графов.
4. Перечислены внешнепланарные бициклические и трициклические графы и получена соответствующая асимптотика для числа таких графов. Были получены явные формулы для числа планарных полноблоочно-кактусных графов и найдена соответствующая асимптотика для числа таких графов.
5. В работе доказывается ряд следствий из перечислительных теорем о свойствах рассматриваемых графов:
  - почти все кактусы содержат треугольники,
  - почти все полноблоочно-кактусные графы не являются кактусами и планарными графиками,

- почти все внешнепланарные бициклические и трициклические графы являются кактусами,
- при равномерном распределении вероятностей, вероятность того, что помеченный связный эйлеров тетрациклический граф является блоком, равна  $\frac{2}{11}$ .

### Список литературы

1. Багаев Г. Н. Случайные графы со степенью связности 2. /Г.Н. Багаев. // Дискретный анализ. – 1973. – № 22. – С. 3–14.
2. Воблый В.А. Перечисление помеченных эйлеровых кактусов. / В.А. Воблый. // Мат. XI Междунар. Семинара «Дискретная математика и ее приложения». – М.:МГУ, 2012. – С. 275-277.
3. Воблый В.А. Перечисление помеченных бициклических и трициклических эйлеровых графов. / В.А. Воблый. // Матем. Заметки. – 2012. – Т. 92. – №5. – С. 678-683.
4. Воблый В. А. Об одной формуле для числа помеченных связных графов. / В.А. Воблый. // Дискретный анализ и исследование операций. – 2012. – Т. 19. – № 4. – С. 48 – 59.
5. Воблый В.А. О перечислении помеченных связных графов с заданными числами вершин и ребер. / В.А. Воблый. // Дискретный анализ и исследование операций. – 2016. – Т. 23. – № 2. – С. 5-20.
6. Воблый В.А. Перечисление помеченных геодезических планарных графов. / В.А. Воблый. // Математические заметки. – 2015. – Т. 97. – № 3. – С. 336-341.
7. Воблый В.А. Перечисление помеченных геодезических графов с малым цикломатическим числом. / В.А. Воблый. // Математические заметки. 2017. – Т. 101. – Вып. 5. – С. 684-689.
8. Воблый В.А. Асимптотическое перечисление графов некоторых типов: автореф. дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.09 / Воблый Виталий Антониевич. Москва, ВЦ РАН. – 1985. – 12 с.
9. Воблый В.А. Простая формула для числа помеченных внешнепланарных k-циклических блоков и их асимптотическое перечисление. /В.А. Воблый. // Материалы XX международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О.Б. Лупанова, МГУ. – 2016. – С. 285-287.

10. Воблый В.А., Мелешко А.К. Новая формула для числа помеченных кактусов с заданным числом вершин. / В.А. Воблый, А.К. Мелешко. // Тез. докл. Международной науч. конфер. «Дискретная математика, теория графов и их прилож.», Минск. – 2013. – С. 9-11.
11. Воблый В.А., Мелешко А.К. Перечисление помеченных эйлеровых полноблочных графов. / В.А. Воблый, А.К. Мелешко. // Материалы XV Международного научно-практического семинара «Комбинаторные конфигурации и их приложения», Кировоград, 12-13 апреля 2013 г. – Кировоград, изд-во Экслюзив-Система, 2013. – С. 15-18.
12. Воблый В.А., Мелешко А.К. Перечисление помеченных полноблочно-кактусных графов. / В.А. Воблый, А.К. Мелешко. // Дискретный анализ и исследование операций. –2014. – Т. 21. – № 2. – С. 24-32.
13. Воблый В. А., Мелешко А.К. Асимптотическое перечисление помеченных эйлеровых кактусов. / В.А. Воблый, А.К. Мелешко. // Материалы XVII Международн. конфер. «Проблемы теоретической кибернетики», Казань, 16-20 июня 2014 г. – Казань, изд-во Отечество, 2014. – С. 58-60.
14. Воблый В.А., Мелешко А.К. Перечисление помеченных тетрациклических эйлеровых блоков. /В.А. Воблый, А.К. Мелешко. // Материалы XVII Международн. конфер. «Проблемы теоретической кибернетики», Казань, 16-20 июня 2014 г. – Казань, изд-во Отечество, 2014, с. 60-62.
15. Воблый В.А., Мелешко А.К. Перечисление помеченных эйлеровых тетрациклических графов. /В.А. Воблый, А.К. Мелешко. // Дискретный анализ и исследование операций. – 2014. – Т. 21. – № 5. – С. 17-22.
16. Воблый В. А., Мелешко А.К. Перечисление помеченных графов розы. / В.А. Воблый, А.К. Мелешко. // Материалы XVI Международного научно-практического семинара «Комбинаторные конфигурации и их приложения», Кировоград, 11-12 апреля 2014 г. – Кировоград, изд-во Экслюзив-Система, 2014. – С. 27-29.

