

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи



Солнцева-Чалей Мария Олеговна

**МЕТОДЫ АНАЛИЗА МНОГОМЕРНЫХ ДАННЫХ
ПОСАДОЧНЫХ ТРАЕКТОРИЙ САМОЛЁТОВ**

Специальность 05.13.17

Теоретические основы информатики

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Научные руководители:

Б.Г. Кухаренко к.ф.-м.н., доцент

В.Ю. Востоков к.т.н, доцент

Москва,

2018 год

Содержание

Основные обозначения	3
Введение	5
Глава 1. Анализ многомерных временных рядов, представленных посадочными траекториями самолётов	14
1.1 Актуальность исследования и обзор литературы	14
1.2 Описание анализируемых данных	21
1.3 Основные подходы к анализу многомерных временных рядов, представленных четырёхмерными посадочными траекториями самолётов	27
1.4 Выводы по Главе 1	32
Глава 2. Применение методов анализа данных к обработке многомерных временных рядов, представленных посадочными траекториями самолётов в двумерном случае	33
2.1 Метод полиномиальных регрессий	37
2.2 Представление многомерных траекторий в пространстве состояний	46
2.2.1 Модели линейных динамических систем (ЛДС)	46
2.2.2 Модели нелинейных динамических систем (НЛДС)	52
2.2.3 Марковская модель непрерывного скрытого профиля (СРМ)	59
2.3 Представление многомерных траекторий в абстрактных пространствах характеристик	68
2.3.1 Покомпонентный многомерный дискриминантный анализ .	68
2.3.2 Отображение в абстрактные пространства характеристик .	74
2.3.3 Спектральный метод с использованием полярной кривизны	85
2.4 Алгоритм разбиения воздушного пространства зоны аэропорта на сектора (секторизация воздушного пространства в двумерном случае)	96

Выводы по Главе 2	97
Глава 3. Разработка алгоритмов анализа многомерных временных рядов, представленных четырёхмерными посадочными траекториями самолётов, в трёхмерном случае	98
3.1 Определение характерной геометрической асимптоты многомерных траекторий движения с заданным параметром порога	98
3.2 Алгоритм устойчивого разбиения набора траекторий на пучки траекторий, асимптотически сходящиеся с заданным параметром порога (секторизация воздушного пространства в трёхмерном случае)	104
3.3 Оптимационная задача с ограничениями по определению центроида для выделенного пучка многомерных траекторий движения	106
3.4 Алгоритм определения характерной (опорной) траектории посадки – центроида для выделенного пучка многомерных траекторий движения	108
Выводы по Главе 3	109
Заключение	110
Литература	111

Основные обозначения

- $\mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^{D \times L}$ – вектор, представляющий многомерную траекторию;
- $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^{1 \times L}$ – вектор траектории в одномерном пространстве измерений;
- $\{\mathbf{X}_n, n = \overline{1, N}\}$ – набор многомерных траекторий;
- D – размерность пространства измерений (в случае 4D-траекторий (x,y,z,V));
- $d = \overline{1, D}$ – индекс фиксированного пространства измерений;
- L – максимальная длина траекторий;
- L_n – длина траектории \mathbf{X}_n ;
- $X_n[L_n]$ – конечная координата траектории на плоскости посадки;
- $\mathbb{N}_k, k = \overline{1, K_0}$ – пучок многомерных траекторий;
- K_0 – число пучков;
- $\mathfrak{C}_k, k = \overline{1, K_0}$ – вектор, представляющий центроид пучка многомерных траекторий;
- $\mathfrak{C}[L_k]$ – конечная координата центроида на плоскости посадки;
- ε – параметр порога (порядка ширины ВПП);
- $\boldsymbol{\epsilon}_n$ – гауссов шум с нулевым средним;
- $\boldsymbol{\beta}_k$ – вектор коэффициентов полиномиальной регрессии;
- \mathbf{T}_n – матрица Вандермонта;
- Υ_n – матрица, получаемая из \mathbf{T}_n при преобразованиях масштабирования и сдвига во времени;
- $\{\Phi_n\} = \{a_n, b_n, c_n, l_n\}$ – параметры регрессионной модели;
- a_n, b_n – параметры масштабирования и сдвига во времени;
- c_n, l_n – параметры масштабирования и сдвига в пространстве измерений;
- $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}^2)$ – гауссово распределение со средним $\boldsymbol{\mu}$ и дисперсией $\boldsymbol{\sigma}^2$;
- $\{\mathbb{C}_k, k = \overline{1, K}\}$ – выборки, полученные в результате разбиения исходного набора траекторий;
- $r_{nk}, n = \overline{1, N}, k = \overline{1, K}$ – бинарная индикаторная переменная принадлежности траектории \mathbf{X}_n выборке \mathbb{C}_k ($r_{nk} \in \{0, 1\}$);

\mathfrak{J} – целевая функция алгоритма K-means;

N_k – число траекторий в выборке;

$a_j^*, b_j^*, c_j^*, d_j^*, j = \overline{1, 2}$ – параметры модели ортогональной линейной регрессии;

θ – вектор параметров моделей ортогональной регрессии;

\mathfrak{M} – геометрическая асимптота;

$\mathfrak{Z} = \{\mathfrak{Z}[i], i = \overline{1, M}\}$ – скрытая запись модели непрерывного скрытого профиля;

$\mathfrak{Z}[i], i = \overline{1, M}$ – элементы скрытой записи \mathfrak{Z} ;

Введение

Актуальность темы. Усложнение технических средств, рост интенсивности их использования и повышение требований эксплуатационной безопасности делают задачу обработки больших массивов данных (мониторинга технических средств) в режиме реального времени крайне актуальной. Одно из перспективных направлений решения указанной задачи связано с разработкой методов и алгоритмов обработки данных, учитывающих их характерные (специфические) особенности. Данные мониторинга технических средств могут быть представлены в виде многомерных временных рядов – последовательности векторов, компонентами которых являются значения различных показателей реализуемого процесса, зафиксированных в один момент времени. Типичным примером подобного массива данных являются посадочные траектории самолетов, фиксируемые радарами. К числу характерных (специфических) особенностей посадочных траекторий следует отнести:

- их кривизну и закрученность,
- возможность образования асимптотически сходящихся пучков,
- наличие в рамках пучка множественности пространственных пересечений.

Посадка (согласно статистике Росавиации и ИКАО) является наиболее критическим (с точки зрения безопасности) этапом полёта, в связи с чем в условиях постоянного увеличения воздушного трафика и загруженности аэропортов особую важность приобретают задачи оптимизации загруженности взлётно-посадочных полос и совершенствования существующих систем управления воздушным движением, решение которых без анализа посадочных траекторий не может быть корректно.

В настоящее время принят и реализуется ряд государственных и межгосударственных программ, направленных, в том числе, на поддержание высокого уровня безопасности полетов в современных условиях загруженности. В первую очередь, следует выделить следующие программы:

- федеральную целевую программу «Модернизация Единой системы организации воздушного движения Российской Федерации (2009 - 2020 годы)», утвержденную Постановлением Правительства Российской Федерации от 1 сентября 2008 г. № 652;
- научно-исследовательскую программу Single European Sky Air Traffic Management Research (SESAR) Program, инициированную Еврокомиссией в 2005 году;
- программу развития системы воздушного транспорта «Next Generation Air Transport System», для реализации которой Конгресс США в 2003 году учредил Joint Planning and Development Office.

В рамках указанных программ проводятся исследования, в которых методы анализа данных (data mining) применяются при обработке данных посадочных траекторий самолётов, регистрируемых радаром в зоне аэропорта, с целью:

- выделить при рассмотрении набора траекторий установившиеся потоки движения – пучки посадочных траекторий;
- определить характерную (типичную) траекторию посадки на данную ВПП,
- определить в наборе успешных посадок на заданную ВПП нетипичную траекторию.

(Следует отметить, что решение трех сформулированных задач крайне важно в ситуациях, когда одна диспетчерская служба (радар) обслуживает несколько независимых между собой аэропортов, например, как в районе залива Сан-Франциско, где расположено более 25 различных аэропортов, при этом более 10 аэропортов не имеют собственных диспетчерских служб (см. https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_airports_in_the_San_Francisco_Bay_Area)).

Актуальность задачи выделения установившихся потоков движения обусловлена необходимостью разделения воздушного пространства на зоны ответственности между диспетчерскими службами и/или их сотрудниками. Также важно заметить, что траектории посадки самолетов представляют собой данные высокой размерности (high dimensional data), поэтому в связи со сложностью задачи и размерностью данных анализ траекторий самолётов осуществляется в

двумерном пространстве (проекции на плоскость посадки). Такое сокращение размерности данных зачастую приводит к существенной потере информации и искажению результата. Для решения задачи выделения воздушных потоков в плоском случае в настоящее время используются методы, связанные с разбиением пространства на ячейки в стиле диаграмм Вороного и/или разбиением набора векторов, представляющих траектории движения, с помощью различных алгоритмов кластеризации (например, K-means или K-medoids). Данные подходы имеют ряд недостатков, например, таких как:

- разбиение пространства на ячейки не связано с характером существующих потоков движения,
- конечный результат в существенной мере зависит от параметров инициализации используемых алгоритмов кластеризации, что на практике не может обеспечить получение корректного результата.

Разработка алгоритмов выделения пучков траекторий, то есть групп траекторий движения в трёхмерном пространстве, имеющих сходные характеристики и близких по конечным координатам (как, например, в случае посадок с одного направления подлета на заданную взлётно-посадочную полосу), находится на начальной стадии. В литературе при выделении пучков траекторий в плоском случае активно применяются такие методы как: анализ главных компонент (PCA), непараметрические Байесовские методы, спектральная кластеризация и т.п. Однако, при использовании вероятностных методов возможно получение неточного или нестабильного результата. Кроме того, существенным недостатком большинства известных методов является использование евклидовой меры расстояния в качестве меры близости траекторий движения, что не позволяет правильно разделять пересекающиеся траектории различной геометрической формы.

Особую актуальность решение задачи определения характерной (опорной) траектории посадки, также как и предыдущей, приобретает при посадке на взлётно-посадочные полосы без сопровождения диспетчерской службы и/или

сложном рельефе местности. Определение характерной (опорной) траектории посадки возможно только после предварительного решения задачи выделения пучков траекторий. В условиях отсутствия такого решения делаются попытки определить характерную (опорную) траекторию в двумерном случае: Существует ряд алгоритмов (например, DBSCAN или методы спектральной кластеризации), которые позволяют выделить центроиды (центр масс траекторий в кластере или поточечное среднее) в определенных в плоском случае характерных потоках движения. Однако, такие методы вычислительно затратны, а для рассмотрения их результатов в качестве опорных траекторий нет никаких оснований.

Решение задач прогнозирования дальнейшего движения самолётов на основании данных об успешных реализациях в условиях постоянного увеличения траффика также приобретает всё большее значение. При решении этой задачи могут быть использованы различные методы машинного обучения, однако для уменьшения ошибки прогнозирования необходимо, после выделения группы траекторий потока, удалить из анализируемой выборки аутлаеры. В случае траекторий самолётов появление аутлаеров может быть связано с неправильной регистрацией данных радаром или с нетипичным поведением самолёта (Hrastovec & Solina (2016)). Задача определения аутлаеров при анализе траекторных данных достаточно сложна и активно разрабатывается в настоящее время. В литературе для этих целей предлагается использование различных методов таких, как TRAOD (A Partition-and-Detect Framework), анализа главных компонент (functional PCA) и др. Однако, они не позволяют на реальных данных получить устойчивые результаты.

При решении поставленных задач предварительное исследование посадочных траекторий самолётов с помощью ряда методов data mining и их комбинаций позволяет не только оценить применимость таких методов на практике, но и дает возможность выявить тонкую структуру анализируемых данных и их характерные особенности, что является важным для получения корректного результата.

В настоящее время активные исследования, связанные с разбиением воздушного пространства на сектора и определением характерных (опорных) траекторий посадки, ведутся специалистами ряда организаций, в том числе, Филиал "НИИ Аэронавигации"ФГУП ГосНИИ ГА, ИПУ РАН им. Трапезникова, ЦАГИ, NASA Ames, Boeing и MITRE.

Подробное описание методов data mining, используемых в настоящее время, можно найти в работах Sam Roweis, Zoubin Ghahramani, Andrew Ng, Kevin P. Murphy, Padhraic Smyth, Shumway R., Stoffer D., Keinosuke Fukunaga и Marco Zulliani.

Цель работы. Настоящая работа посвящена разработке методов анализа данных (data mining), позволяющих при обработке набора многомерных временных рядов, представленных четырехмерными траекториями движения объектов к различным целям:

- автоматически выделять в трехмерном случае пучки многомерных временных рядов, асимптотически сходящиеся с заданным параметром порога, что соответствует выделению установившихся потоков движения;
- смоделировать в трехмерном случае типичный для выделенного пучка многомерный временной ряд – центроид;
- определять в выделенном пучке выброс (outlier) – многомерный временной ряд, наиболее отклоняющийся от смоделированного центроида.

При рассмотрении набора траекторий самолётов решение поставленных задач позволяет с учётом установившегося движения разбивать воздушное пространство на зоны ответственности диспетчерских служб, и способствует обеспечению безопасности полётов, в частности, при посадках:

- в аэропорту, находящемся в зоне сложного географического ландшафта (в горах или на побережье);
- без сопровождения диспетчерских служб («малые» аэропорты и/или несанкционированные приземления).

Объект исследования: многомерные временные ряды (посадочные траектории самолётов, регистрируемые радаром).

Предмет исследования: методы и алгоритмы анализа данных (посадочных траекторий самолётов).

Положения, выносимые на защиту:

1. Способ устойчивого разбиения в трехмерном пространстве набора многомерных временных рядов, представленных четырехмерными траекториями движения объектов к различным целям, на пучки, асимптотически сходящиеся с заданным параметром порога, с использованием меры косинуса в качестве меры близости многомерных временных рядов .

Обоснованность результата подтверждается применением комплексного анализа хорошо известных методов и алгоритмов анализа данных, в том числе метода сокращения размерности анализируемых данных, алгоритма RANSAC (Random Sample and Consensus) и процедуры перехода в пространство исходной размерности.

Новизна научного результата заключается в том, что предложен оригинальный алгоритм разбиения набора многомерных временных рядов, представленных посадочными траекториями самолётов, на пучки – посадки на заданные ВПП, основанный на использовании меры косинуса в качестве меры близости траекторий движения к выделенной в пространстве меньшей размерности геометрической асимптоты, касательной пучку траекторий в окрестности сходимости.

Полученный результат является **вкладом** в развитие методов анализа многомерных данных, поскольку позволяет выделять в трёхмерном пространстве группы траекторий движения, имеющих общие цели, и данный результат является устойчивым.

Достоверность научного результата подтверждается примерами выделения в трёхмерном пространстве пучков посадочных траекторий при обработке данных радара TRACON над заливом Сан-Франциско с помощью программной реализации алгоритма.

2. **Способ моделирования в трёхмерном пространстве центроида для выделенного пучка многомерных временных рядов, представленных четырёхмерными траекториями движения объектов, посредством решения оптимизационной задачи с ограничениями и использовании меры косинуса в качестве меры близости многомерных временных рядов .**

Обоснованность результата подтверждается комплексным анализом решения стандартной оптимизационной задачи с ограничениями по определению центроида – траектории, сумма квадратов расстояний от точек которой до соответствующих точек всех траекторий в пучке минимальна по выбранной мере близости, и которая удовлетворяет ограничению параметра порога (при анализе посадочных траекторий самолётов – конечная точка такой траектории должна находиться на взлётно-посадочной полосе).

Новизна научного результата заключается в том, что при решении оптимизационной задачи в качестве меры близости многомерных временных рядов, представленных посадочными траекториями самолётов, используется мера косинуса, которая учитывает характерные особенности трехмерных траекторий движения – кривизну, кручение и множественные пересечения. Полученный результат является **вкладом** в развитие методов анализа многомерных данных, поскольку позволяет при обработке четырёхмерных данных траекторий движения объектов получить устойчивый результат.

Достоверность научного результата подтверждается примерами определения многомерного временного ряда, характерного для выделенной группы, – центроида для выделенных пучков посадочных траекторий при

обработке данных радара TRACON над заливом Сан-Франциско с помощью программной реализации алгоритма.

3. Способ определения выброса (outlier) в выделенном пучке многомерных временных рядов, представленных четырёхмерными траекториями движения объектов, основанный на оценке отклонения траекторий пучка от его центроида по мере косинуса.

Обоснованность результата подтверждается комплексным анализом решения стандартной оптимизационной задачи с ограничениями по определению аутлаера – траектории, сумма квадратов расстояний от точек которой до соответствующих точек центроида максимальна по выбранной мере близости

Новизна научного результата заключается в том, что при решении оптимизационной задачи в качестве меры близости многомерных временных рядов, представленных посадочными траекториями самолётов, используется мера косинуса, учитывающая все характерные особенности анализируемых данных.

Полученный результат является **вкладом** в развитие методов анализа данных траекторий движения, поскольку позволяет получить точный и устойчивый результат.

Достоверность научного результата подтверждается примерами определения аутлаеров в выделенных пучках траекторий при обработке данных радара TRACON над заливом Сан-Франциско с помощью программной реализации алгоритма.

Апробация результатов: результаты работы докладывались и обсуждались на:

- научном семинаре ИППИ РАН (Москва, 17 марта 2017 г.);
- Internation conference on Big Data and its application (Москва, Deworkacy, 16 сентября 2016 года);
- научном семинаре им. братьев Белоцерковских (Москва, 16 июня 2016 г.).
- заседании кафедры информатики и вычислительной математики МФТИ (Долгопрудный, 16 июня 2015 г.);
- научном семинаре ВЦ РАН (Москва, 24 июня 2015 г.);
- 55-58 научных конференциях МФТИ (Долгопрудный, 2012-2015 г.);

Публикации: по теме диссертации опубликовано 21 работа, в том числе 12 в журналах, включенных в «Перечень российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки Российской Федерации. По материалам диссертационного исследования получено 2 патента на изобретение №2616106 (RU), № 2616107 (RU) (выданы 12 апреля 2017 г.), а также подготовлено и подано 2 заявки на патент RU №2017101343 от 16.01.2017 и US №15/258,736 от 07.09.2016 г.

Личный вклад автора: все представленные в работе результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации: диссертационное исследование состоит из введения, трех глав и заключения. Работа изложена на 130 страницах машинописного текста, содержит 36 рисунков и список литературы из 193 наименований.

Глава 1. Анализ многомерных временных рядов, представленных посадочными траекториями самолётов

1.1 Актуальность исследования и обзор литературы

Необходимость модернизации систем организации воздушного движения (ОрВД) связана с существенным увеличением интенсивности полётов и задачей поддержания высокого уровня безопасности воздушного движения. Для этого необходима автоматизация процессов управления с целью оптимизации работы диспетчерских служб [1]. Существующие системы ОрВД основаны на управлении движением воздушного пространства разделённого на сектора (sectorized airspace) и установленных маршрутах. Увеличение объёма трафика, превышающее пропускную способность диспетчерских служб, приводит к задержкам и изменению существующих маршрутов полётов. Если управление воздушным движением выполняется для каждого сектора с помощью краткосрочного предсказания маршрута, основанного на информации о текущем положении самолёта, то становится сложно полностью оптимизировать маршруты полёта и его полное время от взлёта до приземления. В связи с тем, что объём воздушного трафика продолжает увеличиваться, число процедур контроля потоков и время задержек увеличивается год от года так, что использование существующих методов управления становится неэффективным. К тому же, поскольку гибкое использование воздушного пространства и маршрутов полётов ограничивается специфическими секторами, оно не может быть полностью использовано, что не позволяет увеличивать пропускную способность диспетчерских служб. Так что, задачи разделения воздушного пространства аэропорта на сектора [2, 3] и проектирования воздушных коридоров [4–8] для полётов со сходными траекториями приобретают всё большую актуальность. [9]

В настоящее время в ряде страны принятые государственные программы, например, такие как Федеральная целевая программа «Модернизация Единой системы организации воздушного движения» в РФ, SESAR в Евросоюзе, NextGen в США, SIRIUS в Бразилии, FIANС в Индии, CARATS в Японии, которые направлены на повышение уровня безопасности полетов, эффективности и гибкости использования воздушного пространства основе использования новых технических средств и технологий в соответствии со стандартами и рекомендуемой практикой Международной организации гражданской авиации (ИКАО). В рамках данных программ проводится ряд исследований воздушного движения в зоне аэропорта [10, 11].

Воздушное пространство разделено на сектора, каждый из которых контролируется группой диспетчеров. Причём, сектора воздушного пространства (с учётом изменений траффика) не должны быть перегружены в течении дня. Необходимо разработать метод для автоматической секторизации воздушного пространства, который бы подходил для создания операционно приемлемых секторов. Ведь неэффективное проектирование воздушного пространства приводит к перегрузкам секторов и, как следствие, к задержкам и изменениям существующих маршрутов. В работах [12, 13] рассматриваются общие принципы планирования воздушного движения (air traffic design), на основе которых разрабатываются системы управления воздушным движением (СУВД). Кроме того, анализируются различные подходы, методы и алгоритмы для решения задачи разделения воздушного пространства на сектора и предлагаются оптимизационные процедуры, результаты применения которых демонстрируются на примере СУВД г. Санкт-Петербурга.

