На правах рукописи

Лемтюжникова Дарья Владимировна

ПОНИЖЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ ДЛЯ БОЛЬШИХ ЗАДАЧ С РАЗРЕЖЕННЫМИ МАТРИЦАМИ

Специальность: 05.13.17 — «Теоретическая информатика»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико–математических наук

Москва — 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном учреждении «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук».

Научный руководитель:	**Цурков Владимир Иванович** доктор физико-математических наук, профессор, зав. отделом сложных систем ФИЦ ИУ РАН
Официальные оппоненты:	**Бабин Дмитрий Николаевич** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математической теории интеллектуальных системм механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова **Бурнаев Евгений Владимирович** кандидат физико–математических наук, доцент Центра по научным и инженерным вычислительным технологиям для задач с большими массивами данных, АНОО ВО «Сколковский институт науки и технологий»
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тверской государственный университет»

Защита состоится *«15» февраля 2018 г.* в *13:00* на заседании диссертационного совета *Д 002.073.05* при Федеральном государственном учреждении «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук»., расположенном по адресу: *119333, г.Москва, ул.Вавилова, д.40*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» и на сайте web.frccsc.ru.

Автореферат разослан «______» __________________ 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.073.05,
д.ф.-м.н., профессор В.В.Рязанов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность данной работы.

Разреженные матрицы появляются при постановке задач из многих научных и инженерных областей. Эффективные методы хранения и обработки таких матриц в современных вычислительных системах вызывают интерес у широкого круга исследователей. Одним из актуальных приложений разреженных матриц является решение соответствующих задач дискретной оптимизации (ДО). ДО является эффективным инструментом для моделирования многих практических задач. Это касается таких известных постановок: размещение объектов, планирование ресурсов, покрытие поверхностей, сетевая оптимизация, маршрутизация, логистика, теория расписаний, искусственный интеллект, анализ данных, робототехника и т. п. Выделение специальных структур в разреженных матрицах позволяют существенно сократить время решения.

Большинство интересных задач являются NP–трудными. Многие задачи ДО, возникающие на практике, содержат огромное число неизвестных и ограничений, поэтому они трудно решаемы. С другой стороны модели ДО для больших практических задач часто представляют собой системы, подсистемы которых слабо связанны между собой, и таких подсистем достаточно много. Поэтому естественным подходом для решения таких задач представляется разбиение на подзадачи. В связи с этим особую актуальность приобретают декомпозиционные подходы — способы разбиения больших задач на подзадачи.

Развитие информационных технологий, появление многопроцессорных комплексов, суперкомпьютеров создало условия для разработки алгоритмов ДО с распараллеливанием вычислений. Поэтому разработка в задачах ДО декомпозиционных алгоритмов и исследование возможности их реализации чрезвычайно важно.

Эффективными алгоритмами для решения разреженных задач ДО являются локальные элиминационные алгоритмы (ЛЭА). ЛЭА объединяют локальные алгоритмы декомпозиции, алгоритмы несериального динамического программирования, а также алгоритмы сегментной элиминации. Распараллеливание вычислительного процесса локального элиминационного алгоритма может существенно ускорить решение задач ДО большой размерности.

Базовыми в работе является квазиблочная структура разреженной матрицы и её обработка. С развитием вычислительной техники более актуальным становится вопрос сокращения вычислений. Для решения разреженных задач ДО естественным образом выбирается алгоритм, использующий локальные области соответствующей матрицы. Приводятся первые результаты вычислительного эксперимента, где с помощью ЛЭА решались различные задачи ДО. Содержатся результаты исследования эффективности локального алгоритма для решения особого класса задач ДО — квазиблочных задач. Также продемонстрировано, что асимптотическая средняя оценка эффективности локального алгоритма слабо зависит от алгоритма ДО, решающего подзадачи. Такая зависимость объясняется следующим образом: средняя оценка эффективности была исследована на множестве всех квазиблочных структур, но, локальные алгоритмы являются эффективными для задач с ограниченной связностью блоков. Эффективность локального алгоритма теоретически и экспериментально исследована недостаточно полно, поэтому остаётся актуальным поиск удачных модификаций ЛЭА и его сочетаний с различными точными и приближенными решателями ДО.

Основной целью исследования является выявление закономерностей в больших данных, в качестве которых выступают разреженные матрицы. При этом повышается эффективность алгоритма для решения задач, соответствующих матрицам; выделение класса задач, для которых применим метод, его ускорение, а также возможности решения задач большой размерности путём распараллеливания.

Научная новизна. В данной работе впервые сформулированы и доказаны теоремы, устанавливающие связь между параметрами матрицы и соответствующей квазиблочной структуры. Также впервые исследованы и реализованы методы выделения квазиблочной структуры для разреженных матриц. Использован алгоритм перемешивания строк и столбцов в матрице для поиска квазиблочных структур в разреженных матрицах, который практически не применялся ранее и автору неизвестны попытки его программной реализации. Введены понятия и доказаны свойства графовых структур, соответствующих порядку элиминации. Соответствующие теоремы дают основу доказательства важных свойств в проблеме нахождения оптимального исключения переменных. Протестировано влияние порядка элиминации на скорость ЛЭА. Впервые предложен и реализован ряд модификаций ЛЭА для разреженных задач ДО с квазиблочной структурой. Реализовано распараллеливание задач с квазиблочной структурой на GRID.

Научная и практическая значимость. В данной работе разработана техника понижения размерности больших разреженных матриц и соответствующих задач ДО. Исследование окрестностей переменных, определение декомпозиции задач с квазиблочной структурой, модификации локального элиминационного алгоритма и его распараллеливание продолжают ряд исследований Ю.И.Журавлёва, Ю.Ю.Финкельштейна, В.И.Цуркова, О.А.Щербины. Разработанные методы позволяют получить решение задачи ДО большой размерности за приемлемое время.