17. Воблый В. А., Мелешко А.К. Перечисление помеченных двудольных кактусов. / В.А. Воблый, А.К. Мелешко. // IX Международн. конф. «Дискретная математика и теории управляющих систем», Москва и Подмосковье, 20-22 мая 2015 г. – Москва, изд-во ООО МАКС Пресс, 2015. – С. 56-58.
18. Воблый В.А., Мелешко А.К., Перечисление помеченных эйлеровых двудольных кактусов. / В.А. Воблый, А.К. Мелешко. // Материалы XVII Международного научно-практического семинара «Комбинаторные конфигурации и их приложения», Кировоград, 17-18 апреля 2015 г. – Кировоград, изд-во Экслюзив-Система, 2015. – С. 23-25.
19. Воблый В.А., Мелешко А.К. Перечисление помеченных непланарных тетрациклических графов. / В.А. Воблый, А.К. Мелешко. // Материалы XVIII Международного научно-практического семинара «Комбинаторные конфигурации и их приложения», Кировоград, 15-16 апреля 2016 г. –Кировоград, изд-во Экслюзив-Система, 2016. – С. 33-36.
20. Воблый В.А., Мелешко А.К. Перечисление помеченных цветочно-колесных графов. / В.А. Воблый, А.К. Мелешко. // Материалы Всероссийской конференции “XV Сибирская научная школа-семинар с международным участием “Компьютерная безопасность и криптография”, SIBERCRYPT’16”, Новосибирск, 5-10 сентября 2016 г. – Томск, изд-во Издательский Дом Томского государственного университета, 2016. – С.109-110.
21. Воблый В.А., Мелешко А.К. Перечисление помеченных планарных полноблоочно-кактусных графов. / В.А. Воблый, А.К. Мелешко. // Материалы XX международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О.Б. Лупанова, Москва, 20-25 июня 2016г. – Москва, изд-во механико-математического факультета МГУ, 2016. – С. 287-290.
22. Воблый В.А., Мелешко А.К. Перечисление помеченных внешнепланарных бициклических и трициклических графов. / В.А.

- Воблый, А.К. Мелешко. // Дискретный анализ и исследование операций. – 2017. – Т. 24. – № 2. – С. 18-31.
23. Воблый В.А., Мелешко А.К. Перечисление помеченных геодезических к-циклических графов. / В.А. Воблый, А.К. Мелешко. // Проблемы теоретической кибернетики, Материалы XVIII международной конференции, Пенза, 19-23 июня 2017. – Москва, изд-во ООО МАКС Пресс, 2017 – С. 56-58.
24. Воблый В.А., Мелешко А.К. Перечисление помеченных кактусов без треугольников. / В.А. Воблый, А.К. Мелешко. // Материалы XIX Международного научно-практического семинара «Комбинаторные конфигурации и их приложения», Кропивницкий, 7-8 апреля 2017 г. – Кировоград, изд-во Экслюзив-Система, 2017. – С. 17-19.
25. Гаврилов Г.П., Лисковец В.А., Пермяков П.П., Селиванов Б.И. О некоторых тенденциях теории перечисления. / Г.П. Гаврилов, В.А. Лисковец, П.П. Пермяков. – В сб.: Перечислительные задачи комбинаторного анализа, М.: Мир. – 1979. – С. 336-362.
26. Гульден Я., Джексон Д. Перечислительная комбинаторика. / Я. Гульден, Д. Джексон. – М.: Наука, ГРФМЛ. – 1981. – 504 с.
27. Дмитриев Е.Ф. Перечисление отмеченных двуцветных связных графов с небольшим цикломатическим числом. / Е.Ф. Дмитриев. – Деп. в ВИНИТИ, № 4959-85.
28. Дмитриев Е.Ф. Перечисление графов с заданными структурными свойствами: дис. канд. физ-мат. наук: 01.01.09/ Дмитриев Евгений Федорович, Институт математики АН БССР. – Минск. – 1986.
29. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И. Лекции по теории графов./ В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов. – М.: Наука, – 1990. – 384 с.
30. Иванчик И. И. Проблемы теории графов в статистической физике. Труды ФИАН. / И.И. Иванчик. – М.: Наука. –1979. – Т. 106. – С. 3-89.