В настоящее время задачу секторизации воздушного пространства в трёхмерном случае решают с помощью предварительного определения секторов в двухмерном случае. При рассмотрении двумерного случая воздушное пространство может разбиваться на ячейки «в стиле диаграмм Вороного» [4, 14–17].

Как видно из Рис.1 разбиение воздушного пространства зоны аэропорта на

сектора не отражает характер существующих потоков движения. В этом случае также не учитывается разделение пространства по уровням высотности (airspace classification).

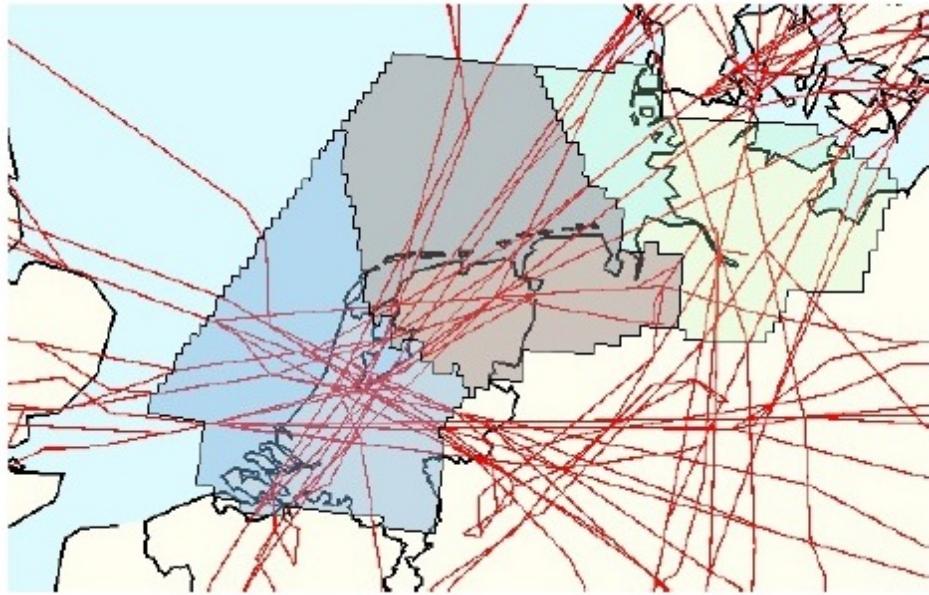


Рис. 1: Разбиение воздушного пространства на сектора, представленное в работе [17]

Также для автоматического выделения маршрутов движения со сходными траекториями активно применяются методы кластеризации. Например, в работе [18] выполняется кластеризация траекторий, основанная на алгоритме k-medoids. В работе [19] кластеризация траекторий выполняется с помощью алгоритма HDBSCAN. В работе [20] предлагается алгоритм динамического разбиения на сектора, который объединяет вертикальное и горизонтальное разбиение на сектора, основанное на K-means кластеризации. Этот алгоритм тестируется на данных нескольких международных аэропортов. В работе [21] предлагаются новые методы кластеризации траекторий и идентификации полётов по близким маршрутам (Рис.2). Метод основан на анализе главных компонент (PCA) для выборки траекторий.

Для кластеризации постоянно растущих данных о траекториях и необходимости быстрого обновления кластеров был разработан подход непрерывной кластеризации [22], состоящий из двух частей: поддержки микро-кластеров online и создания макрокластеров в режиме off-line. В первой части каждая новая тра-

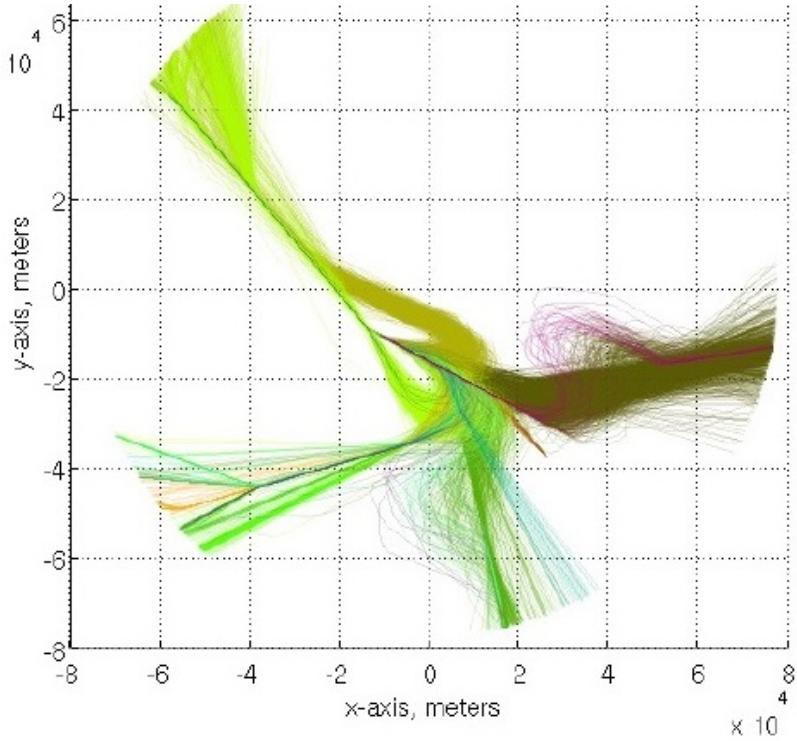


Рис. 2: Кластеризация траекторий самолётов, представленная в работе [21]

ектория упрощённо представляется набором направленных сегментов, далее сегменты всех траекторий разбиваются на кластеры. Такие микро-кластеры используются для компактного хранения сходных сегментов траекторий. При добавлении новых данных, микро-кластеры адаптируются в соответствии с текущими изменениями. При запросе результатов кластеризации, процедура выполняется в режиме off-line на множестве микро-кластеров. On-line-кластеризация применяется в [23]. Кластеризации траекторий методами без обучения посвящены работы [24, 25]. В работе [26] предлагается унифицированный вероятностный алгоритм анализа траекторий, основанный на непараметрических Байесовских методах, который может кластеризовать траектории методами без обучения (in unsupervised way), не требующими предварительного знания числа кластеров траекторий.

На основании предарительно выполненной кластеризации траекторий движения предлагается определение, так называемой, характерной (репрезентативной, номинальной) траектории потока. В [27] в результате анализа траекторий самолётов в пространстве геометрических характеристик (geometric feature space), в частности, кривизны, выделяются группы сходных траекторий. Так, в ра-

боте [28] предлагается подход к определению типичных паттернов движения, основанный на кластеризации сходных траекторий. В работе [29] методом спектральной кластеризации решается задача определения номинальных траекторий (nominal trajectories) в выделенных потоках движения на основании данных о посадочных траекториях самолётов. В работе [30] была предложена методология выявления потоков, существующих в течение некоторого временного интервала. В основе работы также лежит метод спектральной кластеризации. Используемый алгоритм определяет дни, в которые наблюдаются нетипичные картины трафика, и позволяет идентифицировать потоки, постоянные во времени. В таких потоках выделяются типовые (номинальные) траектории (Рис.3). В работе [31] анализируются посадочные траектории и для определения, так называемых, репрезентативных траекторий потока при посадках на заданные взлётно-посадочные полосы на одном из этапов используется кластеризация

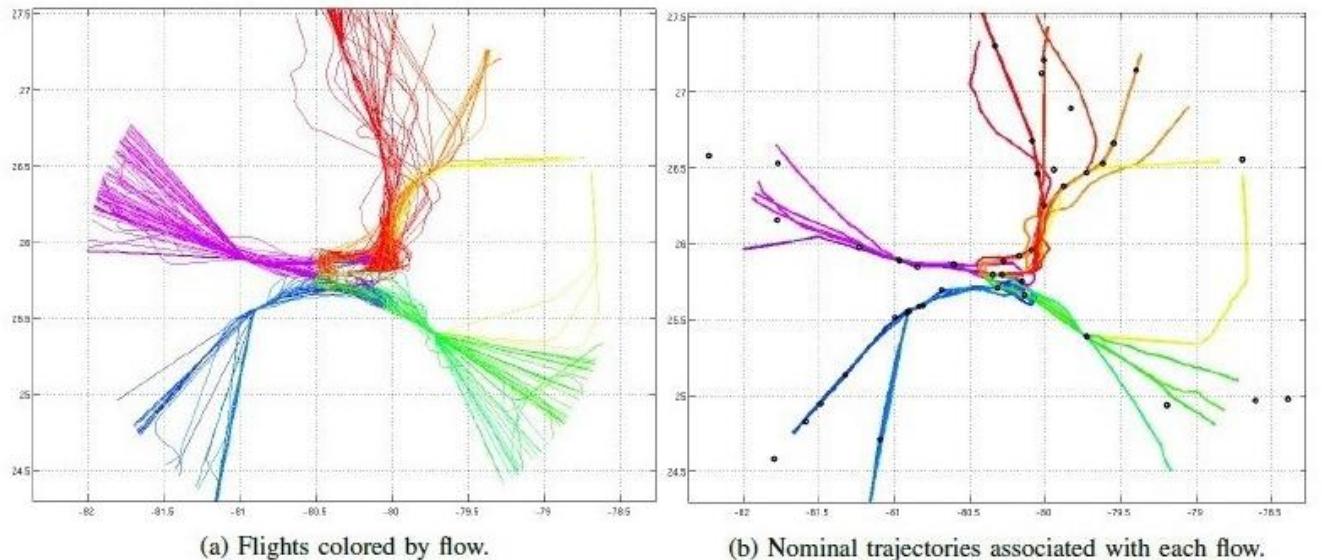


Рис. 3: Характерные траектории, определяемые на основании кластеризации в работе [30]

Анализ посадочных траекторий самолётов является важной задачей, поскольку согласно статистическим данным Международной Организации Гражданской Авиации (ИКАО) заход на посадку и посадка на полосу аэродрома являются достаточно критическими этапами полёта самолёта [32]. Большинство авиационных происшествий с крупными воздушными судами происходит после выхода воздушного судна на направление взлётно-посадочной полосы (ВПП) и в пре-

делах 19 км от нее [33, 34]. Данные анализа безопасности полётов гражданской авиации РФ, проведённого Федеральным Агентством Воздушного Транспорта (управление инспекции по безопасности полётов) показывают, что случаи невыдерживания безопасной траектории снижения на конечном этапе захода на посадку, маневрирование на этапе посадки (повышенная скорость, отклонения от глиссады) и выкатывание за пределы ВПП представляют наибольшую угрозу для безопасности полётов.

В настоящее время активно разрабатываются подходы, методы и системы, упрощающие пилотирование самолётов на конечном этапе посадки. Для этого применяются как системы управления полётами (flight management system), так и приборы автоматического выбора маршрута посадки [35]. На заключительном этапе полёта экипаж может задать бортовой системе один из вариантов захода на посадку, в этом случае координаты следования выбранной траектории определяются автоматически. Кроме того, СУВД может рекомендовать особую посадку, в частности, наиболее эффективную при данных метеорологических условиях и текущей загруженности аэропорта. В работе [36] предлагается методика расчёта само-наведения при посадке, использующая контроль времени задержки (time delay control). Проектируемая система наведения тестировалась на моделях общих схем посадки, включающих выпуск шасси и касание ВПП. При моделировании используется метод моделей нелинейных динамических систем. В работах [37, 38] рассматриваются особенности посадки самолёта на палубу корабля. В [39] представлен способ оценки точности траектории при посадке в условиях плохой видимости.

В настоящее время задача определения безопасной и/или оптимальной траектории посадки также решается с помощью различных методов, как на основе анализа сходства текущей траектории с траекториями из базы данных, с помощью кластеризации траекторий и математического моделирования. Работы [40–44] посвящены определению оптимальных, безопасных и бесконфликтных траекторий посадки с помощью математического моделирования с учётом различных

параметров. В [45] предлагается метод посадки самолёта (method of inferring the aircraft intent) на основании полученных ранее данных о посадочных траекториях самолётов того же типа. Данные об успешных посадках анализируются совместно с данными о метеорологических условиях. В результате выводится траектория посадки, соответствующая минимальному значению функции стоимости вычисленной траектории в сравнении с наблюдаемой, и предлагается несколько вариантов посадки.

Одной из актуальных задач обеспечения безопасности полётов и эффективной организации потоков движения становится разработка систем, выявляющих потенциальные конфликты и моделирующих способы их разрешения (conflict detection and resolution) [46–48]. Для выявления и предотвращения потенциальных конфликтов самолётов в зоне аэропорта необходимо как можно точнее вывести (нацелить) самолёт на посадку (terminal-area aircraft intent inference). Такая задача обусловлена постоянно возникающими нештатными ситуациями воздушного трафика, в частности, внеплановыми маршрутами полётов и частыми манёврами самолётов. В работе [49] предлагается система предупреждения возможных конфликтных ситуаций на этапе предпосадочного маневрирования и захода на посадку в условиях сложного рельефа местности. В работе [50] моделируются бесконфликтные траектории синхронного движения самолётов в сложных условиях рельефа местности. В работе [51] задача моделирования траекторий наведения на цель решается с помощью кластеризации траекторий. Предлагаемый подход тестировался на данных радара аэропорта Ченду (Chengdu) в Китае. В системах безопасности, предотвращающих столкновения между лёгкими спортивными самолётами и в частной авиации может использоваться классификация траекторий [52, 53].

Недостатком использования методов кластеризации при определении групп сходных траекторий и некоторой усреднённой траектории является использование Евклидовой меры близости, которая плохо отражает сходство формы траекторий в трёхмерном пространстве. Она велика для разнесённых в простран-

стве сходных траекторий и не позволяет разделять пересекающиеся траектории различной геометрической формы.

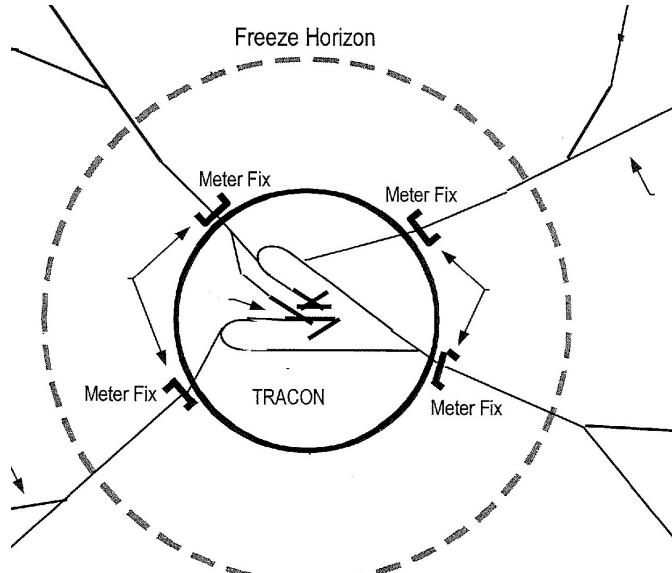


Рис. 4: Схема направлений посадки

Важно заметить, что особенность задачи управления воздушным движением состоит в том, что в связи с разделительными ограничениями (separation constraints) различные по весу самолёты не могут следовать в караване к одной ВПП. Так, в работе [54] предлагается способ планирования воздушного движения, включающий определение сети, состоящей из узловых точек и основных направлений посадки (an arrival network of nodes and legs) (см. Рис. 4 [55]), который применяется для оптимизации расписания прибывающих самолётов. Для автоматической оптимизации распределения прилетающих рейсов по посадочным полосам может применяться и генетический алгоритм [56].

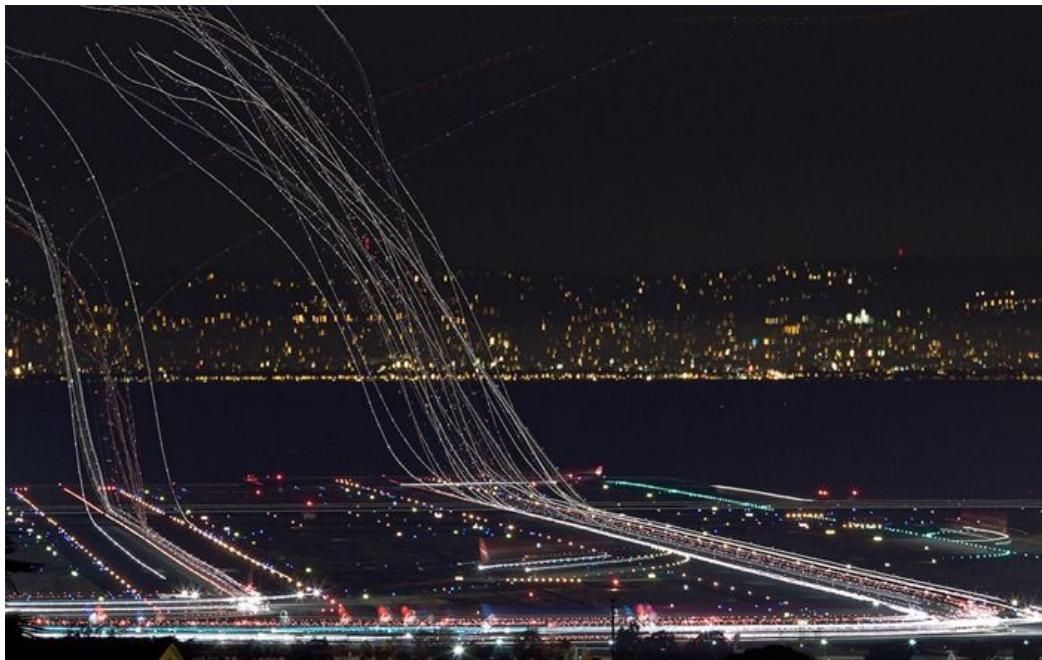
1.2 Описание анализируемых данных

Для решения задачи секторизации при анализе набора данных многомерных посадочных траекторий самолётов в диссертационной работе рассматриваются различные подходы и методы анализа данных (data mining). При рассмотрении набора данных в двумерном и трёхмерном случае необходимо выделить группы траекторий со сходными характеристиками. В случае посадочных траекторий самолётов необходимо выделить посадки на заданные взлётно-посадочные полосы,

которые образуют сходящиеся пучки многомерных траекторий, представленные на Рис. 5 и 6.



(a)



(б)

Рис. 5: Аэропорт Сан-Франциско (SFO), runway 1L&1R (см.Рис. 9).
а)-б) траектории посадки самолётов, формирующие пучки посадочных траекторий

В задачах обеспечения безопасности полётов важной задачей является определение в выделенных пучках траекторий центральные траектории (называемых



Рис. 6: Аэропорт Сан-Франциско (SFO), runway 1L&1R (см.Рис. 9)

далее центроиды пучков), которые представлены на Рис. 7.

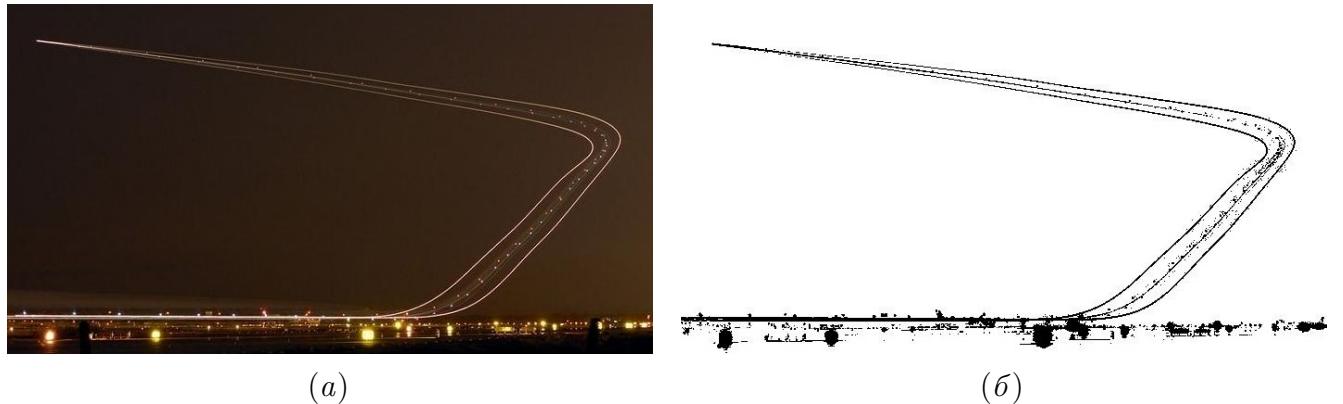


Рис. 7: Центроидоид (пунктирная линия) в пучке посадочных траекторий самолётов
а) исходное изображение, б) результат его компьютерной обработки

Определение траекторий, потенциально находящихся в зоне риска, также является важной задачей. В выделенных пучках траекторий такие траектории наиболее удалены от соответствующих центроидов по выбранной мере близости. В некоторых прикладных задачах термину центроид, введённому в диссертационной работе, соответствуют термины: номинальная, оптимальная, нормальная или опорная траектория.