Методология и методы исследования. В работе использованы основные понятия теории графов, методы дискретной оптимизации и параллельных вычислений.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Получены системы неравенств для блочно–лестничной и блочно–дре-

вовидных структур в общем виде, а также относительно нескольких классов разреженных матриц, которые устанавливают зависимость между степенью квазиблочной структуры и числом её блоков в зависимости от размерности матрицы и числа ненулевых элементов в ней.

2. Разработаны алгоритмы выделения квазиблочной структуры для разреженных матриц.

3. В рамках теории локальных элиминационных алгоритмов введены новые понятия, а также обоснована зависимость между графовыми структурами в связи с проблемой оптимального порядка элиминации.

4. Разработаны модифицикации локального элиминационного алгоритма (ЛЭА).

5. Осуществлено распараллеливание больших задач ДО с матрицей квазиблочной структуры на системе GRID.

Степень достоверности полученных результатов подтверждается проработкой литературных источников по теме диссертации, реализацией необходимого количества численных расчётов, а также современной методикой исследования, которые соответствуют поставленным в работе целям и задачам. Научные положения, выводы и рекомендации, сформулированные в диссертации, подкреплены убедительными фактическими данными, наглядно представленными в приведенных таблицах и рисунках. Подготовка полученных результатов проведена с использованием современных программных средств.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на 8 конференциях. Также результаты были изложены на семинарах: в Сколтехе, на мехмате МГУ, в ФИЦ ИУ РАН, ИППИ РАН и др.

Связь с плановыми научными исследованиями. Работа выполнена в рамках грантов Российского фонда фундаментальных исследований:

- № 16–51–53093 Разработка эффективных алгоритмов решения специальных задач оптимизации и приложений,
- № 12-01-91162-ГФЕН_а Изучение новых оптимизационных задач большой размерности,
- № 15-01-07833 Сингулярные решения в моделях математической физики,
- № 16-51-55019 Метод обобщенной разреженной оптимизации для распознавания сложных ригидных объектов на изображениях и в видеопотоке,

Материалы диссертации опубликованы автором достаточно полно в 20 печатных изданиях, 8 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК РФ.

Личный вклад. Автор составил обзор по разреженным матрицам, исследовал их особенности и сформулировал ряд теорем, устанавливающих связь между матрицей и соответствующей квазиблочной структурой. Были исследованы алгоритм выделения квазиблочной структуры, предложил и реализовал его модификации. Автор составил обзор по декомпозиционным методам, а также сформулировал ряд понятий и доказал свойства графовых структур, соответствующих порядку элиминации и протестировано его влияние на скорость локального элиминационного алгоритма. Автором были разработаны модификации локального элиминационного алгоритма, осуществлена параллельная модификация ЛЭА была выполнена на GRID.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и одного приложения. Полный объем диссертации составляет 180 страниц с 33 рисунками и 6 таблицами. Список литературы содержит 264 наименования.

Диссертация представляется по специальности 05.13.17 «Теоретическая информатика» и соответствует пункту 5.«Разработка и исследование моделей и алгоритмов анализа данных, обнаружения закономерностей в данных и их извлечениях разработка и исследование методов и алгоритмов анализа текста, устной речи и изображений.».

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе рассматриваются разреженные матрицы, для которых выделяются квазиблочные структуры, а именно — блочно–древовидные и блочно–лестничные. Формулируется ряд теорем, в которых устанавливается связь между компонентами квазиблочной структуры в зависимости от размерности матрицы и числа ненулевых элементов в ней. Приводятся алгоритмы для выделения квазиблочных структур.

Также проведён обзор литературы по теме "Разреженные матрицы на основе которого были сформулирован следующие выводы:

1. Для хранения матриц, как правило, используются координатный формат, разреженные строчный и столбцовый форматы, симметричный формат.

2. Для базовых операций с разреженными матрицами, а именно — умножение матрицы на вектор, транспонирование матрицы, умножение матрицы на матрицу, — существуют специальные алгоритмы: модификации метода Гаусса (метод LU–разложения, метод Холецкого, алгоритм Томаса, алгоритм Кроута, алгоритм Дулитла, QR–разложение и др.), итерационные методы (методы простой итерации, Якоби, Гаусса–Зейделя, последовательной верхней релаксации, симметричной последовательной верхней релаксации, методы Крылова), численные алгоритмы для выделения треугольной формы (алгоритм поиска в глубину, алгоритм Тарьяна, алгоритм Сарджента–Уэстерберга).

3. Локальные стратегии обработки разреженных матриц используют-

ся для упорядочивании разреженной матрицы (алгоритм упорядочивания минимальной степени, алгоритм рекурсивного разбиения, поиск по максимальной степени, эвристика минимального пополнения, лексикографический поиск в ширину и др.).

4. В последнее время обработка разреженных матриц широко используется для решения задач

Введём формальное определения для разреженной матрицы.

Определение 1. Матрица A с m строками, n столбцами и числом ненулевых элементов $\mathfrak{z}$, для которой выполняется соотношение $0.5mn > \mathfrak{z}$, называется разреженной.

Выделим четыре класса разреженных матриц.

Вид матрицы	**Декларация**
Очень широкая	$n \geq 2m$
Широкая	$0.5(n+1) < m < n$
Квадратная	$n = m$
Узкая	$n < m$

Для графового представления разреженной матрицы введём понятие структурного графа.

Определение 2. Граф взаимосвязей — граф, вершины которого соответствуют номерам всех столбцов матрицы; вершины смежны, если ненулевые элементы столбцов находятся в одной строке.