31. Калмыков Г.И. Древесная классификация помеченных графов. / Г.И. Калмыков. – М.: Физматлит, 2003.
32. Калмыков Г.И. Каркасная классификация помеченных графов. / Г.И. Калмыков. – М.: Научный мир, 2006.
33. Коршунов А. Д. Основные свойства случайных графов с большим числом вершин и ребер. / А.Д. Коршунов. // УМН. – 1985. – Т. 40. – Вып. 1. – С. 107-173.
34. Лисковец В.А. Некоторые результаты комбинаторной теории перечисления графов. 1. В сб.: Комбинаторный и асимптотический анализ. / В.А. Лисковец. / Красноярск, Издат. Красноярского университета, 1975. – С. 9-36.
35. Мелешко А.К. Перечисление помеченных гладких кактусов. / А.К. Мелешко. // Материалы X Молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям, Москва, 5-11 октября 2015г. – Москва, изд-во ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2015. – С. 50-51.
36. Мелешко А.К. Перечисление помеченных геодезических эйлеровых кактусов. / А.К. Мелешко. // Материалы международной научной конференции “Дискретная математика, алгебра и их приложения”, Минск, 14-18 сентября 2015 г. – Минск, изд-во Институт математики НАН Беларуси, 2015. – С. 120-122.
37. Мелешко А.К. Перечисление помеченных геодезических полноблоно-кактусных графов. / А.К. Мелешко. // Материалы шестнадцатого симпозиума по прикладной и промышленной математике, Сочи-Дагомыс 27 сентября – 4 октября 2015 г. – Москва, изд-во Цифровая типография ООО Буки Веди, 2015. – С. 480-481.
38. Петровская Т.В., Терновский П.А. Кардиальность графов-ромашки и зубчатых графов. / Т.В. Петровская, П.А. Терновский. // Материалы XVI Международного научно-практического семинара «Комбинаторные конфигурации и их приложения», Кировоград. – 2014. – С. 116-122.

39. Прудников А.П. и др. Интегралы и ряды. / А.П. Прудников. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1981. – Т.1 – 800 с.
40. Прудников А. П., Брычков Ю.А., Маричев О.А. Интегралы и ряды: Элементарные функции./ А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.А. Маричев. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
41. Райгородский А. М. Модели случайных графов. /А.М. Райгородский. – М.: Изд-во МЦНМО, 2011. – 135 с.
42. Риордан Дж. Комбинаторные тождества./ Дж. Риордан. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
43. Степанов В. Е. О некоторых особенностях строения случайных графа вблизи критической точки. /В.Е. Степанов. // Теория вероятн. и ее примен. 1987. – Т. 32. – Вып.4. – С. 633-657.
44. Фрассер С.К.Е. Разработка математического и алгоритмического обеспечения обработки информации на основе структурного анализа геодезических графов: Автореф. Дис. к.ф.-м.н., М.: Одесский политехнический институт, 1966.
45. Харари Ф. Теория графов. / Ф. Харари. – М.: Мир, 1973. – 302 с.
46. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. / Ф. Харари, Э. Палмер. – М.: Мир, 1977. – 324 с.
47. Chemical application of graph theory. Ed. A. T. Balaban. // Academic Press, London a.o., 1976.
48. Bender E. A., Canfield E.R., McKay B.D. The asymptotic number of labeled connected graphs with a given number of vertices and edges. /E.A. Bender, E.R. Canfield, B.D. McKay. // Random Structures Algorithms 2. – 1990. – P. 127 - 169.
49. Bender E. A., Gao Z, Wormlad N.C. The number of 2-connected labeled planar graphs. / E.A. Bender, Z. Gao, N.C. Wormlad. // Electron. J. Combin, 9, 2002. – № 43.