Сложность решаемой задачи связана с особенностями геометрии самих многомерных траекторий (их пространственными пересечениями, кривизной и кручением) и также с возможными пересечениями пучков траекторий (см. Рис. 8). На Рис. 8 представлены фотографии пучков посадочных траекторий самолётов и результаты их компьютерной обработки [57, 58], демонстрирующие упомянутые выше особенности геометрии пучков.

Фотографии на Рис. 6–8 находятся в свободном доступе на сайтах www.flickr.com/photos/exxonvaldez/sets/72157606064555806/ (автор T. Chang), www.airlines.net (автор Ó. Laborda-Sánchez), www.itcolossal.com/light-traces-aircraft/ (автор K. Cooley).

Описание набора анализируемых данных

В работе используются мета-данные, зарегистрированные автоматической радиолокационной системой TRACON (*Terminal Radar Approach Control Facilities*) [59–62] над заливом Сан-Франциско (находятся в свободном доступе на сайте <https://c3.nasa.gov/dashlink/resources/132/>). Использование систем такого типа направлено на упрощение работы диспетчерских служб и обеспечение безопасности в расширенной зоне вокруг аэропорта. Рассматриваемая область воздушного пространства охватывает пять крупных аэропортов (см. Рис. 9, а), в том числе международный аэропорт Сан-Франциско (SFO), особенностью которого является сложное географическое положение, т.к. он располагается непосредственно на заливе (см. Рис. 9, б). В этом случае отклонение от безопасной траектории при посадке может приводить к нежелательным последствиям (см. например, https://en.wikipedia.org/wiki/Asiana_Airlines_Flight_214).

Анализируемая область представляет собой цилиндр радиуса 80 км с центром над аэропортом SFO и высотой 6 км. Данные, регистрируемые радаром, содержат трехмерные координаты и абсолютные скорости воздушных судов через равные промежутки времени (5 с), с момента обнаружения радаром и до самой нижней регистрируемой радарами высоты. Помимо основной информации в записях

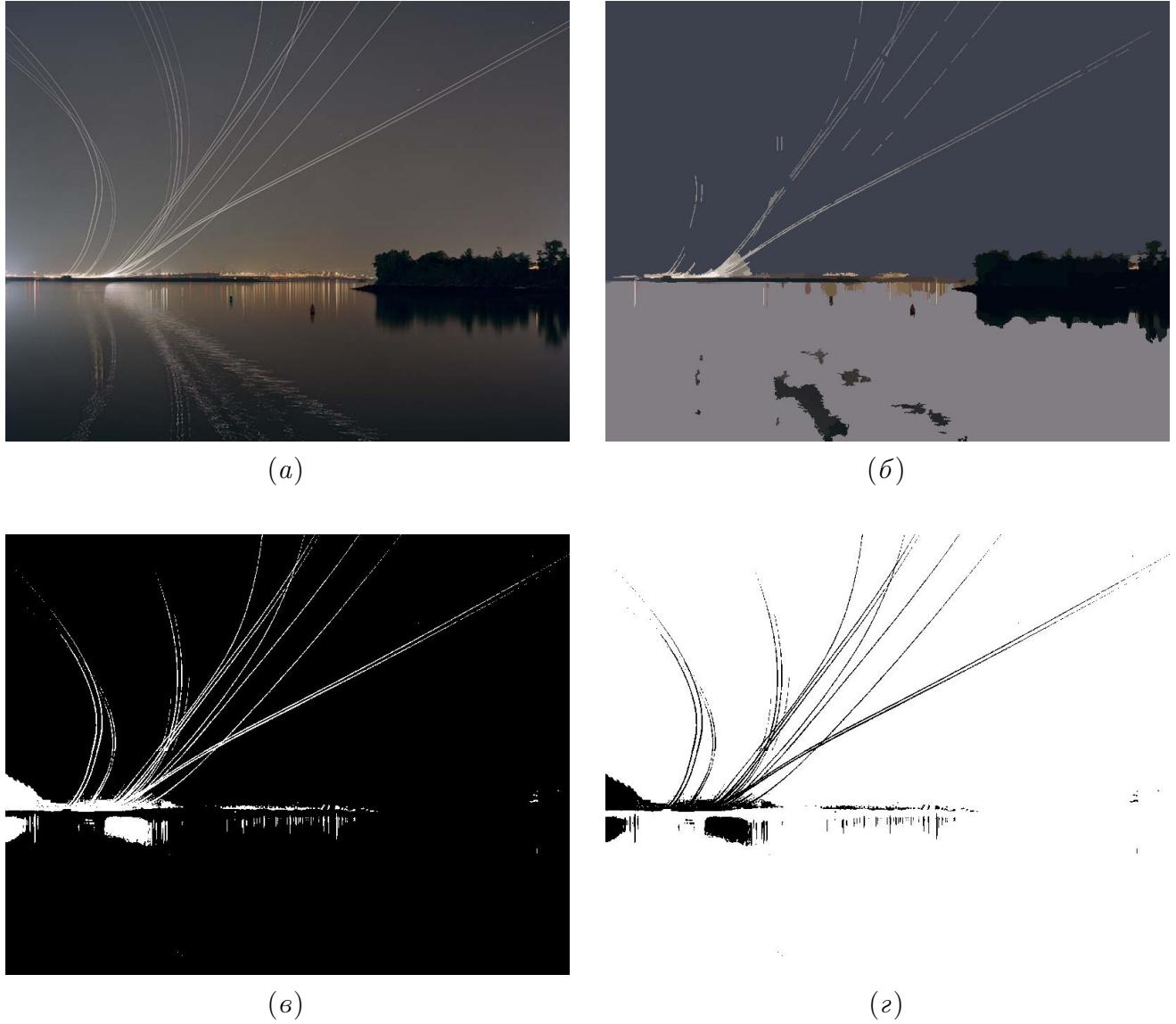


Рис. 8: Пучки посадочных траекторий самолётов и их геометрическое представление

- а) исходное изображение, б) сегментированное изображение,
- в) карта яркости, г) выделенные посадочные траектории

указываются дополнительные сведения о типе совершающей операции (прибытии или отправлении), о пункте вылета и назначения и т.п. Подробное описание анализируемых данных радара представлено в работах [21, 63, 64].

В настоящей работе исследуется набор 116 траекторий первых самолетов, приземлившихся в зоне действия радара 1 января 2006 года (см. Рис. 10), далее называемый исходный набор траекторий посадки. Чтобы случайные маневры до начала снижения не искажали общей тенденции движения, рассматриваются только 160 точек каждой траектории. Разница между моментами времени последовательной регистрации (≈ 5 с) определяется угловой скоростью вращения

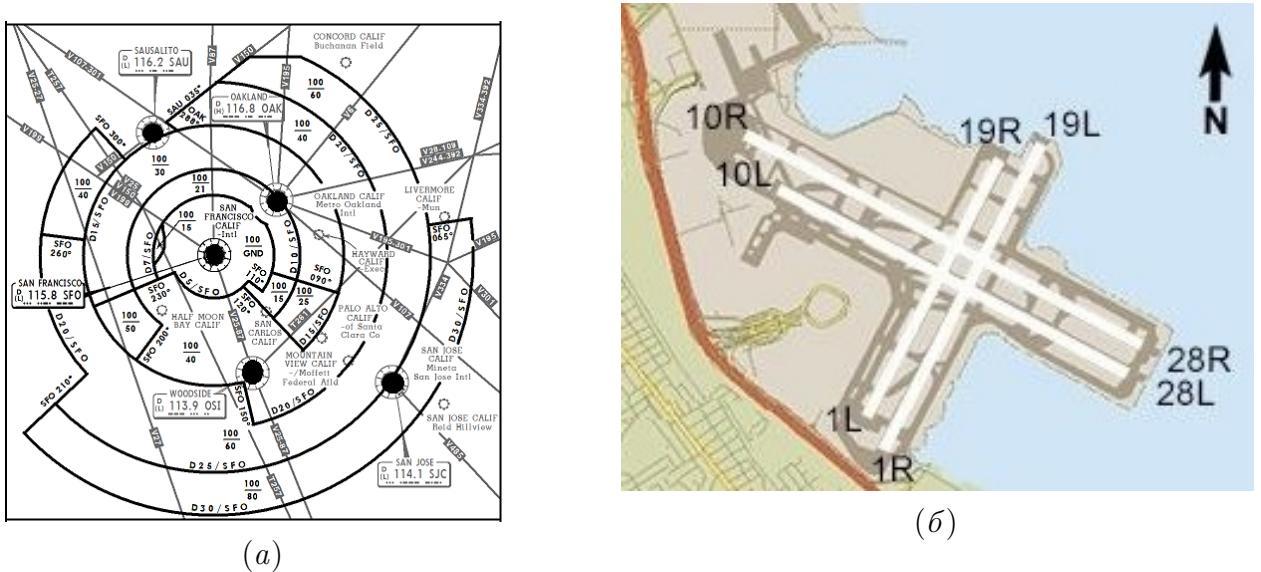


Рис. 9: Залив Сан-Франциско, а) область, охватываемая радаром (аэропорт SFO в центре), б) схема взлётно-посадочных полос аэропорта SFO

радара. Начало координат совпадает с положением радара.

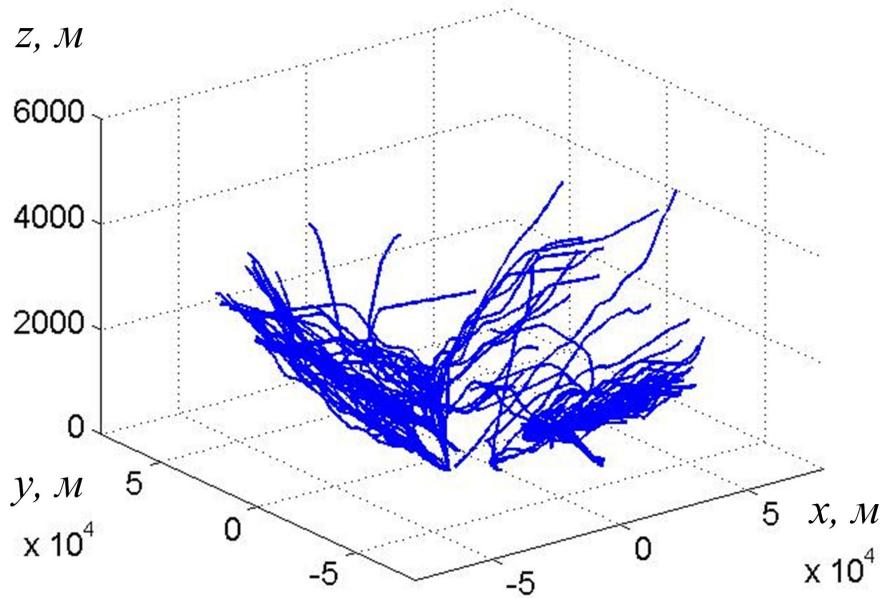


Рис. 10: 3D представление анализируемого исходного набора посадочных траекторий

1.3 Основные подходы к анализу многомерных временных рядов, представленных четырёхмерными посадочными траекториями самолётов

Геометрические особенности многомерных посадочных траекторий

Если исходный набор посадочных траекторий самолётов содержит несколько групп траекторий, соответствующих посадкам на заданные ВПП, – пучков траекторий, то их возможно выделить.

Для векторов $\{\mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^{3 \times L}, \mathbf{X}_n \in \mathbb{N}_k, n = \overline{1, N_k}\}$, ($L \gg 1$ – максимальная длина траектории), представляющих пучок траекторий \mathbb{N}_k , $k = \overline{1, K_0}$ (K_0 – эмпирический параметр), выполняется условие (асимптотического) схождения пучка

$$\forall (\mathbf{X}_n, \mathbf{X}_m) \in \mathbb{N}_k : \|X_n[L_n] - X_m[L_m]\|_2 < \varepsilon, \quad (1.3.1)$$

где $n, m = \overline{1, N_k}$, $n \neq m$, и $X_n[L_n]$, $X_m[L_m]$ – конечные координаты точек траекторий, которые почти совпадают, $\|\dots\|_2$ – евклидова мера расстояния в пространстве \mathbb{R}^3 , ε – параметр порога (порядка ширины ВПП). Параметры L_n , L_m подлежат определению.

Пучки траекторий похожи на пучки функций и пучки решений дифференциальных уравнений (см. [65–67]). Также следует отметить, что траектории в сходящихся пучках (в рассматриваемом случае с порогом ε (1.3.1)) имеют типичный профиль и геометрическую асимптоту – линию в \mathbb{R}^3 , удовлетворяющую условию (1.3.1) и касательную в окрестности конечных точек $X_n[L_n]$ ($\mathbf{X}_n \in \mathbb{N}_k$, $n = \overline{1, N_k}$) всех траекторий пучка [68].

В выделенном пучке траекторий может быть определена центральная траектория – центроид. В таком случае, центроиды пучков $\{\mathbf{C}_k \in \mathbb{R}^{3 \times L}, k = \overline{1, K_0}\}$ также должны удовлетворять условию типа (1.3.1) в виде

$$\forall k = \overline{1, K_0}, \forall \mathbf{X}_n \in \mathbb{N}_k : \|\mathbf{C}_k[L_k] - X_n[L_n]\|_2 < \varepsilon, \quad (1.3.2)$$

где параметры L_n и L_k подлежат определению.

Определение центроидов и пучков траекторий алгоритмом K-means

Для многомерных векторов $\{\mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^{3 \times L}, n = \overline{1, N}\}$, $L \gg 1$ с евклидовой мерой расстояния алгоритм K-means решает задачу идентификации центроидов $\{\mathbf{C}_k \in \mathbb{R}^{3 \times L}, k = \overline{1, K}\}$, ассоциируемых с выборками (кластерами) $\{\mathbb{C}_k, k = \overline{1, K}\}$. Для набора центроидов сумма квадратов евклидовых расстояний до векторов в соответствующих выборках $\{\mathbb{C}_k, k = \overline{1, K}\}$ является минимальной.

Введём назначения векторов выборкам посредством набора бинарных индикаторных переменных $\{r_{nk} \in \{0, 1\}, n = \overline{1, N}, k = \overline{1, K}\}$, то есть, если вектор \mathbf{X}_n назначен выборке k , то $r_{nk} = 1$, и $r_{nk} = 0$ в противном случае (т.е. $\{\mathbb{C}_k = \{\mathbf{X}_n | r_{nk} = 1\}\}$). Целевая функция алгоритма K-means имеет вид

$$\mathfrak{J} = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K r_{nk} (\mathbf{X}_n - \mathbf{C}_k) \cdot (\mathbf{X}_n - \mathbf{C}_k), \quad (1.3.3)$$

где « \cdot » обозначает скалярное произведение векторов в пространстве состояний $\mathbb{R}^{3 \times L}$. Для определения выборок, представляющих пучки траекторий, минимизация целевой функции (1.3.3) должна производится с учётом условия типа (1.3.2) в виде

$$\begin{aligned} \forall k = \overline{1, K}, \exists n \in \{m | r_{mk} = 1\} : \|\mathbf{C}_k[L_k] - X_n[L_n]\|_2 < \varepsilon, \\ \forall k, k' = \overline{1, K} : \|\mathbf{C}_k[L_k] - \mathbf{C}_{k'}[L_{k'}]\|_2 \gg \varepsilon, \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

где $\|\cdot\|_2$ – евклидова мера расстояния в трёхмерном пространстве \mathbb{R}^3 . В алгоритме K-means для инициализации $\{\mathbf{C}_k, k = \overline{1, K}\}$ используются $\{\mathbf{X}_n, n = \overline{1, N}\}$. Минимизация \mathfrak{J} (1.3.3) осуществляется последовательными итерациями, состоящими из двух шагов: оценки $\{r_{nk}, n = \overline{1, N}, k = \overline{1, K}\}$ при фиксированных $\{\mathbf{C}_k, k = \overline{1, K}\}$ в замкнутой форме

$$\langle r_{nk} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } k = \arg \min_m ((\mathbf{X}_n - \mathbf{C}_m) \cdot (\mathbf{X}_n - \mathbf{C}_m)), \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (1.3.5)$$

и оценки $\{\mathbf{C}_k, k = \overline{1, K}\}$ при фиксированных $\{r_{nk}, n = \overline{1, N}, k = \overline{1, K}\}$

$$\{\langle \mathbf{C}_k \rangle, k = \overline{1, K}\} = \underset{\{\mathbf{C}_m, m = \overline{1, K}\}}{\arg \min} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K r_{nk} ((\mathbf{X}_n - \mathbf{C}_m) \cdot (\mathbf{X}_n - \mathbf{C}_m))$$

в замкнутой форме

$$\langle \mathbf{C}_k \rangle = \frac{\sum_{n=1}^N r_{nk} \mathbf{X}_n}{\sum_{n=1}^N r_{nk}} \quad (1.3.6)$$

до достижения сходимости. Поскольку каждый шаг уменьшает целевую функцию \mathfrak{J} (1.3.3), сходимость алгоритма K-means гарантируется. Однако из-за неудачной инициализации $\{\mathbf{C}_k, k = \overline{1, K}\}$ он может сходится к локальному, а не к глобальному минимуму \mathfrak{J} при условии (1.3.4), гарантирующем, что выборки $\mathbb{C}_k, k = \overline{1, K}$ представляют пучки траекторий $\mathbb{N}_k, k = \overline{1, K}$.

Непосредственная реализация алгоритма K-means относительно медленная, поскольку на каждом шаге определения $r_{nk}, n = \overline{1, N}, k = \overline{1, K}$ (1.3.5) вычисляется евклидово расстояние между каждым вектором $\mathbf{C}_k, k = \overline{1, K}$ и каждым вектором $\mathbf{X}_n, n = \overline{1, N}$. Ускорение алгоритма K-means обеспечивается предварительным построением дерева, в котором ближайшие вектора $\{\mathbf{X}_n, n = \overline{1, N}\}$ находятся в одном поддереве [69, 70]. Используя неравенство треугольников для расстояний, также сокращают число вычислений расстояний [71, 72]. Использование в исходном пространстве состояний $\mathbb{R}^{3 \times L}$ евклидовой меры расстояния и представление о геометрическом разбиении пространства векторов $\{\mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^{3 \times L}, n = \overline{1, N}\}, L \gg 1$ на ячейки в стиле диаграмм Воронова не отражает характер пучков траекторий (посадки самолётов). Кроме того, определение центроидов оказывается неустойчивым к случайным отклонениям (outliers).

Первый способ адаптации условной задачи оптимизации (1.3.3, 1.3.4) к анализу пучков пространственных траекторий состоит в моделировании центроидов $\{\mathbf{C}_k, k = \overline{1, K}\}$ с помощью модели полиномиальной регрессии, которая решает задачу выравнивания координат точек траекторий пучка ($\forall \mathbf{X}_n \in \mathbb{N}_k$), которые

почти совпадают [64, 73] (см. Главу 2). Второй – состоит в использовании представлений векторов $\{\mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^{3 \times L}, n = \overline{1, N}\}$, $L \gg 1$ в пространствах абстрактных характеристик $\{\mathbf{Y}_n \in \mathbb{R}^M, n = \overline{1, N}\}$ с евклидовой мерой расстояния [74–77] (см. Главу 4). Вектора, представляющие пучки траекторий, которые геометрически неразделимы в исходном пространстве состояний $\mathbb{R}^{3 \times L}$, в пространствах абстрактных характеристик становятся разделимыми, поэтому в этих пространствах используется евклидова мера расстояния [78, 79] (см. Главу 4). При отображении в исходное пространство состояний мера расстояния становится неевклидовой.

Использование неевклидовой меры расстояния

Существуют примеры неевклидовой меры расстояния для векторов траекторий в пространстве состояний. Например, мера косинуса

$$\cos \angle(\mathbf{X}_n, \mathbf{X}_m) = (\mathbf{X}_n \cdot \mathbf{X}_m) / \left(\sqrt{(\mathbf{X}_n \cdot \mathbf{X}_n)} \sqrt{(\mathbf{X}_m \cdot \mathbf{X}_m)} \right), \quad n, m = \overline{1, N}, \quad (1.3.7)$$

наиболее адекватно отражает близость векторов $\{\mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^{3 \times L}, n = \overline{1, N}\}$, $L \gg 1$ в пространстве состояний, представляющих пучки траекторий определённого профиля [79]. Поэтому, можно модифицировать задачу оптимизации (1.3.3, 1.3.4), заменив в (1.3.3) скалярное произведение на общую меру расстояния. Далее для меры косинуса используется следующее обозначение:

$$\rho_{\text{cosine}}(\mathbf{X}_n, \mathbf{X}_m) = \cos \angle(\mathbf{X}_n, \mathbf{X}_m).$$

Целевая функция (1.3.3) алгоритма K-means обобщается введением общей меры расстояния $\rho(\mathbf{X}_n, \mathbf{X}_m)$ между двумя векторами $\mathbf{X}_n, \mathbf{X}_m \in \mathbb{R}^{3 \times L}$ и минимизацией целевой функции

$$\mathfrak{J} = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K r_{nk} \rho^2(\mathbf{X}_n, \mathbf{C}_k), \quad (1.3.8)$$

(K-medoids algorithm) [80]. При заданных центроидах $\{\mathbf{C}_k, k = \overline{1, K}\}$ шаг оценки $\{r_{nk}, n = \overline{1, N}, k = \overline{1, K}\}$ (как в стандартном алгоритме K-means) включает назначение каждого вектора $\mathbf{X}_n, n = \overline{1, N}$ выборке $\mathbb{C}_k, k = \overline{1, K}$, для которого

расстояние $\rho(\mathbf{X}_n, \mathbf{C}_k)$ с соответствующим центроидом минимально

$$\langle r_{nk} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } k = \arg \min_m \rho(\mathbf{X}_n, \mathbf{C}_m), \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (1.3.9)$$

с оценкой вычислительной сложности $O(K \cdot N)$. Однако, шаг оценки $\{\mathbf{C}_k, k = \overline{1, K}\}$ является потенциально более сложным. При стандартном ограничении считается, что каждый центроид является одним из векторов, назначенных соответствующей выборке, поэтому условие (1.3.4) выполняется автоматически. Это позволяет реализовать алгоритм для любого выбора меры расстояния $\rho(\mathbf{X}_n, \mathbf{C}_k)$, которая непосредственно вычисляется. Шаг определения $\{\mathbf{C}_k, k = \overline{1, K}\}$ включает дискретный поиск по всем N_k векторам, назначенным выборке $\mathbb{C}_k, k = \overline{1, K}$, и требует $O(N_k^2)$ оценок меры расстояния $\rho(\mathbf{X}_n, \mathbf{C}_k)$.