Далее перейдём к понятию блочно–древовидной структуры (БД–структуры) разреженной матрицы. Для этого сформулируем понятие окрестности вершины структурного графа.

Определение 3. Окрестность вершины — множество смежных вершин.

Представим матрицу $\Omega_1 = (S_1, U_1),\ \Omega_2 = (S_2, U_2), \ldots,\ \Omega_k = (S_k, U_k)$ S_r и U_r — множества индексов столбцов и строк для r–й окрестности

$\bigcup_{r=1}^{k} U_r = M = \{1, \ldots, m\}$; (1)

$\bigcup_{r=1}^{k} S_r = N = \{1, \ldots, n\}$; (2)

$U_{r_1} \bigcap U_{r_2} = \emptyset, r_1 \neq r_2$; (3)

$S_{r_1} \bigcap S_{r_2} \bigcap S_{r_3} = \emptyset$; (4)

Определение 4. Граф без циклов G_Ω с вершинами ν_{r_i}, ν_{r_1} и ν_{r_2} смежны, если $S_{r_1} \bigcap S_{r_2} \neq \emptyset$; для которого выполняются свойства (1-4), называется блочно–древовидной структурой (БД структурой).

Определение 5. Вершины ν_{r_i}, соответствующие каждой r–й окрестности, будем называть блоками БД структуры, количество блоков обозначим $\mathtt{k}$.

Определение 6. Степенью БД структуры будем называть $\rho = \max\{\rho_1, \ldots, \rho_{\mathtt{k}}\}$, где $\rho_1, \ldots, \rho_{\mathtt{k}}$ — степени каждого блока в БД структуре.

Перейдём к теоремам о взаимосвязи параметров квазиблочной структуры. Олег Александрович Щербина сформулировал необходимое условие выделяемости БД–структуры:

Теорема 1. Если A — матрица $N \times M$ с $\mathfrak{z}_0$ нулевыми элементами, то для того, чтобы она имела БД структуру степени ρ с $\mathtt{k}$ блоками, необходимо, чтобы: $n \geq 2\mathtt{k} - 1$, $m \geq \mathtt{k} \geq 2$,

$\mathfrak{z}_0 \geq (\mathtt{k} - 2)(2m - n - 2\mathtt{k} + \rho + 2) - m(\rho - 2) - 3\mathtt{k} + 2\rho + 4.$

Данная теорема была изменена с помощью дополнительных условий и приняла следующий вид:

Лемма 1. Область определения БД структуры для разреженной матрицы задаётся следующими неравенствами:

$$\begin{cases} \rho \leq \rho_1^*, \\ 2 \leq \rho \leq \rho_2^*, \\ 3 \leq \mathtt{k} < \min(m, 0.5(n+1)), \end{cases}$$

где параметры подчиняются соотношениям $n + m - 1 \leq \mathfrak{z} < 0.5mn$, $m > 3$, $n > 3$, а верхние границы определяются как $\rho_1^* = (-2\mathtt{k}^2 + (n + 2m + 3)\mathtt{k} + \mathfrak{z} - 2m - 2n - mn)/(m - \mathtt{k})$, а $\rho_2^* = \mathtt{k} - 1$.

Данная лемма сформулирована для четырёх видов разреженных матриц. Для очень широкой матрицы она имеет вид:

Лемма 2. Область определения БД структуры задачи для очень широкой матрицы ($n \geq 2m$) задаётся следующими неравенствами:

$$\begin{cases} \rho \leq \rho_1^*, \\ 2 \leq \rho \leq \rho_2^*, \\ 3 \leq \mathtt{k} < m, \end{cases}$$

где параметры подчиняются

соотношениям

$n + m - 1 \leq \mathfrak{z} < 0.5mn$,

$3 < m < 0.5(n + 1)$,

Сформулирована лемма о числе блоков в БЛ–структуре.

Лемма 3.

1. Число блоков БЛ структуры для очень широкой матрицы:

- $3 \leq \mathtt{k} < 0.5(n+1)$ при $m > 2$, $n > 5$, $\mathfrak{z} \geq 0.5(2mn - 6m - 3n + 14)$
- $0.25(n + 2m + 3 - \xi_1) \leq \mathtt{k} < 0.5(n + 1)$ при $m > 2$, $n \geq 2m + 1$, $0.125(12n - 16 - (n - 2m + 3)^2) < \mathfrak{z} \leq 0.5(2mn - 6m - 3n + 14)$

2. Число блоков БЛ структуры для остальных матриц:

- $3 \leq \mathtt{k} < m$ при $m > 3$, $n > 2m - 1$, $\mathfrak{z} > 0.5(2mn - 6m - 3n + 14)$
- $0.25(n+2m+3-\xi_1) \leq \mathtt{k} < m$ при $m > 3$, $n > 2m-1$, $0.125(12m+6n - 25 - (n - 2m)^2) \leq \mathfrak{z} \leq 0.5(2mn - 6m - 3n + 14)$
- $0.25(n + 2m + 3 - \xi_1) \leq \mathtt{k} < m$ при $m > 3$, $5 < n \leq 2m - 1$, $0.5(4m + n - 6) < \mathfrak{z} \leq 0.5(2mn - 6m - 3n + 14)$.

При этом параметры матрицы соотносятся: $n + m - 1 \leq \mathfrak{z} < 0.5mn$, $m > 3$, $n > 3$.

Для очень широкой матрицы данная лемма имеет вид:

Лемма 5. Число блоков БЛ структуры для очень широкой матрицы ограничивается $0.25(n + 2m + 3 - \xi_1) \leq \mathtt{k} < m$, где параметры матрицы $\mathfrak{z}$ соотносятся:

- $m \geq 4$, $n > 2m + 2$, $0.5(3n - 4) < \mathfrak{z} < 0.5mn$
- $m \geq 4$, $2m \leq n \leq 2m + 2$, $m + n - 1 \leq \mathfrak{z} < 0.5mn$

где $\xi_1 = \sqrt{(n-2m+3)^2 + 8\mathfrak{z} - 12n + 16}$

Сформулированы леммы о степени БД–структуры.