50. Bhatti A.A., Nisar A., Kanwal M. Radio number of wheel like graphs. / A.A. Bhatti, A. Nisar, M. Kanwal. // Int. Journal of graph theory in wireless ad hoc networks. – 2011. – № 4. – P. 39-57.
51. Bodirsky M., Kang M. Generating outerplanar graphs uniformly at random. 4. / M. Bodirsky, M.Kang. // Combinatorics, Probability and Computing. – 2006. – Vol. 15. – № 3. – P. 333-343.
52. Bodirsky M, Gopel C, Kang M. Generating labeled planar graphs uniformly at random. /M. Bodirsky, C. Gopel, M. Kang. // Theoretical Computer Science 379. – 2007. – P. 377-386.
53. Bollobas B. Random graphs. / B. Bollobas. – Cambridge Univ. Press, 2001. – 498 p.
54. Carlitz L. Single variable Bell polynomials. / L. Carlitz. // Collect. Math. – 1962. – № 14. – P. 13-25.
55. Flajolet Ph., Sedgewick R. Analytic Combinatorics. /Ph. Flajolet, R. Sedgewick. – Cambridge University Press. – 2009. – 810 p.
56. Fleisher L. Building chain and cactus representation of all minimum cuts from Hao-Orlin in the same asymptotic run time. / L. Fleisher. // J. Algorithms. – 1999. – Vol. 33. – №. 1. – P. 51-72.
57. Ford G.W., Uhlenbeck G.E. Combinatorial problems in theory graphs. III. / G.W. Ford, G.E. Uhlenbeck. // Proc. Nat. Acad. Sci.USA. – 1956. – Vol. 42. – P. 529-535.
58. Ford G.W., Uhlenbeck G.E. Combinatorial problems in theory graphs. I. / G.W. Ford, G.E. Uhlenbeck. // Proc. Nat. Acad. Sci.USA. – 1956. – Vol. 42. – P. 13-25.
59. Ford G.W., Uhlenbeck G.E. Combinatorial problems in theory graphs. IV. / G.W. Ford, G.E. Uhlenbeck. // Proc. Nat. Acad. Sci.USA. – 1957. – Vol. 43. – № 1. – P. 163-165.
60. Frasser S.E. k – geodetic graphs and their application to the topological design of computer networks. / S.E. Frasser. // Proc. Argentinian Workshop on theoretical Computer Science 28, JAIIO-WAIT' 99 (1999). – P. 187-203.

61. Heap B.R. The enumeration of homeomorphically irreducible star graphs. /B.R. Heap. // Journal of mathematical physics. 1966. – Vol. 7. – № 2. – P. 1582-1587.
62. Husimi K. Note on Mayer's theory of cluster integrals. / K. Husimi. // J. Chem. Phys. – 1950. – Vol.18. – P. 682-684.
63. Janson S., Luczak T, Rucinski A. Random graphs. / S. Janson, T. Luczak, A. Rucinski. // Wiley NY, 2000.
64. Jin Ying-Lie. Enumeration of labeled connected graphs and Euler graphs with only one cut vertex. / Jin Ying-Lie. // Yokohama Math. J. – 1977. – P. 125-134.
65. Knuth D.E., Pittel B. A recurrence related to trees. /D.E. Knuth, B. Pittel // Proc. American Math. Soc. – 1989. – Vol. 105. – № 2. – P. 335-349.
66. Labelle G., Leroux P., Ducharme M.G. Graph weights arising from Mayer's theory of cluster integrals. /G. Labelle, P. Leroux, M.G. Ducharme. // Seminaire Lotharingien de Combinatoire 54, 2007, Article B54m.
67. Lan J.K., Chang G.J. Algorithmic aspects of  $k$ -domination in graphs. / J.K. Lan, G. J. Chang. // Discrete Appl. Math. –2013. – Vol. 161. – P. 1513-1520.
68. Leroux P. Enumerative problems inspired by Mayer's theory of cluster integrals. / P. Leroux. // Electron. J. Comb. – 2004. – Vol. 11. – № 32.
69. McDiarmid C., Scott A. Random graphs from a block stable class. / C. McDiarmid, A. Scott. // Europe J. Combin. – 2016. – Vol. 58. – P. 96-106.
70. Moon J.W. Counting label trees. / J.W. Moon. // Canadian mathematical monographs. – 1970. – № 1. – 113 p.
71. Nalliah M., Arumugam S. Super (a,d)- edge-antimagic total labelings of generalized friendship graph . / M. Nalliah. // J. Combin. Math. Combin. Comp. – 2013. – №84. – P. 81-90.
72. Noy M. Graph Enumeration. / M.Noy. // Ch. 6 in Handbook of Enumerative Combinatorics, Ed. M. Bona, CRC Press. – 2015. – P. 403-442.