Отметим, что взаимосвязь центроидов и выборок

$$\mathbf{C}_k \Leftrightarrow \mathbb{C}_k, k = \overline{1, K}$$

навязана логикой алгоритма K-means и его обобщениями и, в принципе, центроиды $\{\mathbf{C}_k, k = \overline{1, K}\}$ и выборки $\{\mathbb{C}_k, k = \overline{1, K}\}$, представляющие пучки траекторий $\mathbb{N}_k, k = \overline{1, K}$, могут определяться независимо.

Оценки центроидов и определение пучков траекторий

В качестве независимых методов оценки центроидов $\{\mathbf{C}_k, k = \overline{1, K}\}$ используются скрытые компоненты линейных и нелинейных динамических моделей (см. [81, 82]), и скрытые последовательности Марковских моделей (см. [83, 84]) при условии (1.3.4) (см. Главу 2). После этого пучки траекторий определяются по схеме $\mathbf{C}_k \Rightarrow \mathbb{C}_k, k = \overline{1, K}$.

1.4 Выводы по Главе 1

1. На основе комплексного анализа проблемы обеспечения безопасности полётов в расширенной зоне аэропорта обоснованы:
 - актуальность темы диссертационного исследования;
 - выбор посадочных траекторий самолётов в качестве первичных данных для решения поставленных задач.
2. Продемонстрировано, что методы анализа данных, применяемые в настоящее время для решения проблем обеспечения безопасности полётов в расширенной зоне аэропорта, не учитывают особенностей пространственной геометрии многомерных посадочных траекторий самолётов в трёхмерном пространстве и не могут быть использованы при решении поставленных задач.

Глава 2. Применение методов анализа данных к обработке многомерных временных рядов, представленных посадочными траекториями самолётов в двумерном случае

Различные подходы к анализу данных

Задачи анализа функциональных данных (functional data analysis) [85–88] (например, траекторий движения объектов) и выделения в них характерных паттернов (типов движения) становятся всё более актуальными. Анализируемые данные представляют собой серии измерений в зависимости от некоторой независимой переменной, например, времени. В более общем случае это могут быть наборы многомерных измерений (векторов). При этом в каждый момент времени могут фиксироваться как пространственные координаты x, y, z , так и специфические характеристики объектов (скорость и др. параметры движения). При обработке данных такого типа может выполняться выравнивание во времени и разбиение исходного набора данных на достаточно однородные выборки [89].

Размерность анализируемых данных, как правило, велика. Уменьшение размерности данных с помощью их аппроксимации элементами пространства конечной размерности позволяет применять к данным различные алгоритмы такие, как иерархическая кластеризация [90] или K-means [91].

Существуют вероятностные подходы для описания кластеров (выборок), на которые разделяются исходные данные, посредством их плотности вероятности [92–94]. Оказалось, что при анализе набора траекторий модели вероятностных смесей (probabilistic mixture models) дают хорошие результаты [89]. Например, при моделировании смеси, основанной на регрессии (regression-based mixture modeling) определяются две или более исходные (underlying) функции (например, полиномы), рассматриваемые в качестве генеративных для анализируемых данных. Эта методика, известная как смеси регрессий (regression mixtures) [95–99],

расширяет стандартный подход конечных смесей на случай, когда компоненты моделей плотности замещаются моделями условной регрессионной плотности.

Исходный набор данных может быть разбит на достаточно однородные выборки на основе различных моделей регрессионных смесей, например, полиномиальной регрессии на основе евклидовой меры расстояния [73, 100–103], регрессии сплайнами [104–106] и кусочно-непрерывной регрессии (piecewise regression model) [107]. Все эти подходы используют алгоритм ожидания и максимизации правдоподобия (EM-алгоритм (*Expected-Maximization algorithm*)) [108] для оценки параметров модели.

Для оценки числа K достаточно однородных выборок [109–113], на которые разбиваются исходные данные, могут применяться экспертные оценки, или такие, хорошо известные критерии, как BIC (*Bayesian Information Criterion*), AIC (*Akaike's Information Criterion*), ICL (*The Integrated Completed Likelihood*), DIC (*Deviance Information Criterion*) [114–116] и др. Также может выполняться сравнение значений максимального правдоподобия, вычисленного при различных K , как это делается в [102]. Предварительное разбиение анализируемых данных на достаточно однородные выборки позволяет значительно упростить дальнейший анализ.

Подходы к анализу данных в пространстве состояний

Если характер данных (например, траекторий движения) сложен и не описывается конечным числом параметров, применяются методы сокращения размерности пространства состояний [117]. Моделирование в пространстве состояний применяется в широком спектре задач анализа временных рядов. При этом предполагается, что поведение наблюдаемой системы определяется ненаблюдаемыми (скрытыми состояниями) [118]. Зависимость между вектором текущего состояния и вектором предыдущего состояния определяется динамическими уравнениями системы и шума модели [119]. При описании динамических систем вводятся понятия «пространства состояний» (state space) и «векторов состояний» (state

vectors).

Представление в пространстве состояний (state space form) позволяет применить к исходной модели различные стандартные процедуры, включая оценивание и прогнозирование [120, 121], и обработать широкий спектр линейных и нелинейный моделей временных рядов, включая регрессионные модели с изменяющимися коэффициентами, модели типа ARIMA (*Autoregressive Integrated Moving Average*) [122] и модели с ненаблюдаемыми компонентами.

В случае линейных динамических систем с гауссовым шумом, апостериорная вероятность переменной скрытого состояния $\mathbf{s}[i]$ в момент времени i при заданных наблюдаемых данных $\mathbf{x}[i]$ вычисляется с помощью хорошо известного фильтра Калмана [123–126]. К нелинейным системам может применяться расширенный (нелинейный) фильтр Калмана [127, 128], основанный на линеаризации первого порядка. Динамические модели также описываются в терминах радиальных базисных функций [129]. В случае нелинейных систем с негауссовым шумом один из подходов заключается в дискретизации переменных скрытого состояния [130], что приводит к динамическим Байесовским сетям (Dynamic Bayesian Networks) [131–133], среди которых наиболее изученными являются скрытые марковские модели (HMM – *the Hidden Markov Model*) [134, 135]. Подробное описание различных методов моделирования в пространстве состояний представлено в [117, 118, 136–139].

Анализ данных в абстрактных пространствах характеристик

Помимо привычного представления в 3D-пространстве координат, исходные данные могут быть представлены различными измерениями характеризующих их величин или характеристиками (которые могут быть бинарными, категориальными, непрерывными и др.). В таком случае, вектор $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_q]$ размерности q содержит такие характеристики (*features*) в качестве компонент. При анализе данных (например, при выделении групп объектов со сходными характеристиками) «сырые» данные преобразуются так, что в них выделяются наиболее значимые характеристики, и/или группы моделируются непосредствен-

но в абстрактных пространствах характеристик (*feature space*). В этом случае \mathbf{x}' – вектор преобразованных характеристик размерности q' [140].

Вектора характеристик в группах (выборках, кластерах), выделяемых в исходных данных, располагаются в пространстве характеристик близко друг другу. Каждой группе объектов соответствует q -мерная функция плотности вероятности, для которой определяется экстремум. Приписание объектов к той или иной группе может выполняться как с обучением (*supervised classification*), так и без обучения (*unsupervised classification*), в первом случае соответствующее разбиение известно заранее, во втором – нет. [141].

Существуют различные методы преобразования исходных данных, при этом размерность исходного пространства может не изменяться (например, в случае усиления сигнала, нормировки, усреднения), увеличиваться (например, при нелинейном расширении (non-linear expansion), дискретизации характеристик (feature discretization)) или уменьшаться (при извлечении локальных характеристик). Если размерность данных очень велика, то можно переводить данные в пространство меньшей размерности, сохраняя основную информацию. Классическими примерами в этом случае являются анализ главных компонент (*PCA от англ. Principal Component Analysis*) и многомерное шкалирование (*MDS от англ. Multidimensional Scaling*) [140].

Методы сокращения размерности разделяются на проективные (к которым относятся PCA, kernel PCA, probabilistic PCA, дискриминантный анализ и др.), и методы, которые моделируют многомерные пространства (*manifold*), в которых лежат данные, например, MDS, landmark MDS, спектральное разбиение (spectral clustering) и др. [142].

Далее рассматривается применение различных методов анализа данных к набору многомерных посадочных траекторий самолётов в двумерном случае. Представленные в настоящей главе результаты опубликованы в [64, 75, 77, 81, 82, 84, 143, 144].

2.1 Метод полиномиальных регрессий

Модель одновременного выравнивания и разбиения одномерных временных рядов на выборки со сходными характеристиками

Рассмотрим выполняемые одновременно выравнивание и разбиение одномерных временных рядов, т.е. векторов переменной длины, представляющих координатные временные зависимости. Каждый вектор $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^{1 \times L}, n = \overline{1, N}$, представляющий n -ю траекторию, состоит из последовательности измерений координатной зависимости $x_n = x_n(t)$ в моменты времени $\mathbf{t}_n \in \mathbb{R}^{1 \times L}$. В [100] модели смеси регрессий эффективно используются для разбиения одномерных векторов переменной длины на достаточно однородные выборки. Вектор \mathbf{x}_n моделируется регрессионной моделью

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{T}_n \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}_n, \quad (2.1.1)$$

где $\boldsymbol{\beta}$ – вектор коэффициентов регрессии размерности $1 \times (q + 1)$; $\boldsymbol{\epsilon}_n$ – гауссов шум с нулевым средним; \mathbf{T}_n – регрессионная матрица, которая зависит от типа используемой регрессионной модели. В случае полиномиальной регрессии \mathbf{T}_n имеет вид стандартной матрицы Вандермонта

$$\mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} 1 & t_n[1] & (t_n[1])^2 & \cdots & (t_n[1])^q \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & t_n[L_n] & (t_n[L_n])^2 & \cdots & (t_n[L_n])^q \end{bmatrix} \quad (2.1.2)$$

В основе модели одновременных выравнивания и разбиения лежит модель смеси регрессий, в которую вводится четыре независимых параметра преобразований выравнивания и масштабирования во времени и пространстве $\{\Phi_n\} = \{a_n, b_n, c_n, l_n\}$ (параметры a_n и b_n описывают масштабирование и сдвиг во време-

ни, а параметры c_n и l_n – масштабирование и смещение в пространстве измерений). Полиномиальная регрессия для одномерного случая имеет вид

$$\mathbf{x}_n = c_n \boldsymbol{\Upsilon}_n \boldsymbol{\beta}_k + l_n + \boldsymbol{\epsilon}_n \quad (2.1.3)$$

где матрица $\boldsymbol{\Upsilon}_n$ получается из \mathbf{T}_n (2.1.3) подстановкой $\mathbf{t}_n \rightarrow a_n \mathbf{t}_n - b_n$; $\boldsymbol{\beta}_k$ определяет модель регрессии для k -ой выборки ($k = \overline{1, K}$); $\boldsymbol{\epsilon}_n$ – гауссов шум с нулевым средним и дисперсией $\sigma_k^2 \mathbf{I}$. Поэтому распределение плотности условной вероятности имеет вид

$$p_k = (\mathbf{x}_n | a_n, b_n, c_n, l_n) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_n | c_n \boldsymbol{\Upsilon}_n \boldsymbol{\beta}_k + l_n, \sigma_k^2 \mathbf{I}). \quad (2.1.4)$$

Плотность вероятности для траектории \mathbf{x}_n однозначно задаётся соответствующим множеством параметров $\{\Phi_n\}$, которые подлежат определению. Задача разбиения траекторий на выборки решается как стандартная задача оценки значений скрытых переменных. Каждый из параметров преобразования в формулах (2.1.3) и (2.1.4) рассматривается как характерная для \mathbf{x}_n случайная переменная с заранее известным распределением вероятности для определённой выборки. Параметры преобразования и параметры модели оцениваются одновременно посредством EM-алгоритма.

Априорные распределения вероятностей для параметров преобразования

Априорные распределения вероятностей для параметров преобразования выбираются таким образом, чтобы тождественное преобразование являлось наиболее вероятным. С учётом этого эффективная априорная вероятность имеет Гауссово распределение $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}^2)$ со средним $\boldsymbol{\mu}$ и дисперсией $\boldsymbol{\sigma}^2$. Поэтому априорные распределения вероятности для параметров преобразования времени определяются как

$$a_n \sim \mathcal{N}(1, r_k^2), \quad b_n \sim \mathcal{N}(0, s_k^2), \quad (2.1.5)$$

и априорные распределения вероятности для параметров преобразования координаты задаются как

$$c_n \sim \mathcal{N}(1, u_k^2), \quad l_n \sim \mathcal{N}(1, \nu_k^2). \quad (2.1.6)$$

В формуле (2.1.6) параметры дисперсии u_k^2 и ν_k^2 зависят от выборки. Однако, любое подмножество этих параметров может быть выравнено ("сшито") между выборками, если это требуется для конкретного приложения. Отметим, что априорные распределения вероятности технически допускают отрицательное масштабирование во времени и в пространстве измерений. Хотя, этот результат нетипичен, можно задать другие априорные распределения вероятности, например, логарифмически нормальные, чтобы не допустить отрицательного масштабирования. Следует заметить, что дисперсии для параметров априорных вероятностей выводятся на основе данных, полученных с помощью ЕМ-алгоритма. Ниже модель (2.1.3)–(2.1.6) совместного выравнивания и разбиения траекторий на достаточно однородные выборки обобщается на случай многомерного пространства измерений.

Одновременное выравнивание и разбиение набора многомерных траекторий на выборки со сходными характеристиками

Рассмотрим выравнивание траекторий в многомерном пространстве. Ранее предполагалось, что вектор $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^{1 \times L}$ состоит из последовательности измерений одномерной координатной зависимости в моменты времени $\mathbf{t}_n \in \mathbb{R}^{1 \times L}$. Однако во многих приложениях такие зависимости от времени являются многомерными. Таким образом, каждому моменту времени $t_n[i], i = \overline{1, L_n}$, соответствует многомерный вектор пространства размерности D . Обозначим многомерные траектории $\mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^{D \times L}$, полученные в результате измерений в моменты времени $\mathbf{t}_n \in \mathbb{R}^{1 \times L}$. Тогда матрица $\mathbf{X}_n = \{X_n[i; d], i = \overline{1, L_n}, d = \overline{1, D}\}$ состоит из D столбцов таких что каждый d -й столбец $\mathbf{x}_n^{(d)} = \{X_n[i; d], i = \overline{1, L_n}\}, d = \overline{1, D}$ содержит последовательность измерений d -той одномерной координатной зависимости для n -той рассматриваемой переменной. Т.е столбец $\mathbf{x}_n^{(d)}$, соответствующий одномерному вектору $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^{1 \times L}$ в формуле (2.1.1), оказывается вложенным в матрицу многомерной траектории $\mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^{D \times L}$.

Выравнивание многомерных траекторий в пространстве

Для многомерной траектории $\mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^{D \times L}$ одномерный вектор измерений по каждой координате описывается независимой регрессионной моделью

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_n^{(d)} &= \mathbf{T}_n \boldsymbol{\beta}_{kd} + l_{nd} + \boldsymbol{\epsilon}_n, \\ l_{nd} &\propto \mathcal{N}(0; \nu_{kd}^2); \quad \boldsymbol{\epsilon}_n \propto (\mathbf{0}_{1 \times L_n}; \sigma_{kd}^2 \mathbf{I}_{L_n \times L_n})\end{aligned}\tag{2.1.7}$$

где \mathbf{T}_n – матрица Вандермонта (2.1.2). Матрица $\boldsymbol{\beta}_{kd}$ задаёт коэффициенты регрессии для d -го измерения (т.е. коэффициенты регрессии для d -го столбца $\mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^{D \times L}$); l_{nd} задаёт смещение для d -го измерения; $\mathbf{0}_{1 \times L_n}$ – вектор с нулевыми компонентами размерности $1 \times L_n$ и $\mathbf{I}_{L_n \times L_n}$ – единичная матрица размерности $L_n \times L_n$. Использование параметров ν_{kd}^2 и σ_{kd}^2 позволяет рассматривать дисперсию по каждому измерению независимо.

На основе модели (2.1.7) плотность вероятности многомерной кривой $\mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^{D \times L}$ с параметрами смещения $\{l_{nd}, d = \overline{1, D}\}$ определяется следующим образом:

$$p = (\mathbf{X}_n, l_{n1}, \dots, l_{nD}) = \prod_{d=1}^D \mathcal{N} \left(\mathbf{x}_n^{(d)} | \mathbf{T}_n \boldsymbol{\beta}_{kd} + l_{nd}, \sigma_{kd}^2 \mathbf{I}_{L_n \times L_n} \right) \mathcal{N} (l_{nd} | 0, \nu_{kd}^2) \tag{2.1.8}$$

Плотность вероятности (2.1.8) учитывает два необходимых условия: во-первых, все координаты пространства траекторий $\mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^{D \times L}$ и, во-вторых, предполагается, что для каждого измерения d существует собственное множество параметров смещения $\{\Phi_n\}_d$. Далее предполагается, что эти два условия всегда выполняются.

Плотность безусловного распределения (компонент многомерной случайной величины) $p(\mathbf{X}_n)$ представляется в виде произведения $p(\mathbf{X}_n) = \prod_{d=1}^D p(\mathbf{x}_n^{(d)})$, поэтому логарифм правдоподобия для $\{\mathbf{X}_n, n = \overline{1, N}\}$ имеет вид

$$\mathcal{L} = \sum_{n=1}^N \log (p(\mathbf{X}_n)) = \sum_{n=1}^N \sum_{d=1}^D \log \left(\int p \left(\mathbf{x}_n^{(d)} | l_{nd} \right) p(l_{nd}) dl_{nd} \right). \tag{2.1.9}$$

Интегрирование в формуле (2.1.9) выполняется аналитически, что приводит к следующему виду логарифма правдоподобия:

$$\mathcal{L} = \sum_{n=1}^N \sum_{d=1}^D \log \left(\mathcal{N} \left(\mathbf{x}_n^{(d)} | \mathbf{T}_n \boldsymbol{\beta}_{kd}, \mathbf{I}_{L_n \times L_n} \nu_{kd}^2 + \mathbf{I}_{L_n \times L_n} \sigma_{kd}^2 \right) \right), \quad (2.1.10)$$

где $\mathbf{I}_{L_n \times L_n}$ – единичная матрица размерности $L_n \times L_n$.