Лемма 6. Степень БД структуры определяется следующим образом:

- $\rho \le \rho_2^*$, если выполняется $\mathfrak{z} \ge \mathtt{k}^2 - (n+m+2)\mathtt{k} + m + 2n + mn$,
- $\rho \le \rho_1^*$, если выполняется $\mathfrak{z} < \mathtt{k}^2 - (n+m+2)\mathtt{k} + m + 2n + mn$,

Лемма 7. Число блоков БД структуры ограничивается сверху $\mathtt{k} < \min(m, 0.5(n+1))$. Нижняя граница выводится из соотношений:

если $\rho_1^* = \rho_2^*$, то

1) $3 \le 0.5(n+m+2-\xi_2) < \min(m, 0.5(n+1))$;

2) $0.5(n+m+2-\xi_2) \ge \min(m, 0.5(n+1))$;

если $\rho_1^* = 2$, то

1) $3 \le 0.25(n+2m+5-\xi_1)$;

2) $0.25(n+2m+5-\xi_1) < 3$;

где $\xi_1 = \sqrt{(n-2m+3)^2 + 8\mathfrak{z} - 12n + 16}$, а $\xi_2 = \sqrt{(n-m)^2 + 4\mathfrak{z} - 4n + 4)}$.

Параметры матрицы подчиняются следующим соотношениям:

- $m \ge 5$, $n \ge 4$, $n+m-1 \le \mathfrak{z} < 0.5mn$;
- $m = 4$, $n \ge 4$, $n+3 \le \mathfrak{z} < 2n$.

где $\rho_1^* = (-2\mathtt{k}^2 + (n+2m+3)\mathtt{k} + \mathfrak{z} - 2m - 2n - mn)/(m-\mathtt{k})$, а $\rho_2^* = \mathtt{k} - 1$.

Рассмотрим лемму о нахождении БД структуры.

Лемма 8. Для того, чтобы в матрице общего вида можно было выделить БД структуру, её параметры должны удовлетворять соотношениям $m \ge 4$, $n \ge 4$, $n+m-1 \le \mathfrak{z} < 0.5mn$. При этом имеет место:

- $3 \le 0.25(n+2m+5-\xi_1) \le min(m, 0.5(n+1))$
- $0.25(n+2m+5-\xi_1) \le 3 \le min(m, 0.5(n+1))$

Полученные результаты обобщаются в заключительной теореме о связи параметров БД–структуры и соответствующей ей разреженной матрицы.

Теорема 2. Степень БД структуры подчиняется соотношению $2 \leq \rho \leq \rho_2^*$, если число блоков $0.5(m+n+2-\xi_2) \leq \mathtt{k} < \min(m, 0.5(n+1))$;

степень БД структуры подчиняется соотношению $2 \leq \rho \leq \rho_1^*$, если число блоков $0.25(n+2m+5-\xi_1) \leq \mathtt{k} < 0.5(m+n+2-\xi_2))$, где $\xi_1 = \sqrt{(n-2m+3)^2+8\mathfrak{z}-12n+16}$, а $\xi_2 = \sqrt{(n-m)^2+4\mathfrak{z}-4n+4)}$,

а верхние границы определяются как $\rho_1^* = (-2\mathtt{k}^2+(n+2m+3)\mathtt{k}+\mathfrak{z}-2m-2n-mn)/(m-\mathtt{k})$, а $\rho_2^* = \mathtt{k}-1$.

Параметры $n, m, \mathfrak{z}$:

1. Для очень широких матриц $m \geq 4$, $n \geq 2m$, $2n-m+1 \leq \mathfrak{z} < 0.5mn$

2. Для широких матриц $n+m-1 \leq \mathfrak{z} < 0.5mn$, где

- $4 \leq m \leq 6$, $m+1 \leq n \leq 7$,
- $5 \leq m \leq 7$, $8 \leq n \leq 2m-1$,
- $m \geq 8$, $m+1 \leq n \leq 2m-1$,

3. Для квадратных матриц $m = n$, $n \geq 4$, $2n-1 \leq \mathfrak{z} < 0.5n^2$

4. Для узких матриц $m+n-1 \leq \mathfrak{z} < 0.5mn$, где

- $6 \leq m \leq 7$, $5 \leq n \leq m-1$
- $m \geq 8$, $5 \leq n \leq 7$,
- $m \geq 9$, $8 \leq n \leq m-1$.

Юлий Юльевич Финкельштейн сформулироал алгоритм выделения БЛ–структуры, основанный на перемешивании строк и столбцов. Данный алгоритм был модифицирован, сравнение алгоритмов выглядит следующим образом:

Задача	Основной		Модифицированный	
	p	s_{max}	p	s_{max}
adder_15	31	4	16	4
adder_50	61	6	51	6
adder_99	121	6	101	6
dubois23	23	2	23	2
dubois30	30	2	30	2
dubois50	50	2	50	2
dubois100	98	6	2	4
pret60_25	8	10	7	10
pret60_60	8	10	7	10
pret150_25	15	12	11	10
pret150_75	15	12	11	10
grid2d_10	8	10	2	3
grid10	16	10	3	9
grid3d_4	5	12	2	6
bridge_15	21	10	4	10
bridge_50	56	10	5	8
bridge_75	78	9	4	9

Предложена модификация основного алгоритма для БД–структур, основанная на процедуре выделения подблоков.

Результаты первой главы опубликованы в работах [2, 7, 20].