73. Noy M. Random planar graphs and beyond. / M. Noy. // Proceedings of the International Congress of Mathematicians. – Seoul 2014. – Vol. IV. – P. 407-431.
74. Read R.C. Euler graphs on labeled nodes. / R.C. Read. // Canad. J. Math. – 1962. – № 14. – P.482-486.
75. Read R.C. Some unusual enumeration problems. /R.C. Read. // Ann. New York Acad. Sci. – 1970. – Vol. 105. – № 2. – P. 314-326.
76. Renyi A. On connected graphs I. / A. Renyi. // Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Közl. – 1959. – № 4. – P. 385-388.
77. Selkow S.M.The enumeration of labeled graphs by number of cutpoints. / S.M. Selkow. // Discrete Mathematics. – 1988. – № 185. – P. 183-191.
78. Stemple J.G., Watkins M.E. On planar geodetic graphs. /J.G. Stemple, M.E. Watkins. // J. Combin. Theory. – 1968. – Vol. 4. – P. 101-117.
79. Tazawa S. Enumeration of labeled 2-connected Euler graphs. / S. Tazawa. // J. Combinatorics, Information and System Sciences. – 1998. – V. 23. – Nos. 1-4. – P. 407-414.
80. Vicente R., Saad D., Kabashima Y. Error-correcting code on a cactus: a solvable model. /R. Vicente, D. Saad, Y. Kabashima. // Europhys. Lett. – 2000. – Vol. 51. – №. 6. – P. 698-704.
81. Voblyi V.A., Meleshko A.K. Asymptotic enumeration of labeled Eulerian pentacyclic blocks. /V.A. Voblyi, A.K. Meleshko.// International Russian-Chinese conference “Actual problems of Applied Mathematics and Physics”, Elbrus, Kabardino-Balkarian Republic, December 14-18, 2015. – Elbrus, Kabardino-Balkarian Republic, KBSC RAS, 2015. – P. 212-214.
82. Wang W., Huang Q., Belardo F. On the spectral characterization of 3-rose graphs. / W. Wang, Q. Huang, F. Belardo. // Utilitas Mathematica 91. – 2013. – P. 33-46.
83. Wang W., Mao L., Lu H. On bi-regular graphs determined by their generalized characteristic polynomials. / W. Wang, L. Mao, H. Lu. // Linear Algebra and its Applications 438. – 2013. – P. 3076-3984.

84. Wright E. M. The number of connected sparsely edged graphs. / E.M. Wright. // J. Graph Theory I. – 1977. – P. 317 – 330.
85. Wright E. M. The number of connected sparsely edged graphs III. Asymptotic results. /E.M. Wright. // J. Graph theory IV. – 1980. – P. 393-407.
86. Wright E.M. The number of connected sparsely edged graphs II. Smooth graphs and blocks. / E.M. Wright. // J. Graph theory. – 1977. – Vol. 175. – P. 335-349.
87. Wright E.M. Enumeration of smooth labeled graphs. /E.M. Wright. // Proc. of the Royal Society of Edinburgh. – 1982. – P. 205-212.