Выравнивание многомерных траекторий во времени

Поскольку независимые координаты многомерного пространства смещаются и масштабируются независимо, для выравнивания в пространстве рассматриваются D отдельных параметров преобразования. Однако изменение во времени каждой координаты траектории происходит в одном и том же временном масштабе, следовательно, параметры преобразования времени должны быть распределены одинаково по всем D измерениям. Поэтому каждому из векторов $\mathbf{x}_n^{(d)} \in \mathbb{R}^{1 \times L}$ соответствует единственный параметр b_n . Тогда условная вероятность для вектора $\mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^{D \times L}$ определяется как

$$p(\mathbf{X}_n | b_n) = \prod_{d=1}^D p(\mathbf{x}_n^{(d)} | b_n) = \prod_{d=1}^D \mathcal{N} \left(\mathbf{x}_n^{(d)} | \boldsymbol{\Upsilon}_n \boldsymbol{\beta}_{kd}, \sigma_{kd}^2 \mathbf{I}_{L_n \times L_n} \right), \quad (2.1.11)$$

где используется только b_n для всех $d = \overline{1, D}$ и матрица $\boldsymbol{\Upsilon}_n$ получается из \mathbf{T}_n (2.1.2) подстановкой $\mathbf{t}_n \rightarrow \mathbf{t}_n - b_n$. Условная вероятность разлагается на множители, а безусловная вероятность $p(\mathbf{X}_n | b_n)$ не разлагается, поскольку различные измерения в пространстве оказываются связанными через параметр смещения времени b_n . Следовательно, для логарифма правдоподобия набора траекторий $\{\mathbf{X}_n, n = \overline{1, N}\}$ имеем

$$\mathcal{L} = \sum_{n=1}^N \log(p(\mathbf{X}_n)) = \sum_{n=1}^N \log \left(\int p(b_n) \prod_{d=1}^D p(\mathbf{x}_n^{(d)} | b_n) db_n \right). \quad (2.1.12)$$

Под знаком интеграла в формуле (2.1.12) находится произведение вероятностей по всем измерениям пространства, что приводит к сложным вычислениям. Однако, с помощью методов Монте-Карло можно вычислить аппроксимацию логарифма правдоподобия (2.1.12) следующим образом:

$$\mathcal{L} \approx \sum_{n=1}^N \log \left(\sum_{m=1}^M \prod_{d=1}^D p \left(\mathbf{x}_n^{(d)} | b_n^{(m)} \right) \right) - N \log(M), \quad (2.1.13)$$

где $b_n^{(m)} \propto \mathcal{N}(0, s_k^2)$ ($m = \overline{1, M}$), взятое в соответствии с (2.1.5), и M – число выборок $b_n(m)$ в испытаниях Монте-Карло.

ЕМ-алгоритм

Сложность ЕМ-алгоритма, обеспечивающего одновременное обучение параметров модели и преобразования, является линейной функцией от полного числа точек $\sum_{n=1}^N L_n$ многомерных траекторий \mathbf{X}_n [73]. Пусть π_n – принадлежность \mathbf{X}_n к некоторой выборке. Параметры $\{\Phi_n\}$ и принадлежности к выборке π_n рассматриваются как скрытые переменные. В таком случае логарифм правдоподобия для полного набора данных определяется как логарифм совместного правдоподобия множества векторов $\{\mathbf{X}_n, n = \overline{1, N}\}$ и скрытых переменных $\Phi = \{\Phi_n, \pi_n\}$, что в соответствии с формулой (2.1.11) может быть записано в виде суммы (по всем N траекториям) логарифма от произведения веса выборки α_{π_n} и совместного распределения вероятности (2.1.4), зависящего от выборки

$$\mathcal{L}_c = \sum_{n=1}^N \sum_{d=1}^D \log \left(\alpha_{\pi_n} p_{\pi_n} \left(\mathbf{x}_n^{(d)} | \Phi_n \right) p_{\pi_n}(\Phi_n) \right). \quad (2.1.14)$$

На Е-шаге оценивается распределение вероятности $p(\Phi_n, \pi_n | \Phi_n)$ и затем используется в качестве следующего ожидаемого распределения в (2.1.14). На следующей итерации это ожидаемое распределение используется на М-шаге для оценки параметров модели в $p_{\pi_n} \left(\mathbf{x}_n^{(d)} | \Phi_n \right)$.

Метод полиномиальных регрессий для решения задачи секторизации

Описанный в настоящей Главе метод полиномиальных регрессий позволяет разделить набор анализируемых данных на выборки в соответствии со сходством формы и скоростных режимов траектории самолётов на заданное число выборок. Анализируемый набор траекторий разбивался на пять выборок в соответствии с числом крупных аэропортов, расположенных в зоне действия радара. Полученное разбиение представлено на Рис. 11, *a*. Распределение траекторий по выборкам следующее: выборка, выделенная розовым цветом, содержит 16 траекторий, зелёным цветом – 13, синим, чёрным и красным – 3, 37 и 38 траекторий соответственно. При этом определяются траектории, не вошедшие ни в одну из выборок, которые считаются посторонними (представлены на Рис. 11, *b*).

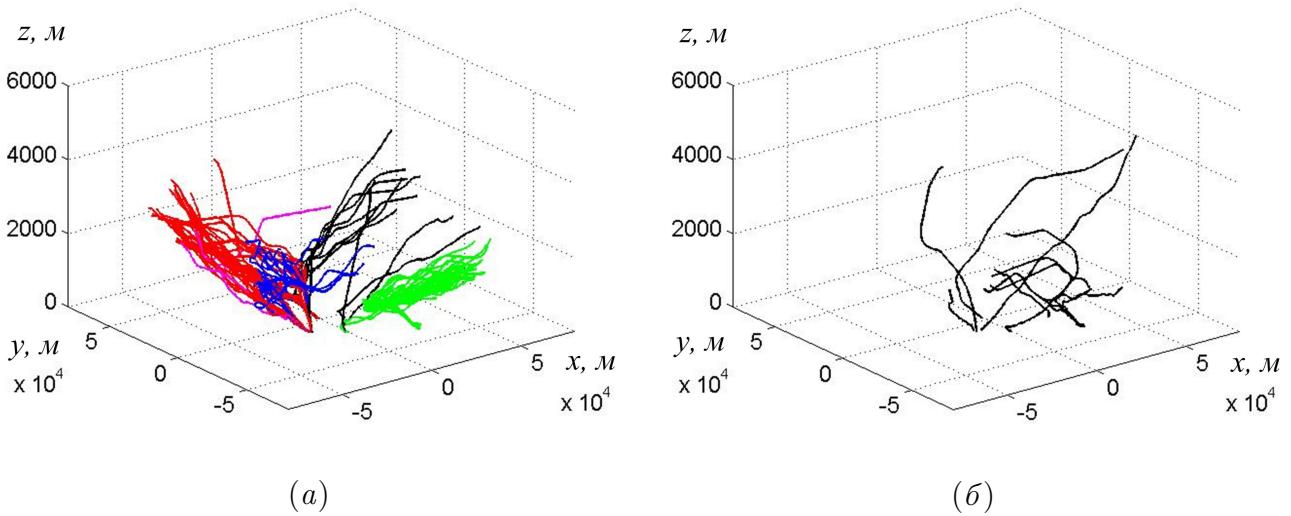


Рис. 11: а) Результаты разбиения исходного набора данных по методу полиномиальных регрессий на пять выборок,

б) Выявленные посторонние траектории, не относящиеся ни к одной из выборок

С помощью данного метода одновременно оцениваются пучки траекторий и их центроиды (линии тренда, выделенные жирными линиями на Рис. 12), которые моделируются с помощью полинома 5-й степени. При рассмотрении проекций траекторий выборки на оси координат, показанной на Рис. 12, видно, что полученные выборки являются неоднородными. На Рис. 13–15 показаны проекции трёх отдельных выборок на оси координат. При данном разбиении исходного набора траекторий, каждая из полученных выборок является доста-

точно неоднородной и содержит несколько пучков траекторий (соответствующих «клювам»).

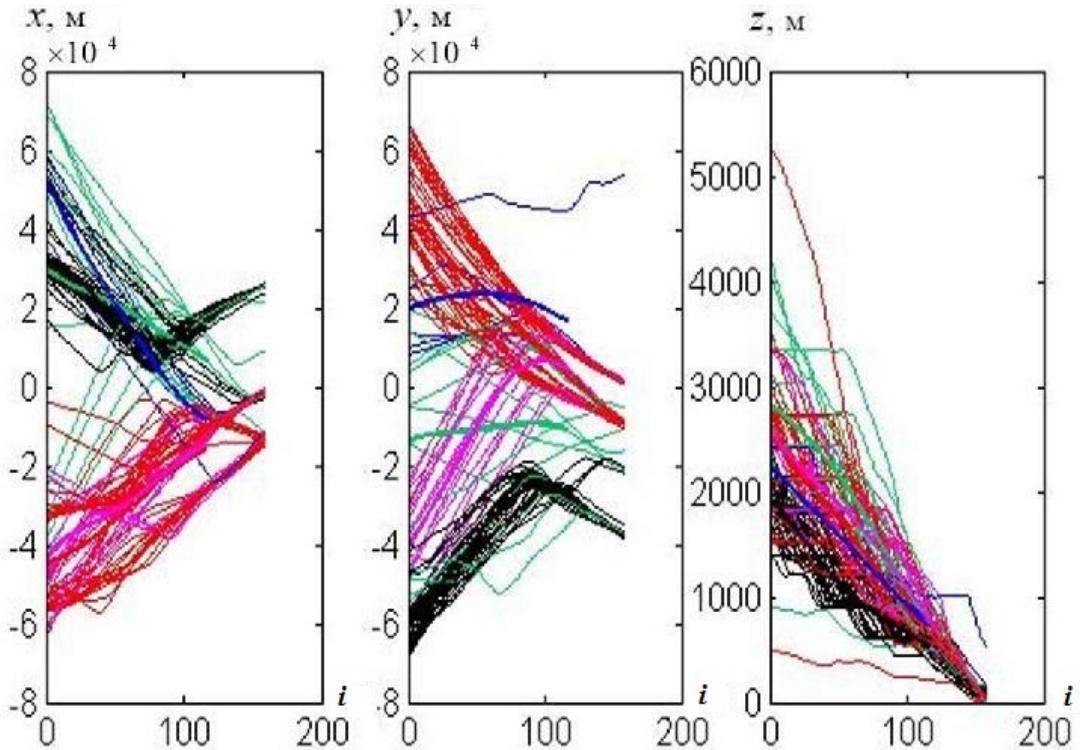


Рис. 12: Вид первичного разбиения исходного набора посадочных траекторий в проекциях на оси координат x , y и z

Недостатки данного метода (например, нестабильность получаемого результата распределения траекторий по выборкам) связаны с применением при данном разбиении алгоритма K-means (использующего евклидову меру расстояния) и особенностями геометрии анализируемых данных. Помимо этого метод полиномиальных регрессий требует предварительного задания числа выборок (кластеров), на которые разбивается исходный набор траекторий. Хотя данный метод не подходит для решения задачи секторизации пространства, но полученные результаты (разбиение траекторий на выборки) могут быть проанализированы другими методами.

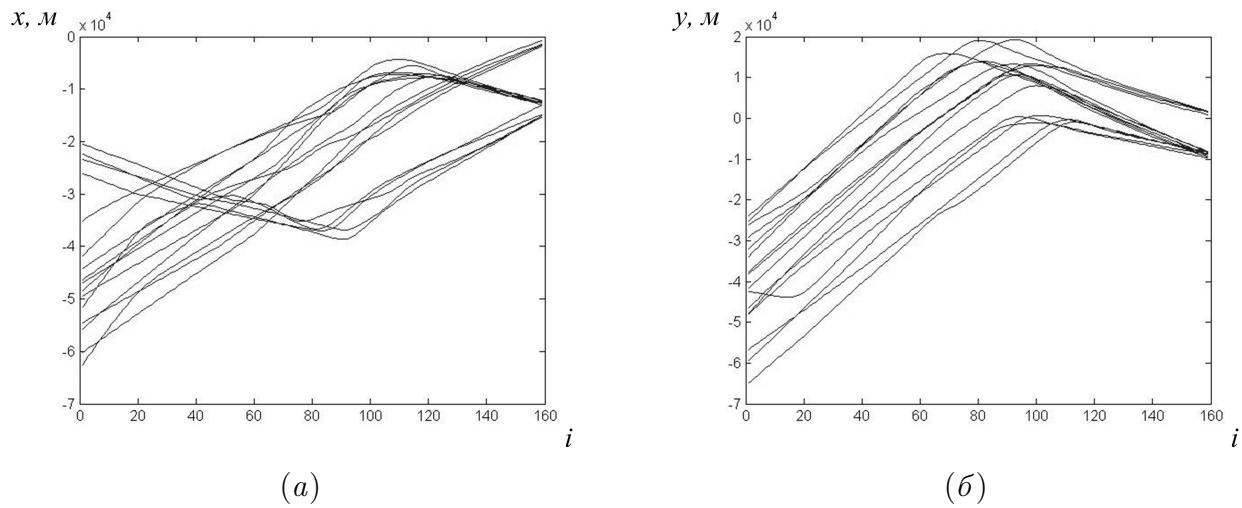


Рис. 13: Проекции 16 траекторий выборки, выделенной розовым цветом на Рис. 11, *a* и Рис. 12,
 (а) – проекция на ось x , (б) – проекция на ось y

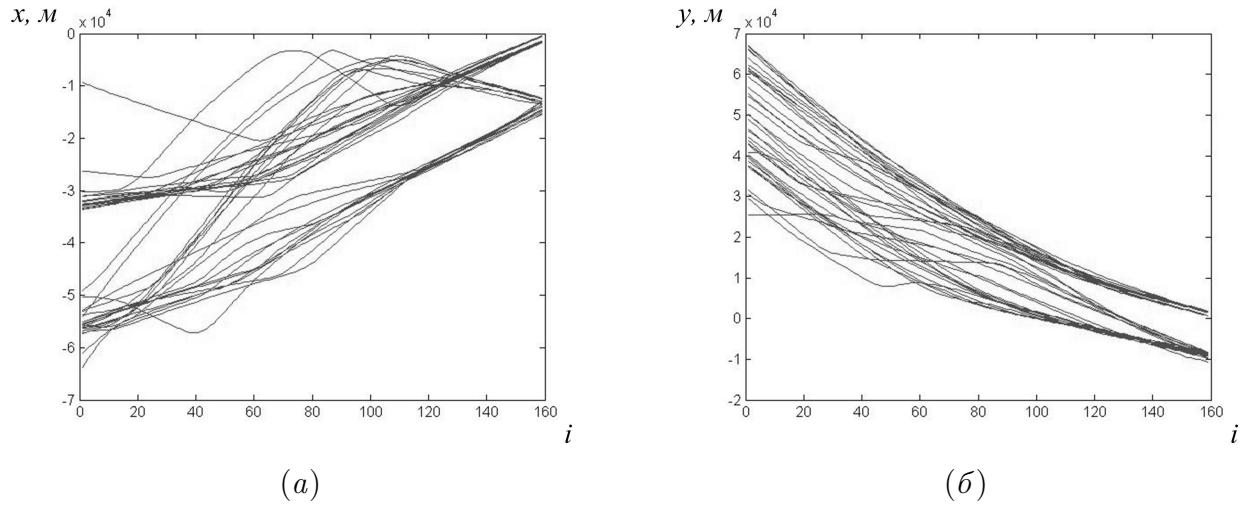


Рис. 14: Проекции 38 траекторий выборки, выделенной красным цветом на Рис. 11, *a* и Рис. 12,
 (а) – проекция на ось x , (б) – проекция на ось y

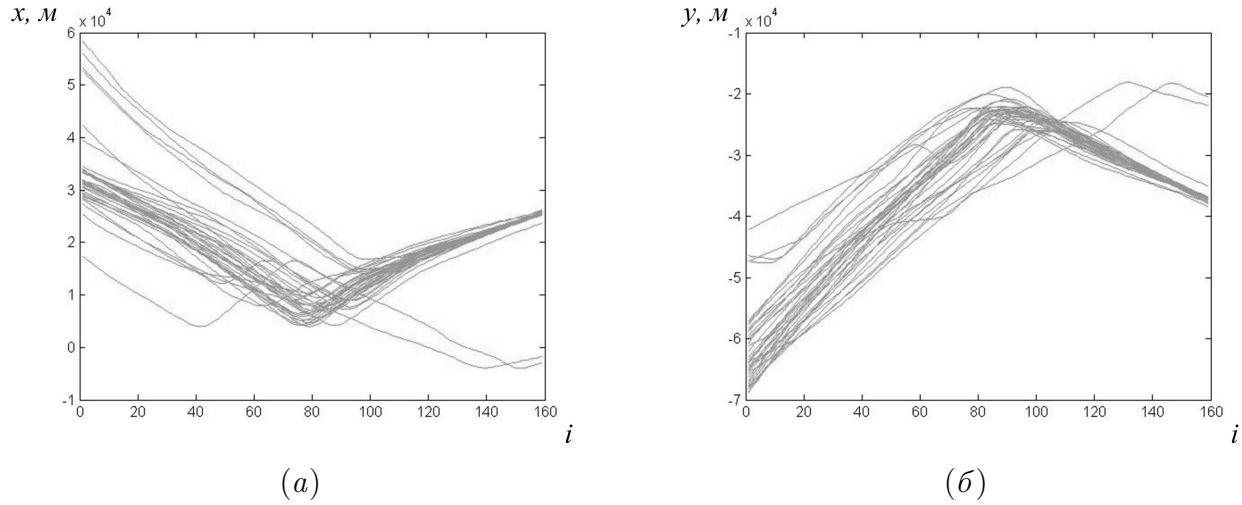


Рис. 15: Проекции 37 траектории выборки, выделенной чёрным цветом на Рис. 11, *a* и Рис. 12,
(a) – проекция на ось x , *(б)* – проекция на ось y

2.2 Представление многомерных траекторий в пространстве состояний

2.2.1 Модели линейных динамических систем (ЛДС)

В настоящей Главе при описании метода линейных динамических систем для удобства вместо матрицы траектории (измерений)

$$\mathbf{X}_n = [\mathbf{x}[1], \dots, \mathbf{x}[D]]$$

с векторами-столбцами $\mathbf{x}[d], d = \overline{1, D}$ (2.1.1) и (2.1.3) используется транспонированная матрица, т.е.

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_n^T \in \mathbb{R}^{D \times L}.$$

Пусть $\mathbf{S} = \mathbf{S}[\overline{1, q}; \overline{1, L}]$ – многомерный временной ряд для вектора состояния, имеющего размерность $q \times L$, а $\mathbf{X} = \mathbf{X}[\overline{1, D}; \overline{1, L}]$ – многомерный наблюдаемый временной ряд размерности $D \times L$, причем в общем случае $q < D$ (размерность линейной динамической системы меньше размерности измерений (траекторий)). Как шум состояния $\mathbf{U} = \mathbf{U}[\overline{1, q}, \overline{1, L}]$, так и шум измерений $\mathbf{W} = \mathbf{W}[\overline{1, D}; \overline{1, L}]$ – многомерные временные ряды для Гауссовых случайных переменных с нулевым средним и ковариационными матрицами \mathbf{Q} и \mathbf{R} , соответственно.