Во второй главе устанавливаются элиминационные правила, а также вводятся понятия и доказываются свойства графовых структур, соответствующих порядку элиминации для локального элиминационного алгоритма (ЛЭА). ЛЭА представляет из себя декомпозиционный итерационный метод, где на каждом шаге фиксируется (исключается, элиминируется) переменная или группа переменных. Они принимают фиксированные значения 0 или 1, если речь идёт о булевых постановках. При этом оказывается, что правила выбора элиминации влияет на скорость работы алгоритма. Правила исключения формулируются в терминах понятия теории графов. Результаты второй главы, в частности, позволяют утверждать, что задача об оптимальном выборе порядка является NP–полной.

Также проведён обзор литературы по теме "Декомпозиционные методы основной вывод из которого заключается в том, что в последнее время декомпозиционные методы широко используются для решения задач анализа данных большой размерности, матрицы которых являются разреженными, а также многие задачи являются оптимизационными.

Под задачей дискретной оптимизации (ДО) будем понимать задачу следующего вида:

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min, \\ a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m, \\ \{x_1; \ldots; x_n\} \in Z. \end{cases}$$

ЛЭА состоит из двух частей, основная идея которых заключается в следующем:

- элиминация переменных, вычисление и запоминание информации в виде локальных решений и получение в конце значения критерия;
- нахождение глобального решения всей задачи по найденным в прямой части таблицам с локальными решениями, обеспечивающего достижение критерия в прямой части.

Перейдём к теоремам о локальных алгоритмах, сформулированных Юрием Ивановичем Журавлёвым.

Теорема 3. Результат вычисления основных предикатов локального алгоритма с монотонными функциями не зависит от порядка рассмотрения элементов множества.

Теорема 4. Для всякого класса локально равных алгоритмов с одинаковой памятью существует наилучший локальный алгоритм.

Олег Александрович Щербина сформулировал критерий для определения оптимального порядка элиминации:

Теорема 5. Для графа взаимосвязей существует оптимальный порядок элиминации тогда и только тогда, когда существует дерево декомпозиции, каждая вершина которого является кликой (полным подграфом) в этом графе.

Сформулируем основные определения. Введём понятие дерева декомпозиции.

Определение 7. Дерево декомпозиции (ДД) для заданного графа $G(X, E)$ — $(\{\mathbf{X_i} | i \in I\}, T = (I, F))$, где $\{\mathbf{X_i} | i \in I\}$ — семейство подмножеств $v \in X$ и T — дерево с множеством вершин i и множеством ребер $F \subseteq I \times I$ такими, что:

1) $\bigcup_{i \in I} \mathbf{X_i} = X$;

2) для всех $(v, w) \in E$ существует $i \in I$ такое, что $v \in \mathbf{X_i}$, и $w \in \mathbf{X_i}$;

3) для всех $i, j, k \in I$ таких, что j лежит на пути T из i в k, справедливо включение $\mathbf{X_i} \cap \mathbf{X_k} \subseteq \mathbf{X_j}$.

Перейдём к понятиям, связанным с элиминацией. Введём определение элиминации вершины.

Определение 8. Элиминация вершины — удаление некоторой вершины и всех ребер, исходящих из нее, а затем соединение ребрами всех ранее не соседних вершин из её окрестности. Порядок элиминации α — последовательность всех элиминированных вершин. Обозначим процедуру элиминации $G' = elim\{x_i\}$.

Введём понятие процесса элиминационной игры.

Определение 9. Элиминационная игра — последовательная элиминация вершин $x_1, \ldots, x_n$ порождает последовательность графов.

Введём понятие пополненного графа.

Определение 10. Пополненный граф G^+_α — граф, который получается из графа ограничений в результате работы алгоритма элиминационной игры.

Перейдём к определению монотонной окрестности.

Определение 11. Для порядка элиминации α вершин $x_1, \ldots, x_n$ через $\overline{\alpha}_i$ обозначим множество вершин с индексами из α, большими $i-1$: $\overline{\alpha}_i = \{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\}$. Тогда монотонной окрестностью вершины x_i называется множество соседей x_i, с индексами, большими, чем i: $\overline{Nb}^\alpha_G(x_i) = \{x_j \in Nb_G(x_i) | j > i\} = Nb_G \cap \overline{\alpha}$.

Сформулируем определения элиминационного и обобщённого элиминационного деревьев.

Определение 12. Элиминационным деревом (ЭД) графа $G(X, E)$ для упорядочения α называется ориентированное дерево $\vec{T}_\alpha$, множество вершин X совпадает с вершинами граф G, а множество ребер определяется с помощью отношения «предок — потомок»: предком вершины x является первая (согласно упорядочению α) вершина из монотонной окрестности $\overline{Nb}^\alpha_{G^+_\alpha}(x)$ вершины x в пополненном графе G^+_α. Обобщённое дерево элиминаций (ОЭД — ЭД, каждой вершиной которого является связный подграф исходного графа.

Сформулируем алгоритм выделения ОЭД:

УТВЕРЖДЕНИЕ $G'(X', E') := G(X, E)$, $F := \emptyset$;

ПРОЦЕДУРА $E(G(X, E))$:

Шаг 1. **ЕСЛИ** $G'(X', E') = \emptyset$ **ТО КОНЕЦ ПРОЦЕДУРЫ**

Шаг 2. **ЕСЛИ** $Nb(x_{i_1}) \cap \ldots \cap Nb(x_{i_k}) = \emptyset$ ТО $G'(X', E') = elim(\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\})$

Шаг 3. **ЕСЛИ** $x_i \in Nb(x_j)$ ТО $F = F \cup (x_i, x_j)$, где x_j — вершина, элиминированная на предыдущей итерации шаге, а x_i — вершина, элиминированная на текущей итерации.

Шаг 4. $ED(G'(X', E'))$

Перейдём к заключительной теореме взаимосвязи элиминационного дерева для ЛЭА и дерева декомпозиции задачи ДО.

Теорема 6. Пусть $G = (X, E)$ — заданный граф и α — порядок элиминации элементов графа G. Пусть G_α^+ — пополненный граф относительно G. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, и для всех $x_i \in X$ $\alpha(x_i) = i$. Для данных G и порядка элиминации α алгоритм выделения ОЭД строит древовидную декомпозицию.

Результаты, представленные во второй главе опубликованы следующих работах: [5, 16].

В третьей главе рассматриваются локальные элиминационные алгоритмы О.А. Щербины в применении к задачам с квазиблочной структурой — локальные блочно–элиминационные алгоритмы (ЛБЭА). Рассматриваются модификации ЛБЭА, которые позволяют существенно его ускорить. Это эвристический алгоритм (ЭЛБЭА), а также ЛБЭА, использующие предобработку, параметрическую оптимизацию и релаксации. Также осуществляется распараллеливание задач с квазиблочной структурой. Для этого используется независимое решение промежуточных блочных задач на отдельных процессорах.

Также проведён обзор литературы по теме "Распараллеливание задач ЦЛП основной вывод из которого заключается в том, что в последнее время методы распараллеливания широко используются для решения задач ЦЛП большой размерности, матрицы которых являются разреженными.

Далее будем рассматривать частный случай ЛЭА — локальный блочно–элиминационный алгоритм (ЛБЭА), который формулируется следующим образом:

Шаг 1. Положить $\nu = L$, $J_r = \emptyset$ для всех $r \in R_L$.

Шаг 2. Для каждой вершины $r = r_l^{(\nu)}$, $l = 1, \ldots, l_\nu$ слоя ν дерева D решить задачу z_{D_r}. Если эта задача не имеет решения ни для одной вершины данного слоя — перейти к шагу 5, в противном случае — к шагу 3.

Шаг 3. Если $\nu \geq 2$, то перейти на слой выше, т.е. положить $\nu := \nu - 1$ и перейти к шагу 2, иначе — к шагу 4.

Шаг 4. Конец вычислений. Решение задачи z_{D_r} на уровне $\nu = 1$ является решением исходной задачи: $z_{max} = f_{D_1}$.

Шаг 5. Конец вычислений. Задача не имеет допустимых решений.

Был проведён эксперимент, подтверждающий эффективность ЛБЭА для задач ЦЛП большой размерности. Тестовые задачи ЦЛП генерировались исходя из заданного общего количества переменных, связывающих переменных между блоками, а также числа ограничений. Размеры и число блоков вычислялись согласно числу переменных и ограничений исходной задачи. С помощью генератора случайных чисел задавались остальные компоненты задачи: коэффициенты целевой функции, коэффициенты матрицы ограничений и правых частей для каждого блока. Каждая тестовая задача решалась с использованием следующих алгоритмов. Первый алгоритм — это базовый решатель SYMPHONY для задач частично–целочисленного линейного программирования (ЧЦЛП). Второй алгоритм — ЛБЭА, который использовал с решатель SYMPHONY для решения подзадач, соответствующих блокам. Третий алгоритм — вариация второго алгоритма, где решатель SYMPHONY использовался с поддержкой технологии тёплого старта (ТС).

	m	n	k	s	Symph	Symph+LEA	Symph+LEA+PA
1	50	150	25	2	1,5722	0,0301	0,0316
2	100	300	50	4	3,3821	0,1588	0,1579
3	150	500	75	6	—	0,0765	0,0774
4	200	800	100	8	—	0,0367	0,0395
5	250	1000	125	10	—	0,5681	0,5772

В таблице находятся результаты вышеописанного эксперимента. m — число ограничений, n — число переменных задачи, k — число блоков соответствующей структуры, s — максимальный сепаратор, Symphony — время, за которое решается данная задача с помощью Symphony без ЛБЭА, Symphony + LEA — время, за которое решается данная задача с помощью Symphony и ЛБЭА, Symphony + LEA + PA — время, за которое решается данная задача с помощью Symphony и ЛБЭА с использованием постоптимального анализа. Прочерк ставился, если время решения задачи составляет более двух часов.

В результате было установлено явное преимущество второго и третьего алгоритмов над первым. В частности, эксперимент показал, что второй алгоритм становился менее эффективным из–за увеличения объема перебора при решении подзадач в блоках, если увеличивать количество связывающих переменных в задачах с одинаковым числом переменных и размером блоков. В этом случае разумно использовать третий алгоритм, а именно ЛБЭА в сочетании с решателем SYMPHONY, когда используются принципы параметрической оптимизации (технологию ТС). Дело в том, что соответствующие одному и тому же блоку задачи ЦЛП отличаются одна от другой только правыми частями для разных значений связывающих переменных. Алгоритм получает информацию о решении и использует её для анализа последующих задач, что позволяет решать каждую задачу не полностью, а частично при переборе значений связывающих переменных. Значит с помощью параметрического программирования можно существенно увеличить производительность ЛБЭА. Однако результат эксперимента оказался неоднозначным. Время решения большинства задач с использованием второго и третьего алгоритмов практически сопоставимо. Для некоторых тестовых задач параметрическое программирование оказалась неэффективным. Было замечено также, что что при малых размерностях эффективность ЛБЭА отсутствует.

Локальный элиминационный алгоритм допускает понижение перебора с помощью организации приближенного решения. Мощное направление в развитии приближенных подходов естественным образом возникло внутри точных методов (в основном методов ветвей и границ). При этом неоднократно отмечалось, что для значительного большинства прикладных задач совершенно достаточно вместо точного получить хорошее приближенное решение. Принципиальные вычислительные трудности, возникающие при применении точных методов, и в то же время достаточность хорошего приближенного решения для многих прикладных задач — вот основные источники повышенного интереса к приближенным методам.