Линейные, инвариантные относительно времени динамические системы, называемые также линейными Гауссовыми моделями в пространстве состояний, описываются двумя уравнениями для векторов-столбцов $\mathbf{s}[i] = \mathbf{S}[\overline{1, q}; i]$, $\mathbf{x}[i] = \mathbf{X}[\overline{1, D}; i]$, $\mathbf{u}[i] = \mathbf{U}[\overline{1, q}; i]$ и $\mathbf{w}[i] = \mathbf{W}[\overline{1, D}; i]$ (индекс i представляет дискретное время)

$$\mathbf{s}[i + 1] = \mathbf{F}\mathbf{s}[i] + \mathbf{u}[i], \quad (2.2.1)$$

$$\mathbf{x}[i] = \mathbf{G}\mathbf{s}[i] + \mathbf{w}[i], \quad (2.2.2)$$

где \mathbf{F} – матрица переходов, \mathbf{G} – матрица наблюдений. В теории линейной фильтрации временной ряд \mathbf{X} вектора наблюдений рассматривается как зашумлённый детерминированный временной ряд \mathbf{S} вектора состояний. В теории Байесовской

фильтрации отличающиеся одним временным шагом векторы-столбцы (значения переменных состояния в последовательные дискретные моменты времени) на основании уравнения (2.2.1) объединяются в Гауссову случайную переменную со статистическими характеристиками шума состояния \mathbf{u} [127]. Для Гауссовой случайной переменной \mathbf{w} аналогичная комбинация одновременных состояний системы и наблюдаемой переменной формируется на основе уравнения (2.2.2) [127]. В результате условные распределения вероятности для векторов наблюдения и состояния линейной динамической системы имеют вид

$$P(\mathbf{s}[i]|\mathbf{s}[i-1]) = (2\pi)^{-\frac{q}{2}} |\mathbf{Q}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{s}[i] - \mathbf{F}\mathbf{s}[i-1])^T \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{s}[i] - \mathbf{F}\mathbf{s}[i-1])\right) \quad (2.2.3)$$

$$P(\mathbf{x}[i]|\mathbf{s}[i]) = (2\pi)^{-\frac{D}{2}} |\mathbf{R}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{x}[i] - \mathbf{G}\mathbf{s}[i])^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{x}[i] - \mathbf{G}\mathbf{s}[i])\right), \quad (2.2.4)$$

где $|...|$ обозначает определитель матрицы. Предполагается, что распределения (2.2.3, 2.2.4), также как и исходное распределение вероятности состояний в момент времени $i = 1$, являются Гауссовыми со средним $\mu[1]$ и вариацией $\mathbf{V}[1] = \boldsymbol{\sigma}^2[1]$:

$$P(\mathbf{s}[1]) = (2\pi)^{-\frac{D}{2}} |\mathbf{V}[1]|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{s}[1] - \boldsymbol{\mu}[1])^T \mathbf{V}[1]^{-1} (\mathbf{s}[1] - \boldsymbol{\mu}[1])\right) \quad (2.2.5)$$

В уравнении (2.2.1) состояние системы (линейно) зависит только от предыдущего состояния, отстоящего на один временной шаг (марковский процесс). Поэтому с учётом свойства марковости условных вероятностей формула для совместной вероятности $P(\mathbf{S}, \mathbf{X})$ имеет вид

$$P(\mathbf{S}, \mathbf{X}) = P(\mathbf{s}[1]) \left(\prod_{i=2}^L P(\mathbf{s}[i]|\mathbf{s}[i-1]) \right) \left(\prod_{i=1}^L P(\mathbf{x}[i]|\mathbf{s}[i]) \right) \quad (2.2.6)$$

Из выражений (2.2.3)–(2.2.5) следует, что логарифм $P(\mathbf{S}, \mathbf{X})$ (2.2.6) является квадратичной формой (постоянный член опущен):

$$\begin{aligned}
\log(P(\mathbf{S}, \mathbf{X})) = & -\frac{1}{2} \sum_{i=2}^L (\mathbf{s}[i] - \mathbf{F}\mathbf{s}[i-1])^T \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{s}[i] - \mathbf{F}\mathbf{s}[i-1]) - \frac{L-1}{2} \log(|\mathbf{Q}|) - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^L (\mathbf{x}[i] - \mathbf{G}\mathbf{s}[i])^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{x}[i] - \mathbf{G}\mathbf{s}[i]) - \\
& - \frac{L}{2} \log(|\mathbf{R}|) - \frac{1}{2} (\mathbf{s}[1] - \boldsymbol{\mu}[1])^T \mathbf{V}[1]^{-1} (\mathbf{x}[1] - \boldsymbol{\mu}[1]) - \frac{1}{2} \log(|\mathbf{V}[1]|). \quad (2.2.7)
\end{aligned}$$

ЕМ-алгоритм

В работах [138, 139, 145–147] описано использование ЕМ-алгоритма для оценки параметров линейной динамической системы (2.2.1, 2.2.2) на основе многомерного наблюдаемого временного ряда \mathbf{X} . Е-шаг заключается в вычислении условного среднего логарифма правдоподобия (2.2.7):

$$\mathcal{L} = E[\log(P(\mathbf{S}, \mathbf{X}))|\mathbf{X}] \quad (2.2.8)$$

Из выражения (2.2.7) следует, что выражение (2.2.8) зависит от тёх типов условных средних (ожиданий), для которых используются следующие обозначения:

$$\langle \mathbf{s}[i] \rangle = E[\mathbf{s}[i]|\mathbf{x}] \quad (2.2.9)$$

$$\mathbf{P}[i] = E[\mathbf{s}[i]\mathbf{s}[i]^T|\mathbf{x}] \quad (2.2.10)$$

$$\mathbf{P}[i; i-1] = E[\mathbf{s}[i]\mathbf{s}[i-1]^T|\mathbf{x}] \quad (2.2.11)$$

В момент времени i оценка состояния $\langle \mathbf{s}[i] \rangle$ (2.2.9) зависит от прошлых $\mathbf{x}[\overline{1, i-1}]$ и будущих $\mathbf{x}[\overline{i+1, L}]$ наблюдений [148]. Следовательно, она отличается от оценки вычисленной посредством фильтра Калмана, который оценивает состояние только на основе прошлых наблюдений [127]. Вычисление условных средних (ожиданий) (2.2.9)–(2.2.11) на Е-шаге ЕМ-алгоритма приводится после описания М-шага, т.е. оценки параметров линейной динамической системы (2.2.1, 2.2.2).

M-шаг. Параметры линейной динамической системы (2.2.1) и (2.2.2) – это матрицы \mathbf{F} и \mathbf{G} , а также статистические характеристики \mathbf{Q} и \mathbf{R} распределения (2.2.3) и (2.2.4), соответственно, и характеристики $\boldsymbol{\mu}[1]$ и \mathbf{V} распределения (2.2.5). На основе оценок (2.2.9)–(2.2.11) и наблюдения $\mathbf{x}[\overline{1, L}]$ каждый из параметров линейной системы оценивается из условия равенства нулю соответствующей частной производной условного среднего логарифма правдоподобия \mathcal{L} (2.2.8). В результате

$$\mathbf{F} = \left(\sum_{i=2}^L \mathbf{P}[i; i-1] \right) \left(\sum_{i=2}^L \mathbf{P}[i-1] \right)^{-1} \quad (2.2.12)$$

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{L-1} \left(\sum_{i=2}^L \mathbf{P}[i] - \mathbf{F} \sum_{i=2}^L \mathbf{P}[i; i-1] \right) \quad (2.2.13)$$

$$\mathbf{G} = \left(\sum_{i=1}^L \mathbf{x}[i] < \mathbf{s}[i] >^T \right) \left(\sum_{i=1}^L \mathbf{P}[i] \right)^{-1} \quad (2.2.14)$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{L-1} \sum_{i=1}^L (\mathbf{x}[i]\mathbf{x}[i]^T - \mathbf{G} < \mathbf{s}[i] > \mathbf{x}[i]^T) \quad (2.2.15)$$

$$\boldsymbol{\mu}[1] = < \mathbf{s}[1] > \quad (2.2.16)$$

$$\mathbf{V}[1] = E [(\mathbf{s}[1] - < \mathbf{s}[1] >) (\mathbf{s}[1] - < \mathbf{s}[1] >)^T | \mathbf{x}] = \mathbf{P}[1] - < \mathbf{s}[1] > < \mathbf{x}[1] >^T. \quad (2.2.17)$$

E-шаг. Используются следующие обозначения: $< \mathbf{s}[i; j] > = E [\mathbf{s}[i] | \mathbf{x}[\overline{1, j}]]$ (таким образом, для условного среднего) (2.2.9) имеем $< \mathbf{s}[i] > \equiv < \mathbf{x}[i; L] >$ и

$$\mathbf{V}[i; j] = E [(\mathbf{s}[i] - < \mathbf{s}[i] >) (\mathbf{s}[i] - < \mathbf{s}[i] >)^T | \mathbf{x}[\overline{1, j}]]$$

Используя оценки (2.2.12)–(2.2.17), сначала приводятся рекурсыи вперёд для линейного фильтра Калмана

$$< \mathbf{s}[i; i-1] > = \mathbf{F} < \mathbf{s}[i-1; i-1] > \quad (2.2.18)$$

$$\mathbf{V}[i; i-1] = \mathbf{F} \mathbf{V}[i-1; i-1] \mathbf{F}^T + \mathbf{Q} \quad (2.2.19)$$

и вычисляются матрицы усиления Калмана

$$\mathbf{K}[i] = \mathbf{V}[i; i-1] \mathbf{G}^T (\mathbf{G} \mathbf{V}[i; i-1] \mathbf{G}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (2.2.20)$$

$$\langle \mathbf{s}[i; i] \rangle = \langle \mathbf{s}[i; i-1] \rangle + \mathbf{K}[i] (\langle \mathbf{x}[i] \rangle - \mathbf{G} \langle \mathbf{s}[i; i-1] \rangle) \quad (2.2.21)$$

$$\mathbf{V}[i; i] = \mathbf{V}[i; i-1] - \mathbf{K}[i] \mathbf{G} \mathbf{V}[i; i-1] \quad (2.2.22)$$

где $\langle \mathbf{s}[1] \rangle = \boldsymbol{\mu}[1]$ из (2.2.16) и $\mathbf{V}[1]$ (2.2.17).

Вывод рекурсии (2.2.18)–(2.2.22) основан на Байесовском подходе [149].

На основании работ [138, 139, 145–147] для вычисления оценки $\langle \mathbf{s}[i] \rangle \equiv \langle \mathbf{s}[i; L] \rangle$ (2.2.9) и условного среднего $\mathbf{P}[i] \equiv \mathbf{V}[i; L] + \langle \mathbf{s}[i; L] \rangle \langle \mathbf{s}[i; L] \rangle^T$ (2.2.10) выполняется рекурсия назад (здесь $\mathbf{J}[i]$ – вспомогательная матрица):

$$\mathbf{J}[i-1] = \mathbf{V}[i-1; i-1] \mathbf{F}^T (\mathbf{V}[i; i-1])^{-1} \quad (2.2.23)$$

$$\langle \mathbf{s}[i-1; L] \rangle = \langle \mathbf{s}[i-1; i-1] \rangle + \mathbf{J}[i-1] (\langle \mathbf{s}[i; L] \rangle - \mathbf{F} \langle \mathbf{s}[i-1; i-1] \rangle) \quad (2.2.24)$$

$$\mathbf{V}[i-1; L] = \mathbf{V}[i-1; i-1] + \mathbf{J}[i-1] (\mathbf{V}[i; L] - \mathbf{V}[i; i-1]) \mathbf{J}[i-1]^T. \quad (2.2.25)$$

Условное среднее (2.2.11) имеет вид

$$\mathbf{P}[i; i-1] \equiv \mathbf{V}[i; i-1; L] + \langle \mathbf{s}[i; L] \rangle \langle \mathbf{s}[i-1; L] \rangle^T,$$

где $\mathbf{V}[i; i-1; L] = E \left[(\mathbf{s}[i] - \langle \mathbf{s}[i] \rangle) (\mathbf{s}[i-1] - \langle \mathbf{s}[i-1] \rangle)^T | \mathbf{x}[\overline{1, L}] \right]$. Значения $\mathbf{V}[i; i-1; L]$ также вычисляются рекурсией назад

$$\mathbf{V}[i-1; i-2; L] = \mathbf{V}[i-1; i-1] \mathbf{J}[i-2]^T + \mathbf{J}[i-1] (\mathbf{V}[i; i-1; L] - \mathbf{F} \mathbf{V}[i-1; i-1]) \mathbf{J}[i-2]^T \quad (2.2.26)$$

Итерации в виде последовательного чередования М- и Е-шагов с оценкой изменения ожидаемого условного логарифма правдоподобия \mathcal{L} (2.2.8) обеспечивает оценку $\langle \mathbf{s}[\overline{1, L}] \rangle$ (2.2.9) временного ряда состояния размерности $q \times L$.

Анализ проекций траекторий выборок с помощью моделей ЛДС

Анализируемые посадочные траектории самолётов представляют собой данные большой размерности. В настоящей Главе рассматривается применение метода линейных динамических систем (ЛДС) для решения задачи секторизации

пространства в плоском случае. Метод ЛДС применяется для выделения пучков траекторий в выборке траекторий, полученной в результате предварительного разбиения набора траекторий по методу полиномиальных регрессий (см. Главу 2.1).

В результате применения метода ЛДС к анализируемым данным определяется вектор скрытых состояний системы. На Рис. 16–19 представлены проекции траекторий на оси совместно с компонентами вектора состояний ЛДС размерности $q = 2$. Линия 1 соответствует первой компоненте вектора состояний, линия 2 – второй компоненте.

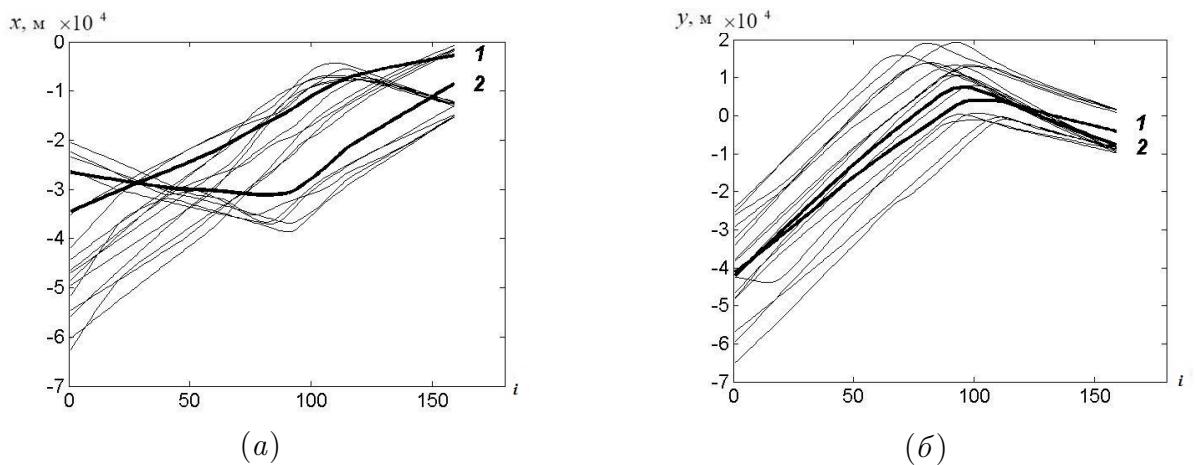


Рис. 16: Проекции траекторий выборки, выделенной розовым цветом на Рис. 11, *a* и Рис. 12, показаны совместно с компонентами вектора состояний ЛДС (линии 1 и 2):
a – проекции на ось x , *б* – на ось y

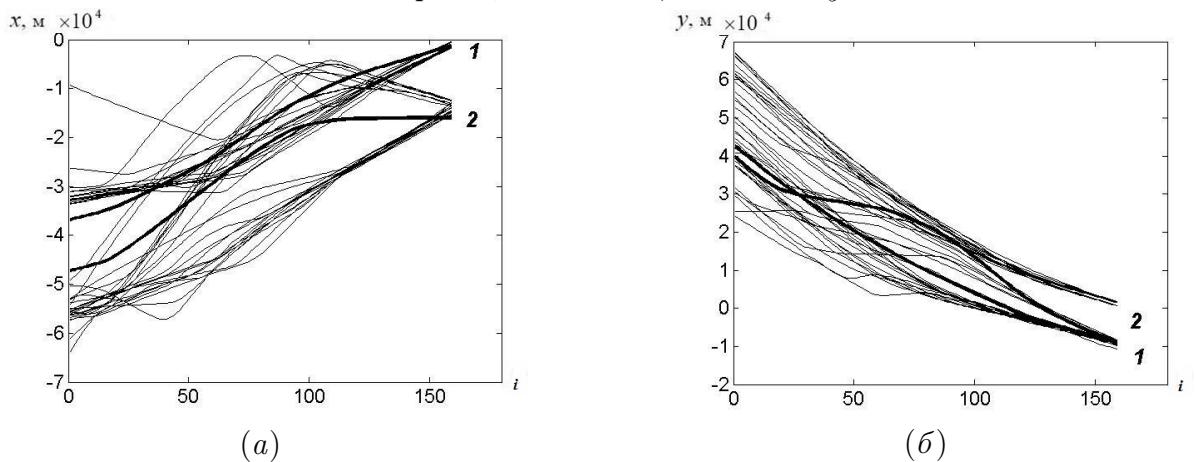


Рис. 17: Проекции траекторий выборки, выделенной красным цветом на Рис. 11, *a* и Рис. 12, показаны совместно с компонентами вектора состояний ЛДС (линии 1 и 2)
a – проекции на ось x , *б* – проекции на ось y

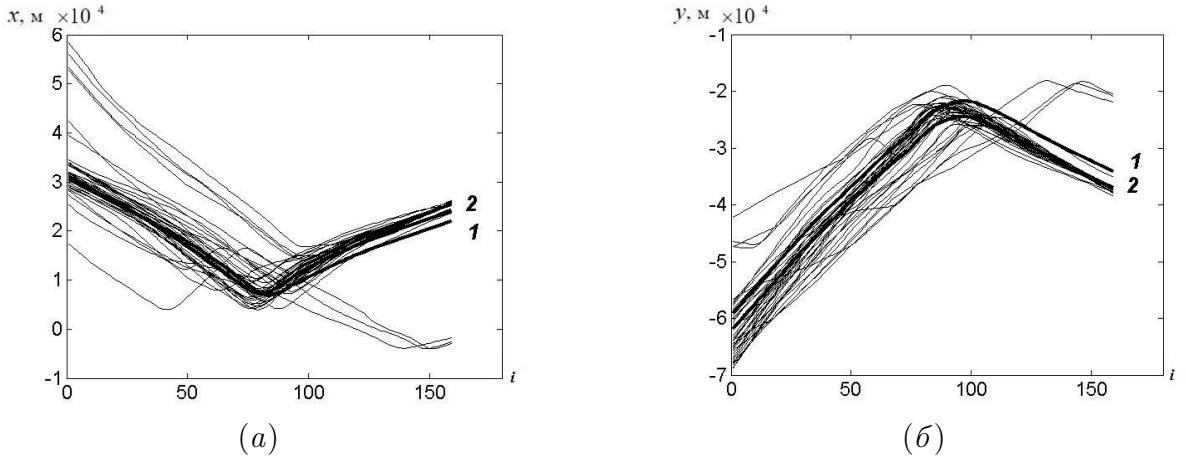


Рис. 18: Проекции траекторий выборки, выделенной чёрным цветом на Рис. 11, *a* и Рис. 12, показаны совместно с компонентами вектора состояний ЛДС (линии 1 и 2):
a – проекции на ось x , *б* – проекции на ось y

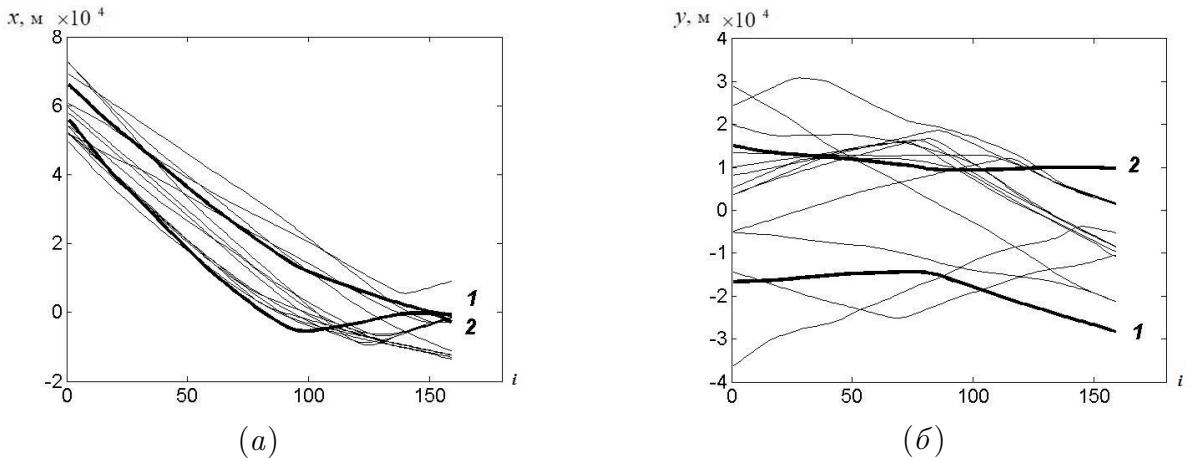


Рис. 19: Проекции траекторий выборки, выделенной зелёным цветом на Рис. 11, *a* и Рис. 12, показаны совместно с компонентами вектора состояний ЛДС (линии 1 и 2):
a – проекции на ось x , *б* – проекции на ось y

На Рис. 16–19 видно, что модели линейных динамических систем выявляют тонкую структуру в анализируемых выборках, однако определяют пучки траекторий не во всех случаях. Из Рис. 16 видно, что линия 1 определяет пучок траекторий, однако линия 2 – нет. Аналогичная ситуация наблюдается и в остальных выборках. А в случае выборки, представленной на Рис. 19, ни одна из компонент вектора состояний не определяет пучок траекторий.

2.2.2 Модели нелинейных динамических систем (НЛДС)

Метод моделей нелинейных динамических систем [150] является более общим по сравнению с методом моделей линейных динамических систем [81].

Определение тонкой структуры рассматриваемой выборки траекторий требует определения компонент, являющихся «скелетными» кривыми для подвыборок. Определение компонент скрытого состояния заданной размерности и вывод относительно линейности/нелинейности многомерных временных рядов могут быть сделаны в результате анализа этих временных рядов с помощью адаптивного нелинейного фильтра Калмана [127, 128]. Как и Главе 3.1 наблюдаемые многомерные данные представлены матрицей $\mathbf{X} = \mathbf{X}[\overline{1, D}; \overline{1, L}]$ со столбцами $\mathbf{x}[i] = \mathbf{X}[\overline{1, D}; i]$. Многомерный временной ряд вектора состояний \mathbf{S} состоит из столбцов $\mathbf{s}[i] = \mathbf{S}[\overline{1, q}; i]$.

Адаптивный нелинейный фильтр Калмана

Для обучения нелинейного фильтра Калмана используется ЕМ-алгоритм [129, 150]. Нелинейная динамическая система в дискретном времени описывает эволюцию состояния $\mathbf{s}[i + 1] \leftarrow \mathbf{s}[i]$ на одном временном шаге и текущую связь состояния и входа $\mathbf{s}[i]$, $\mathbf{u}[i]$ с наблюдениями $\mathbf{x}[i]$, $i = \overline{1, L}$:

$$\begin{cases} \mathbf{s}[i + 1] = \mathbf{f}(\mathbf{s}[i], \mathbf{u}[i]) + \mathbf{v}[i], \\ \mathbf{x}[i] = \mathbf{g}(\mathbf{s}[i], \mathbf{u}[i]) + \mathbf{w}[i] \end{cases} \quad (2.2.27)$$

где $\mathbf{v}[i]$, $i = \overline{1, L}$ и $\mathbf{w}[i]$, $i = \overline{1, L}$ – гауссовые шумы с нулевым средним [127, 128].