Приближенные модификации ЛБЭА:

— ЛБЭА с релаксациями (построением оценочных задач)

1) линейная релаксация: условия $x_j = \{0; 1\}$ заменяются неравенствами $0 \leq x_j \leq 1$;

2) ранцевая релаксация: условия $Z = min\{cx : Ax \geq b, x \in \mathcal{G} \subset R^n, \text{целое}\}$ заменяется неотрицательной линейной комбинацией исходных ограничений

$Z_R(x, u) = min\{cx : uAx \geq ub, x \in \mathcal{G}_R \subset R^n, \text{целое}\}, u \geq 0$

— эвристический ЛБЭА (ЭЛБЭА) уменьшает число переборов за счёт процедуры, позволяющей «предсказать» искомые оптимальные значения перемычек $x^*_{S_{rr'}}$; зная близкие к оптимальным значения перемычек $x_{S_{rr'}}$, можно перебрать некоторую их окрестность

— ЛБЭА с препроцессингом (ЛБЭАпр) уменьшает размерность исходной задачи путем исключения переменных и ограничений

—ЛБЭА с жадными алгоритмами

В качестве примера приведём одну из типичных приближенных модификаций ЛБЭА. Применим к исходной задаче ранцевую релаксацию таким образом, что в каждой подзадаче одно ограничение — вектор, каждый элемент которого — сумма элементов первоначальной матрицы ограничений по строкам. Решим полученные релаксированные подзадачи, значения переменных, полученных после решения релаксированной задачи, подставим в исходную задачу. Результаты вычислительного эксперимента представлены в таблице. Для проверки эффективности приближенных алгоритмов в качестве тестовых задач были взяты пакеты задач, задачи в которых отличаются только размерами сепараторов между блоками. Это позволяет узнать, каким образом увеличение размера сепараторов влияет на точность приближенных алгоритмов.

	m	n	k	s	Точность	Ускорение	К–во ошибок
1	100	300	10	6	99,31	12,12	3
2	100	300	10	10	98,40	12,52	11
3	100	300	10	14	99,02	4,50	11
4	100	600	10	6	99,85	11,34	1
5	100	600	10	10	99,51	64,26	4
6	100	600	10	14	99,59	3,55	4
7	200	500	10	6	99,49	557,13	4
8	200	500	10	10	99,34	71,37	8
9	200	500	10	14	98,72	3,82	12

В данной таблице введены следующие обозначения: m — число ограничений, n — число переменных задачи, k — число блоков соответствующей структуры, s — максимальный сепаратор, точность — точность приближенных алгоритмов относительно точного ЛБЭА, ускорение — во сколько раз приближенный алгоритм работает быстрее, чем ЛБЭА, к–во ошибок — сколько переменных из сепараторов было определено неверно. Основным выводом из данной эксперимента является то, что время, затраченное на решение оценочных релаксированных задач, приводит к увеличению общего времени счета даже в случае отсева с помощью релаксации большого числа задач.

Перейдём к параллельным методам решения задач ЦЛП большой размерности. Существуют две основные стратегии распараллеливания: вершинные(ускоряют конкретную операцию на уровне вершины), древовидные (параллельное решение независимых вершин).

Для исследования ЛБЭА были сгенерированы разреженные задачи ЦЛП, в которых можно выделить БД–структуру. Задачи с БД–структурой содержали 50 000 переменных и 100 ограничений и решались в среднем за 17 минут. Задачи разбивались на 15 подзадач с глубиной дерева — 5. При этом подзадачи могли содержать максимально 10 000 переменных 20 ограничений, размер сепаратора — 4, а число вершин потомков — 12.

Задачи с БЛ–структурой содержали 100 000 переменных и 100 ограничений и решались в среднем за 6 часов. Задачи разбивались на 5 подзадач с глубиной дерева — 5. При этом подзадачи могли содержать максимально 20 000 переменных 20 ограничений, размер сепаратора и число вершин потомков — 4.

Предложенные задачи с БД–структурой и БЛ–структурой не могут быть решены точно только с помощью «решателя» SCIP без ЛБЭА.

Для задачи с БД–структурой получен хороший баланс подзадач, решение исходной задачи происходит за 17 минут. Для задачи с БЛ структурой получен плохой баланс подзадач, решение исходной задачи происходит за 335 минут. Здесь большое число подзадач обрабатывается очень быстро. Причина в том, что большое число подзадач несовместны. К сожалению, препроцессинг AMPLа не позволяет регулярным образом «пропустить» заведомо несовместную подзадачу. Поэтому препроцессинг приходится отключать и «поручать» проверку несовместности решателям.

Основным результатом данного эксперимента является реализация ЛБЭАП для решения задач ЦЛП со специальной структурой с помощью

GRID. В результате проведенного вычислительного эксперимента было отмечено, что для задач с БД– и БЛ–структурой ЛБЭАП гораздо эффективнее, чем решатель без ЛБЭАП.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [1, 3, 4, 6, 8–15, 17–19].

В заключении сформулированные основные результаты, полученные в ходе работы над диссертацией. азработана техника понижения размерности разреженных матриц и соответствующих задач ДО большой размерности за счёт выделения квазиблочных структур и последующей их обработки.

В данной работе удалось сформировать метод выделения квазиблочных структур для разреженных матриц, разработать и реализовать алгоритмы выделения таких структур и последующего решения соответствующих задач ДО. Осуществлено распараллеливание задач ДО на GRID. Это позволило получить решение для задач, которые в силу размерности не могут быть решены с помощью обычных компьютеров.

Поставлен ряд новых задач в рассматриваемой области, в частности, оценка количества вычислений при распараллеливании, выделение классов задач с полиномиальной сложностью при выборе порядка исключений в локальном алгоритме, применение теорем о составе квазиблочной структуры для оптимального выбора количества процессоров при распараллеливании, а также оценка количества вычислений для алгоритмов выделения блочно–лестничной и блочно–древовидной структуры.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Научные статьи, опубликованные в изданиях из перечня ВАК:

1. Лемтюжникова Д. В., Щербина О. А. Некоторые аспекты распараллеливания локального элиминационного алгоритма // Таврический

вестник информатики и математики. 2012. Т. 1. С. 56–65.

2. Лемтюжникова Д. В., Свириденко А. В., Щербина О. А. Алгоритм выделения блочно–древовидной структуры в разреженных задачах дискретной оптимизации // Таврический вестник информатики и математики. 2012. Т. 1. С. 44–55.

3. Лемтюжникова Д. В., Щербина О. А. Локальный элиминационный алгоритм и параллельные вычисления // Интеллектуальные системы. 2013. Т. 17, No 1–4. С. 490–494

4. Лемтюжникова Д. В. Параллельное представление локального элиминационного алгоритма для решения разреженных задач дискретной оптимизации // Компьютерные исследования и моделирование. 2015. Т. 7, No 3. С. 680–686.

5. Д. В. Лемтюжникова Д.В. Ковков. Декомпозиция в многомерных задачах с разреженными матрицами // Известия РАН: Теория систем и управления. 2018. No 1.

6. Д. В. Лемтюжникова Д.В. Ковков. Тестирование алгоритмов для целочисленных квазиблочных задач оптимизации // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана, серия Информационные технологии. 2017. No 6

7. Д. В. Лемтюжникова Д.В. Ковков. Задачи дискретной оптимизации с квазиблочными матрицами // International Journal of Open Information Technologies. 2017. No 8.

8. Д. В. Лемтюжникова В.В. Волошинов В.И. Цурков. Распараллеливание на grid задач дискретной оптимизации с матрицами квазиблочной структуры // Известия РАН: Теория систем и управления. 2017. No 6.

Публикации в других изданиях

9. Лемтюжникова Д. В., Щербина О. А. Локальный элиминационный алгоритм и параллельные вычисления // Материалы X Международной конференции [«Интеллектуальные системы и компьютерные науки»](Москва, 5–10 декабря). М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2011. С.

357–360.

10. Лемтюжникова Д. В., Щербина О. А. Распараллеливание локального элиминационного алгоритма в блочных задачах дискретной оптимизации // Материалы V Международной конференции [«Танаевские чтения»] (Минск, 28–29 марта). Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2012. С. 55–60.

11. Лемтюжникова Д. В., Свириденко А. В. Вычислительные аспекты реализации локального элиминационного алгоритма для разреженных задач дискретной оптимизации // Материалы XIX Международной конференции [«Ломоносов 2012»] (Москва, 9–13 апреля) / под ред. А.И. Андреева, А.В. Андриянова, Е.А. Антипова [и др.]. М.: МАКС Пресс, 2012.

12. Лемтюжникова Д. В., Щербина О. А. Некоторые аспекты распараллеливания локального элиминационного алгоритма для задач дискретной оптимизации // Материалы V Всероссийской конференции [«Проблемы оптимизации и экономические приложения»] (Омск, 02–06 июля). 2012. с. 145.

13. Lemtyuzhnikova D., Shcherbina O. Parallel Local Elimination Algorithms for Sparse Discrete Optimization Problems // 12th International Conference ["Parallel Problem Solving From Nature (PPSN)"] (Taormina, 1–5 September). 2012. URL: http://neo.lcc.uma.es/workshops/PPSN2012/papers/p2.pdf.

14. Lemtyuzhnikova D., Shcherbina O. Parallel Local Elimination Algorithms for Sparse Discrete Optimization Problems. 2012.
URL: http://neo.lcc.uma.es/workshops/PPSN2012/papers/p2.pdf.

15. Lemtyuzhnikova D., Sviridenko A., Shcherbina O. On local elimination algorithms for sparse discrete optimization problems // IV International Conference [Problems of Cybernetics and Informatics (PCI)], (Baku, 12–14 September). 2012. P. 1–4.

16. Lemtyuzhnikova D., Sviridenko A., Shcherbina O. On improvement

of local algorithms for discrete optimization problems // IV International Conferece on Optimization Methods and Applications "Optimization and applications"(Montenegro, September 22–28) / Ed. by V. Malkova. 2013. P. 106–107.

17. Лемтюжникова Д.В., Свириденко А.В., Щербина О.А. Стратегии повышения эффективности локального элиминационного алгоритма // Материалы Международной конференции [«Современная информатика: проблемы, достижения, и перспективы развития»], (Киев, 12–13 сентября). К: Институт кибернетики имени В.М.Глушкова НАН Украины, 2013. с. 8.

18. Лемтюжникова Д. В. Параллельное представление локального элиминационного алгоритма для решения разреженных задач дискретной оптимизации // Материалы 6–й международной конференции «Распределенные вычисления и Грид–технологии в науке и образовании», (Дубна, 30 июня – 5 июля). 2014.

19. Лемтюжникова Д. В. Модификация локального элиминационного алгоритма для эффективного решения больших разреженных задач дискретной оптимизации // Математические методы распознавания образов: 17–ая Всеросс. конф. М.: Торус, 2015. С. 108–109.

20. Лемтюжникова Д. В. Декомпозиция разреженных матриц в задачах целочисленного программирования // Математические методы распознавания образов: 19–ая Всеросс. конф. М.: Торус, 2017. С. 56–57.