Динамические системы непрерывного времени (в которых производные специфицируются как функции текущего состояния и входа) могут быть преобразованы в системы дискретного времени (2.2.27) посредством дискретизации (sampling) их состояния и входа [151]. В частности, для линейной системы непрерывного времени

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{s}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t)$$

при дискретизации с интервалом времени τ

$$\mathbf{s}_{i+1} = \mathbf{A} \mathbf{s}_i + \mathbf{B} \mathbf{u}_i$$

динамическая матрица и матрица влияния имеют вид

$$\mathbf{A} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}_c^i \tau^i}{i!} = \exp(\mathbf{A}_c \tau)$$

и

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_c^{-1} (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \mathbf{B}_c.$$

Вектор состояния $\mathbf{s}[i]$ эволюционирует в соответствии с нелинейной, но стационарной, марковской динамикой, производимой входом $\mathbf{u}[i]$, $i = \overline{1, L}$ в присутствии шума $\mathbf{v}[i]$, $i = \overline{1, L}$. Наблюдения $\mathbf{x}[i]$, $i = \overline{1, L}$, нелинейные с шумом, но стационарные, и являются функцией текущего состояния $\mathbf{s}[i]$ и текущего входа $\mathbf{u}[i]$. Нелинейные вектор-функции считаются дифференцируемыми. Ниже на Е-шаге ЕМ-алгоритма для оценки приблизительного распределения скрытых состояний нелинейной системы (2.2.27) используется расширенный сглаживатель Рауха, а на М-шаге для нелинейной регрессии вектор-функций $\mathbf{f}(\dots)$ и $\mathbf{g}(\dots)$ – разложение по радиальным базисным функциям (*radial basis function* – RBF) [129, 150].

Два условные распределения вероятности

$$\begin{aligned} P(\mathbf{s}[i] | \mathbf{u}[1], \dots, \mathbf{u}[L], \mathbf{x}[1], \dots, \mathbf{x}[L]), i = \overline{1, L}, \\ P(\mathbf{s}[i], \mathbf{s}[i+1] | \mathbf{u}[1], \dots, \mathbf{u}[L], \mathbf{x}[1], \dots, \mathbf{x}[L]), i = \overline{1, L-1}, \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

используются на Е-шаге для определения последовательности скрытых состояний нелинейной системы (2.2.27) на основе последовательности наблюдений $\{\mathbf{x}[i], i = \overline{1, L}\}$ и входов $\{\mathbf{u}[i], i = \overline{1, L}\}$. Условные распределения (2.2.28) являются не гауссовыми, поэтому уравнения вывода не могут быть представлены в замкнутой форме. Более того, объём вычислений растёт экспоненциально с увеличением длины временных рядов.

Расширенный сглаживатель Рауха аппроксимирует стационарную нелинейную динамическую систему (2.2.27) нестационарной линейной системой [151]. Он применяет стандартный сглаживатель Рауха к локально линеаризованной нелинейной системе. В каждой точке $\bar{\mathbf{s}}$ в пространстве состояний \mathbf{s} , производные

вектор-функций $\mathbf{f}(\dots)$ и $\mathbf{g}(\dots)$ определяют матрицы

$$\mathbf{F}_{\bar{\mathbf{s}}} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}} \right|_{\mathbf{s}=\bar{\mathbf{s}}} \quad \text{и} \quad \mathbf{G}_{\bar{\mathbf{s}}} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{s}} \right|_{\mathbf{s}=\bar{\mathbf{s}}},$$

соответственно. Уравнения (2.2.27) линеаризуются в окрестности $\bar{\mathbf{s}}[i]$ средней текущей отфильтрованной (а не сглаженной) оценки состояния $\mathbf{s}[i]$ (в момент времени i)

$$\begin{cases} \mathbf{s}[i+1] \approx \mathbf{f}(\bar{\mathbf{s}}[i], \mathbf{u}[i]) + \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{s}}[i]} (\mathbf{s}[i] - \bar{\mathbf{s}}[i]) + \mathbf{v}[i], \\ \mathbf{x}[i] \approx \mathbf{g}(\bar{\mathbf{s}}[i], \mathbf{u}[i]) + \mathbf{G}_{\bar{\mathbf{s}}} (\mathbf{s}[i] - \bar{\mathbf{s}}[i] + \mathbf{w}[i]). \end{cases} \quad (2.2.29)$$

Поскольку распределение шума и априорные распределения состояния при $i = 1$ – гауссовые, то в линеаризованной системе (2.2.29) условное распределение вероятности состояния в произвольный момент времени при заданной последовательности входов и выходов также гауссово. Таким образом сглаживатель Рауха может использоваться на линеаризованной системе (2.2.29) для вывода этого условного распределения. В противоположность линейному сглаживателю Рауха, в линеаризованном сглаживателе Рауха ошибка ковариации для оценки состояния и матрицы усиления Калмана зависит не только от наблюдений с текущим временным индексом.

Проблема, возникающая на M-шаге ЕМ-алгоритма состоит в том, что обучение вектор-функций $\mathbf{f}(\dots)$ и $\mathbf{g}(\dots)$ происходит с использованием неопределённых оценок состояния посредством сглаживателя Рауха [129, 150]. Это затрудняет применение стандартных методов регрессии. Рассмотрим оценку $\mathbf{f}(\dots)$ с параметрами $\mathbf{s}[i]$ и $\mathbf{u}[i]$ и результатом $\mathbf{s}[i+1]$. Для каждого i условное распределение, оцениваемое сглаживателем Рауха, является гауссовым с полной ковариацией в пространстве $\{\mathbf{s}[i], \mathbf{s}[i+1]\}$. Ниже разложения нелинейных функций $\mathbf{f}(\dots)$ и $\mathbf{g}(\dots)$ по набору гауссовых радиальных базисных функций (*radial basis function - RBF*) адаптируются к этим гауссовым выборкам данных.

Рассмотрим представляющее функцию $\mathbf{f}(\cdot)$ нелинейное отображение векторов состояния \mathbf{s} и входа \mathbf{u} на вектор состояния \mathbf{z} :

$$\mathbf{z} = \sum_{m=1}^M \mathbf{h}[m] \mathbf{r}_m(\mathbf{s}) + \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{b} + \mathbf{w} \quad (2.2.30)$$

где \mathbf{w} – гауссов шум с нулевым средним и ковариацией \mathbf{R} . Параметрами отображения (2.2.30) являются коэффициенты $\mathbf{h}[m]$, $m = \overline{1, M}$, при скалярных радиальных базисных функциях (*RBF*) $\mathbf{r}_m(\mathbf{s})$, $m = \overline{1, M}$, матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} и вектор смещения \mathbf{b} . Гауссовые радиальные базисные функции в пространстве векторов \mathbf{s} с центром $\mathbf{c}[m]$ и ковариационной матрицей $\mathbf{S}[m]$ имеют вид

$$\mathbf{r}_m(\mathbf{s}) = |2\pi\mathbf{S}[m]|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{s} - \mathbf{c}[m])^T \mathbf{S}[m]^{-1} (\mathbf{s} - \mathbf{c}[m])\right) \quad (2.2.31)$$

где $|\mathbf{S}[m]|$ – детерминант матрицы $\mathbf{S}[m]$. Отображение (2.2.30) используется несколькими способами для представления систем (2.2.29), в зависимости от того, какое из отображений $\mathbf{f}(\cdot)$ или $\mathbf{g}(\cdot)$ считается нелинейным. Приведём три примера: 1) для $\mathbf{f}(\cdot)$ используются подстановки $\mathbf{s} \leftarrow \mathbf{s}[i]$, $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u}[i]$ и $\mathbf{z} \leftarrow \mathbf{s}[i+1]$; для $\mathbf{f}(\cdot)$ используются подстановки $\mathbf{s} \leftarrow (\mathbf{s}[i], \mathbf{u}[i])$, $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{0}$ и $\mathbf{z} \leftarrow \mathbf{s}[i+1]$; 3) для $\mathbf{g}(\cdot)$ используются подстановки $\mathbf{s} \leftarrow \mathbf{s}[i]$, $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u}[i]$ и $\mathbf{z} \leftarrow \mathbf{x}[i]$. Поскольку набор данных для переменных \mathbf{s} , \mathbf{z} , \mathbf{u} является выборкой из распределения в виде смеси гауссовых распределений, это распределение аналитически определяется посредством интегрирования, чтобы обеспечить соответствие RBF-модели (2.2.30). Распределение данных имеет вид

$$P(\mathbf{s}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) = \frac{1}{J} \sum_j \mathcal{P}_j(\mathbf{s}, \mathbf{z}) \delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}[j]), \quad (2.2.32)$$

где $\mathcal{P}_j(\mathbf{s}, \mathbf{z}) \equiv \mathcal{N}(\mathbf{s}, \mathbf{z} | \boldsymbol{\mu}[j], \mathbf{C}[j])$ – гауссово распределение со средним $\boldsymbol{\mu}[j] = \{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{s}}[j], \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{z}}[j]\}$ и ковариационной матрицей

$$\mathbf{C}[j] = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ss}[j] & \mathbf{C}_{sz}[j] \\ \mathbf{C}_{zs}[j] & \mathbf{C}_{zz}[j] \end{bmatrix}.$$

Определим вектор

$$\bar{\mathbf{z}}_{\Theta}(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \sum_{m=1}^M \mathbf{h}[m] \mathbf{r}_m(\mathbf{s}) + \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{b} = \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\Phi},$$

где $\boldsymbol{\Theta} = [\mathbf{h}[1], \dots, \mathbf{h}[M], \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{b}]$ – вектор параметров и $\boldsymbol{\Phi} = [\mathbf{r}_1(\mathbf{s}), \dots, \mathbf{r}_M(\mathbf{s}), \dots, \mathbf{s}^T]$, – вектор переменных отображений (2.2.30). Поскольку в (2.2.30) шум \mathbf{w} – гауссов с нулевым средним и ковариационной матрицей \mathbf{R} , то, в рамках RBF-модели, логарифм правдоподобия одного вектора \mathbf{z} имеет вид

$$-\frac{1}{2} (\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}_{\Theta}(\mathbf{s}))^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}_{\Theta}(\mathbf{s})) - \frac{1}{2} \log |\mathbf{R}| + c, \quad (2.2.33)$$

где c – константа. Поскольку набор $\{\mathbf{s}, \mathbf{z}\}$ – это гауссова выборка данных, максимум ожидаемого логарифма правдоподобия RBF-модели (2.2.30) ищется минимизацией проинтегрированной квадратичной формы (2.2.33) (со знаком минус)

$$\min_{\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{R}} \left\{ \iint_{\mathbf{s} \in \mathbf{z}} \mathcal{P}_j(\mathbf{s}, \mathbf{z}) (\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}_{\Theta}(\mathbf{s}))^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}_{\Theta}(\mathbf{s})) d\mathbf{s} d\mathbf{z} + J \log |\mathbf{R}| \right\} \quad (2.2.34)$$

Пусть угловые скобки $\langle \bullet \rangle_j$ обозначают ожидание по гауссову распределению \mathcal{P}_j (2.2.32). С учётом обозначений для вектора параметров $\boldsymbol{\Theta}$ отображения (2.2.30) и вектора переменных $\boldsymbol{\Phi}$, и матричного тождества

$$(\mathbf{z} - \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\Phi})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\Phi}) = \text{tr} (\mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\Phi}) (\mathbf{z} - \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\Phi})^T),$$

где $\text{tr}(..)$ обозначает след матрицы, формула (2.2.34) принимает следующий вид:

$$\min_{\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{R}} \left\{ \text{tr} \left(\mathbf{R}^{-1} \sum_j \langle (\mathbf{z} - \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\Phi})(\mathbf{z} - \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\Phi})^T \rangle_j \right) + J \log |\mathbf{R}| \right\}. \quad (2.2.35)$$

Вычисляя в формуле (2.2.35) частную производную по $\boldsymbol{\Theta}^T$ и приравнивая её к нулю, получаем уравнение

$$\sum_j \langle (\mathbf{z} - \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\Phi}) \boldsymbol{\Phi}^T \rangle_j = 0,$$

которое даёт оценку

$$\boldsymbol{\Theta} = \left(\sum_j \langle \mathbf{z} \boldsymbol{\Phi}^T \rangle_j \right) \left(\sum_j \langle \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Phi}^T \rangle_j \right)^{-1}. \quad (2.2.36)$$

Аналогично, выражение для оценки ковариационной матрицы \mathbf{R} имеет вид

$$\mathbf{R} = \frac{1}{J} \left(\sum_j \langle \mathbf{z} \mathbf{z}^T \rangle_j - \boldsymbol{\Theta} \sum_j \langle \boldsymbol{\Phi} \mathbf{z}^T \rangle_j \right). \quad (2.2.37)$$

Ожидания, необходимые для оценки $\boldsymbol{\Theta}$ и \mathbf{R} по формулам (2.2.36, 2.2.37) следующие: $\langle \mathbf{s} \rangle_j, \langle \mathbf{z} \rangle_j, \langle \mathbf{s} \mathbf{s}^T \rangle_j, \langle \mathbf{z} \mathbf{z}^T \rangle_j, \langle \mathbf{s} \mathbf{z}^T \rangle_j, \langle \mathbf{r}_m(\mathbf{s}) \rangle_j, \langle \mathbf{s} \mathbf{r}_m(\mathbf{s}) \rangle_j, \langle \mathbf{z} \mathbf{r}_m(\mathbf{s}) \rangle_j$ и $\langle \mathbf{r}_n(\mathbf{s}) \mathbf{r}_m(\mathbf{s}) \rangle_j$, полные их выражения приведены в работах [129, 150]. Эти ожидания выражаются через параметры гауссовых распределений $\mathcal{P}_j(\mathbf{s}, \mathbf{z}) \equiv \mathcal{N}(\mathbf{s}, \mathbf{z} | \boldsymbol{\mu}[j], \mathbf{C}[j])$ (2.2.32).

Практический успех ЕМ-алгоритма зависит от его инициализации. Для нелинейных систем с линейной функцией выхода инициализация использует факторный анализ по максимуму правдоподобия, обучаемый на наборе наблюдений $\mathbf{x}[i], i = \overline{1, L}$. Факторный анализ предполагает, что выходные переменные генерируются небольшим числом независимых гауссовых скрытых состояний, и к каждой выходной переменной добавляется независимый гауссов шум [149, 152, 153]. Матрица весов (называемая матрицей нагрузок) обучается посредством факторного анализа для инициализации матрицы наблюдений \mathbf{G} динамической системы (2.2.29). Это даёт оценки состояния в каждый момент времени. Эти оценки используются в нелинейной регрессии на основе RBF-функций. Перед инициализацией нелинейной регрессии проводится обучение линейной системы. Эксперименты на многих временных рядах показывают возможности нелинейной байесовской фильтрации при использовании нелинейных динамических моделей.

Определение пучков траекторий с помощью моделей НЛДС

Результаты, полученные с помощью применения метода нелинейных динамических систем (НЛДС) к анализируемой выборке, представлены на Рис. 20, а. Компоненты вектора состояний выделены жирными линиями красного (линия 1) и синего (линия 2) цветов.

Как видно из рисунка Рис. 20, а, линия 1 определяет пучок траекторий, чего нельзя сказать о линии 2. Присвоение траекторий к каждой из полученных подвыборок выполняется в соответствии с наименьшим значением меры косинуса между компонентами скрытого состояния $[s_j[i], i = \overline{1, L}], j = \overline{1, q}$, и проекциями

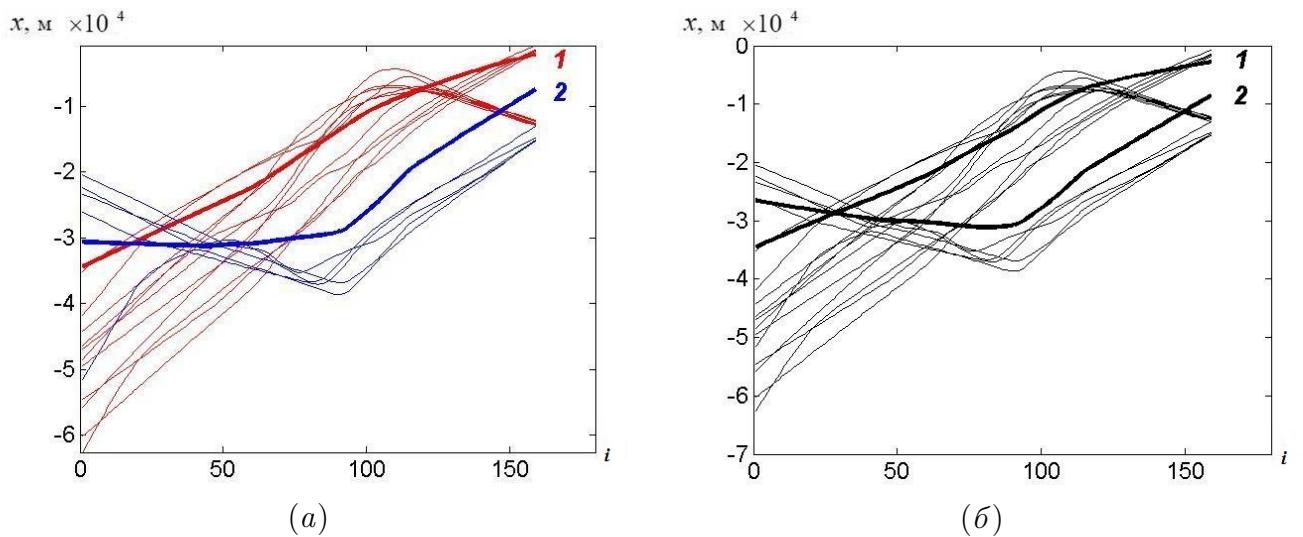


Рис. 20: Проекции траекторий выборки, выделенной розовым цветом на Рис. 13, на ось x : компоненты вектора состояний (1 и 2), выделенные a – с помощью метода НЛДС, b – с помощью ЛДС

векторов-наблюдений (траекторий) $[x_d[i], i = \overline{1, L}]$, $d = \overline{1, D}$ на координатные оси пространства измерений.

$$\cos \angle (\mathbf{s}_j, \mathbf{x}_d) = \left(\sum_{i=1}^L (s_j[i])(x_d[i]) \right) \Bigg/ \sqrt{\sum_{i=1}^L (s_j[i])^2} \sqrt{\sum_{i=1}^L (x_d[i])^2},$$

которая учитывает отличие в направлении векторов в пространстве (безотносительно евклидова расстояния между ними). Т.е. неевклидова мера близости (например, мера косинуса) может успешно применяться для разделения проекций траекторий анализируемой выборки на подвыборки, соответствующие выделенным компонентам скрытого состояния системы.

Для сравнения на Рис. 20, б приведены результаты, полученные с помощью моделей линейных динамических систем (ЛДС) для траекторий той же, что и на Рис. 20, а, выборки. Как видно из Рис. 20, оба метода (НЛДС и ЛДС) дают идентичный результат, но не позволяют однозначно определить пучки многомерных траекторий при решении задачи секторизации пространства в плоском случае.

2.2.3 Марковская модель непрерывного скрытого профиля (СРМ)

Модель непрерывного скрытого профиля (*Continuous Profile Model* – CPM) [83, 154], описываемая в настоящей Главе, позволяет моделировать центроиды пучков

многомерных траекторий. Модели непрерывного профиля являются скрытыми Марковскими моделями с внутренними состояниями времени и масштаба.

Определение центральной траектории в пучке позволяет, используя оценку близости по мере косинуса, обнаружить выбросы – траектории, наиболее удалённые от центральных. Выявление центральных траекторий пучка посадочных траекторий самолётов позволяет определить, так называемые, «безопасные коридоры», что способствует снижению рисков, возникающих при посадке в условиях сложного географического ландшафта (например, в горах, прибрежных районах или при плохой видимости).

Модель непрерывного профиля

Модель непрерывного (скрытого) профиля (СРМ-модель) основана на скрытой Марковской модели (*Hidden Markov Model* – НММ) [155, 156]. В случае СРМ-модели предполагается, что каждый наблюдаемый временной ряд является зашумлённой масштабированной выборкой из некоторого непрерывного скрытого профиля, или скрытой записи (*latent trace*). Наблюдаемые временные ряды генерируются при прохождении последовательности скрытых Марковских состояний. СРМ-модель обучается с помощью алгоритма ожидания-максимизации правдоподобия (*Expectation-Maximization algorithm* – EM), который в контексте скрытых Марковских моделей называется алгоритмом Баума-Уолша (*Baum-Welch algorithm*) [155, 156]. В результате последовательных итераций обучения СРМ-модели определяется наиболее вероятная скрытая запись.

В СРМ-модели элементы каждого наблюдаемого временного ряда являются результатом эмиссии, т.е. генерируются непрерывным профилем, или скрытой записью при прохождении через последовательность скрытых состояний с конкретными индексами, как это имеет место в скрытой Марковской модели [155, 156]. Для учета изменения амплитуды в пределах конкретного временного ряда и между наблюдаемыми временными рядами, к состояниям скрытого времени добавляются состояния скрытого масштаба относительно соответствующих элементов скрытой записи.

Скрытая Марковская модель

Пусть $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}[n] = \{x[n; i], i = \overline{1, L}\}$, $n = \overline{1, N}$ наблюдаемые временные ряды длиной L . Пусть набор возможных состояний НММ-модели $\mathbf{S} = \{s[j], j = \overline{1, M}\}$ (M – число скрытых состояний НММ-модели). Для наблюдаемого временного ряда $\mathbf{x}[n] = \{x[n; i], i = \overline{1, L}\}$ последовательность скрытых состояний времени $\varphi[n] = \{\varphi[n; i] \in \mathbf{S}, i = \overline{1, L}\}$. В Марковской модели вероятности переходов между состояниями $s[m]$ и $s[j]$ $\tau_{s[m], s[j]} \equiv p(\varphi[n; i] = s[j] | \varphi[n; i-1] = s[m])$ не зависят от номера n временного ряда. При условии, что в скрытой последовательности $\varphi[n]$ в момент времени i имеется состояние $s[j]$, вероятность эмиссии $x[n; i]$ равна $\mathcal{A}_{i, s[j]}^n \equiv p(x[n; i] | \varphi[n; i] = s[j])$. В логарифме правдоподобия \mathcal{L} наблюдаемых временных рядов учитывается, что поскольку состояния $\varphi[n; i]$ скрытые, вероятности переходов между состояниями $\tau_{s[m], s[j]}$ и вероятности эмиссии $\mathcal{A}_{i, s[j]}^n$ следует суммировать по всем их возможным значениям

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \log \left(\prod_{n=1}^N p \left(\mathbf{x}[n] | \{\tau_{s[m], s[j]}\}, \{\mathcal{A}_{i, s[j]}^n\} \right) \right) = \\ &= \sum_{n=1}^N \log \left(\sum_{\varphi[n]} \tau_{0, \varphi[n; i]} \left(\prod_{i=1}^L \mathcal{A}_{i, \varphi[n; i]}^n \right) \left(\prod_{i=2}^L \tau_{\varphi[n; i], \varphi[n; i-1]} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.2.38)$$

В (2.2.38) правдоподобие для каждого наблюдаемого временного ряда факторизуется на три множителя, поскольку условные вероятности состояний в НММ-модели зависят только от предыдущих состояний на одном временном шаге [155, 156]. Первый член под логарифмом в (2.2.38) это вероятность начала ряда в конкретном скрытом состоянии, второй вероятность эмиссии в каждом состоянии и третий вероятность переходов между состояниями.

Поскольку рассматривается модель со скрытыми переменными, для оценки параметров $\{\tau_{s[m], s[j]}\}$, $\{\mathcal{A}_{i, s[j]}^n\}$ в (2.2.38) используется ЕМ-алгоритм. Для этого необходимо вычислить предельные апостериорные вероятности каждого состояния $p(\varphi[n; i] | \mathbf{x}[n])$ и определить вероятности переходов. Кроме этого, необходимо вы-

числить парные предельные апостериорные вероятности $p(\varphi[n; i], \varphi[n; i+1] | \mathbf{x}[n])$. Их вычисление в НММ-модели основано на алгоритме динамического программирования, в контексте этой модели называемого алгоритмом прямой и обратной рекурсии.

Алгоритм прямой и обратной рекурсии

Для N наблюдаемых временных рядов длиной L и числе скрытых состояний M , алгоритм прямой и обратной рекурсии (*Forward-Backward algorithm*) выполняет вычисления с оценкой временной сложности $O(NML)$ (если матрица переходов разреженная, времененная оценка сложности будет меньше). Введем обозначение совместной вероятности $\alpha[n; i; j] \equiv p(x[n; 1], x[n; 2], \dots, x[n; i], \varphi[n; i] = s[j])$. Для всех n и j , после инициализации

$$\alpha[n; 1; j] \equiv \mathcal{A}_{1,s[j]}^n \tau_{0,s[j]}$$

выполняется прямая рекурсия для $i = \overline{1, L}$

$$\alpha[n; i; j] \equiv \mathcal{A}_{i,s[j]}^n \sum_{m=1}^M \alpha[n; i-1; m] \tau_{s[m], s[j]}. \quad (2.2.39)$$

Если рекурсия (2.2.39) завершена, то можно вычислить

$$p(\mathbf{x}[n]) = \sum_{j=1}^M p(x[n; 1], x[n; 2], \dots, x[n; L], \varphi[n; L] = s[j]) = \sum_{j=1}^M \alpha[n; L; j], \quad (2.2.40)$$

С учетом 2.2.40, логарифм правдоподобия \mathcal{L} (2.2.38) определяется как

$$\mathcal{L} = \sum_{n=1}^N \log(p(\mathbf{x}[n])) = \sum_{n=1}^N \log \left(\sum_{j=1}^M \alpha[n; L; j] \right). \quad (2.2.41)$$

Для вычисления предельных апостериорных вероятностей используется формула Байеса для условной вероятности

$$\begin{aligned} p(\varphi[n; i] = s[j] | \mathbf{x}[n]) &= \frac{p(\mathbf{x}[n] | \varphi[n; i] = s[j]) p(\varphi[n; i] = s[j])}{p(\mathbf{x}[n])} = \\ &\equiv \frac{\alpha[n; i; j] p(x[n; i+1], \dots, x[n] | \varphi[n; i] = s[j])}{p(\mathbf{x}[n])} \end{aligned} \quad (2.2.42)$$

и

$$p(\varphi[n; i-1] = s[j], \varphi[n, i] = s[m] | \mathbf{x}[n]) = \\ \equiv \frac{\alpha[n; i-1; j] p(x[n; i], \dots, x[n, L] | \varphi[n; i] = s[m]) \tau_{s[j], s[m]}}{p(\mathbf{x}[n])}. \quad (2.2.43)$$

Вычисление совместных вероятностей $\beta[n; i; j] \equiv p(x[n; i+1], x[n; i+2], \dots, x[n; L], \varphi[n; i] = s[j])$ позволяет вычислить вероятности (2.2.42, 2.2.43). Для всех i и j , выполняется инициализация

$$\beta[n; 1; j] = 1$$

и обратная рекурсия для $i = \overline{L-1, 1}$

$$\beta[n; i; j] \equiv \sum_{m=1}^M \tau_{s[j], s[m]} \mathcal{A}_{i+1, s[m]}^n \beta[n; i+1; m] \quad (2.2.44)$$

Если $\alpha[n; i; j]$ и $\beta[n; i; j]$ определены в результате прямой (2.2.39) и обратной (2.2.44) рекурсии, то предельные апостериорные вероятности (2.2.42) и (2.2.43) вычисляются по формулам

$$p(\mathbf{x}[n]) = \sum_{j=1}^M \alpha[n; L; j] \equiv \sum_{j=1}^M \alpha[n; i; j] \beta[n; i; j], \quad (2.2.45)$$

$$p(\varphi[n; i] = s[j] | \mathbf{x}[n]) = \frac{\alpha[n; i; j] \beta[n; i; j]}{p(\mathbf{x}[n])}, \quad (2.2.46)$$

$$p(\varphi[n; i-1] = s[j], \varphi[n, i] = s[m] | \mathbf{x}[n]) = \frac{\alpha[n; i-1; j] \tau_{s[j], s[m]} \mathcal{A}_{i, s[m]}^n \beta[n; i; m]}{p(\mathbf{x}[n])}. \quad (2.2.47)$$

Эффективное вычисление правдоподобия и предельных апостериорных вероятностей (2.2.46, 2.2.47) необходимо для оценки параметров в (2.2.38) посредством ЕМ-алгоритма. Апостериорная вероятность $p(\varphi[n] | \mathbf{x}[n])$ оценивает, что именно эта последовательность скрытых состояний генерирует наблюдаемый временной ряд. Для оценки наиболее вероятной последовательности скрытых состояний на основе наблюдаемого временного ряда используется алгоритм Витерби [155, 156].

Модель непрерывного профиля

При обучении СРМ-модели определяются непрерывный профиль, т.е. скрытая запись; вероятности переходов, управляющие Марковской эволюцией состояний времени и масштаба; суммарный уровень шума наблюдаемого временного ряда и его глобальный фактор масштаба. После обучения скрытая запись

$$\mathbf{z} = \{\mathbf{z}[i], i = \overline{1, M}\} \quad (2.2.48)$$

имеет более высокое разрешение по сравнению с ее зашумленными масштабированными копиями – наблюдаемыми временными рядами

$$\mathbf{x}[n] = \{x[n; i], i = \overline{1, L}\}, n = \overline{1, N}.$$

В идеале $M \gg L$, тогда каждый элемент наблюдаемого временного ряда $\mathbf{x}[n], n = \overline{1, N}$ в точности отображается в элемент скрытой записи \mathbf{z} (2.2.48). Поскольку разрешение скрытой записи \mathbf{z} (2.2.48) выше, чем у наблюдаемого временного ряда $\mathbf{x}[n], n = \overline{1, N}$, его наблюдаемое время может эффективно ускоряться или замедляться при продвижении вдоль скрытой записи.

Неоднородность выборки элементов скрытой записи (2.2.48) и применение локального масштаба, используемые при генерации элементов наблюдаемого временного ряда, определяются соответствующей ему последовательностью скрытых состояний СРМ-модели. Каждое скрытое состояние представляет собой пару состояния масштаба/состояние времени

$$\phi[n; i] = \{\tau[n; i], \chi[i]\}, i = \overline{1, L} \quad (2.2.49)$$

Состояния времени $\tau[n; i], i = \overline{1, L}$ принадлежат последовательности натуральных чисел $\overline{1, M}$, представляющих скрытое время, которое индексирует скрытую запись (2.2.48). Состояния масштаба $\chi[i], i = \overline{1, L}$ принадлежат упорядоченному набору $\overline{1, R}$. Распределение вероятности эмиссии элементов наблюдаемого временного ряда $\mathbf{x}[n] = x[n; i], i = \overline{1, L}$, производимых последовательностью скрытых состояний $\phi[n; i], i = \overline{1, L}$ на основе скрытой записи $\mathbf{z} = \mathbf{z}[i], i = \overline{1, M}$, имеет вид

$$p(x[n; i] | \mathbf{z}, \phi[n; i], u[n], \sigma[n]) \equiv \mathcal{N}(x[n; i] | u[n], \mathbf{z}[\tau[n; i]] \chi[i], (\sigma[n])^2), \quad (2.2.50)$$

где $\mathcal{N}(x | \mathbf{z}, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mathbf{z})^2}{2\sigma^2}\right)$ – Гауссово нормальное распределение; $(\sigma[n])^2$ – вариация шума в наблюдаемом временном ряду; $u[n]$ – глобальный параметр масштаба, уникальный для наблюдаемого временного ряда, который корректирует (глобальную) разницу масштаба временного ряда $\mathbf{x}[n]$ и скрытой записи \mathbf{z} (2.2.48).

Для полного описания СРМ-модели, необходимо определить вероятности переходов между скрытыми состояниями. Поскольку вероятности переходов между состояниями времени и вероятности переходов между состояниями масштаба определяются отдельно, совместная вероятность переходов между скрытыми состояниями факторизуется следующим образом

$$\tau_{\phi[n; i], \phi[n; r]}^n \equiv p(\phi[n; i] | \phi[n; r]) = (\tau[n; i] | \tau[n; r]) p(\chi[i] | \chi[r]). \quad (2.2.51)$$

Логарифм правдоподобия набора наблюдаемых временных рядов

Логарифм правдоподобия \mathcal{L}^p наблюдаемых временных рядов $\mathbf{x}_n = \{x[n; i], i = \overline{1, L}\}, n = \overline{1, N}$ имеет вид $\mathcal{L}^p = \mathcal{L} + \mathcal{P}$, где \mathcal{P} – это член правдоподобия, происходящий из НММ-модели и состоящий из вероятностей эмиссии (2.2.50) и вероятностей переходов между скрытыми состояниями (2.2.51)

$$\mathcal{L} = \sum_{n=1}^N \log \left(\sum_{\phi[n]} p(\phi[n; 1]) \left(\prod_{i=1}^L \mathcal{N}(x[n; i] | u[n] \mathbf{z}[\tau[n; i]] \chi[i], (\sigma[n])^2) \right) \left(\prod_{i=2}^L \tau_{\phi[n; i], \phi[n; i]}^n \right) \right) \quad (2.2.52)$$

где $p(\phi[n; 1])$ – априорные вероятности начальных скрытых состояний, а \mathcal{P} – это логарифм априорной вероятности или штрафной член, обеспечивающий регуляризацию СРМ-модели [154, 155]. Максимум \mathcal{L}^p определяется с помощью ЕМ-алгоритма.

Оценка предельных апостериорных вероятностей (Е-шаг)

На Е-шаге (ЕМ-алгоритма) предельные апостериорные вероятности $p(\phi[n; i] = s | \mathbf{x})$ и $p(\phi[n; i - 1] = s, \phi[n; i] = s' | \mathbf{x}[n])$ СРМ-модели вычисляются посредством алгоритма прямой и обратной рекурсии, как в НММ-модели (см. Главу 2.2.3).

Ввиду разреженности матрицы переходов между скрытыми состояниями (2.2.50), вычислительная сложность этого алгоритма линейная по числу скрытых состояний (2.2.49) [154, 155].

Оценка параметров СРМ-модели (М-шаг)

Оценки параметров на М-шаге, которые максимизируют ожидаемый логарифм правдоподобия

$$\langle \mathcal{L}_{\text{comp}}^p \rangle \equiv \langle \mathcal{P} \rangle + \sum_{n=1}^N \langle \log(p(\phi[n], \mathbf{x}[n])) \rangle \quad (2.2.53)$$

представляются аналитическими формулами [154, 155]. Для оценки элементов скрытой записи (2.2.48) используется численная процедура [154, 155]. Производная $\langle \mathcal{L}_{\text{comp}}^p \rangle$ (2.2.53) по $\mathfrak{Z}[i]$ (элементу скрытой записи) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \mathcal{L}_{\text{comp}}^p \rangle}{\partial (\mathfrak{Z}[i'])} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial (\mathfrak{Z}[i'])} \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^L p(\phi[n; i] = s | \mathbf{x}[n]) \log \left(\mathcal{N}(x[n; i] | u[n] \mathfrak{Z}[\tau[s]] \chi[s], (\sigma[n])^2) \right) - \\ &\quad - \lambda \bar{u} \frac{\partial}{\partial (\mathfrak{Z}[i'])} \sum_{i=1}^{M-1} (\mathfrak{Z}[i+1] - \mathfrak{Z}[i])^2 = \\ &- \sum_{\{s | \tau[s] = i'\}} \sum_{i=1}^L p(\phi[n; i] = s | \mathbf{x}[n]) u[n] \chi[s] \frac{(x[n; i] - u[n] \mathfrak{Z}[\tau[s]] \chi[s])}{2(\sigma[n])^2} - \\ &\quad - \lambda \bar{u} \cdot (4\mathfrak{Z}[i'] - 2\mathfrak{Z}[i'-1] - 2\mathfrak{Z}[i'+1]), \quad (2.2.54) \end{aligned}$$

где λ – коэффициент при штрафном члене, обеспечивающем гладкость скрытой записи (2.2.48). Таким образом, при $\lambda \neq 0$ условие $\frac{\partial \langle \mathcal{L}_{\text{comp}}^p \rangle}{\partial (\mathfrak{Z}[i'])} = 0, i = \overline{1, M}$ приводит к три диагональной системе уравнений (2.2.54).

Определение центроидов и выбросов с помощью СРМ-модели

В настоящей главе в подвыборках, полученных в результате применения моделей нелинейных динамических систем (Рис. 20, *a*), с помощью СРМ-моделей выделяются скрытые записи \mathfrak{Z} (2.2.48), которые могут определять центроиды выделенных пучков траекторий, после определения которых возможно выделить траектории, наиболее удалённые от центроиды по выбранной мере близости

(выбросы).

На Рис. 21 показаны результаты применения СРМ-модели к подвыборкам, представленным на Рис. 20, *a*. Подвыборка, выделенная красным цветом (см. Рис. 21, *a*), содержит 11 траекторий, другая – выделенная синим цветом (см. Рис. 21, *b*) – 5 траекторий. В каждой из подвыборок с помощью СРМ-модели определяется (согласующаяся с большинством [157]) обобщённая форма проекций траекторий (обозначена пунктиром).

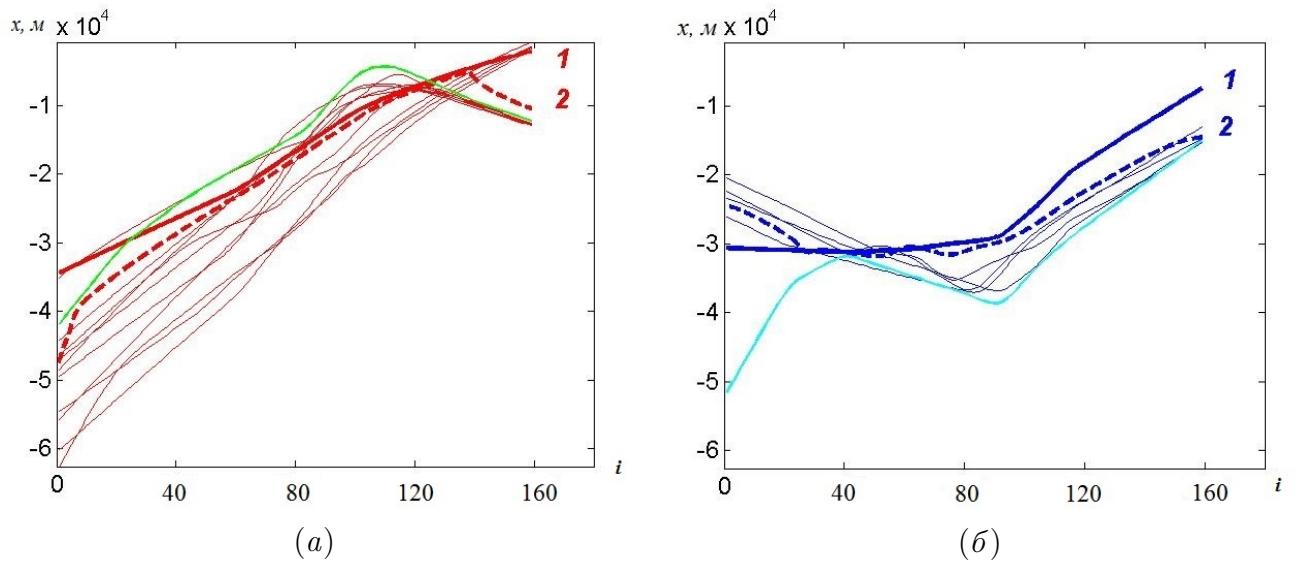


Рис. 21: Проекция на ось x траекторий выборки, представленной на Рис. 20, *a*
1 – компонента вектора состояний, 2 – скрытая запись СРМ-модели

Линия 1 на Рис. 21 (а, б) соответствует компонентам вектора состояний НЛДС, согласно которым происходит разделение на подвыборки (см. Рис. 20, *a*). Пунктирная линия 2 показывает определяемые в подвыборках скрытые профили (скрытые записи соответствующих СРМ-моделей непрерывных профилей).

Полученная скрытая запись достаточно хорошо отражает форму проекций траекторий в подвыборках скрытая запись 2 отражает ход проекций семи траекторий из одиннадцати (см. Рис. 21, *a*) и ход проекций четырёх траекторий из пяти (см. Рис. 21, *b*). Траектории подвыборок, наиболее удалённые от соответствующих скрытых записей по мере косинуса, показаны зелёным цветом на Рис. 21, *a* и голубым цветом на Рис. 21, *b*. Такие траектории считаются выбросами и могут соответствовать движению в зоне риска.

2.3 Представление многомерных траекторий в абстрактных пространствах характеристик

Существуют различные методы сокращения размерности анализируемых данных. В настоящей Главе применительно к анализу посадочных траекторий самолётов рассматривается ряд известных методов таких как:

- многомерный дискриминантный анализ (определяются наиболее информативные (с точки зрения сохранности структуры разбиения на выборки) компоненты – проекции 3D-траекторий на оси координат);
- отображение в абстрактные пространства характеристик (задача секторизации пространства (выделение пучков траекторий) рассматривается в двумерном случае);
- спектральный метод с использованием полярной кривизны (задача секторизации пространства решается в двумерном случае).

2.3.1 Покомпонентный многомерный дискриминантный анализ

В трёхмерном пространстве траектории объектов представляются в виде

$$\mathbf{X}_n = \{(x_n[i], y_n[i], z_n[i])\}, i = \overline{1, L_n}, n = \overline{1, N},$$

где декартовы координаты $(x_n[i], y_n[i], z_n[i])$ соответствуют оцениваемому положению n -го объекта. В настоящей Главе исследуется значимость различных проекций пространственных траекторий на оси координат. Траектории \mathbf{X}_n , $n = \overline{1, N}$ описываются последовательностями значений координат $X_n = \{x_n[i], i = \overline{1, L_n}\}$, $Y_n = \{y_n[i], i = \overline{1, L_n}\}$ и $Z_n = \{z_n[i], i = \overline{1, L_n}\}$, называемых компонентами. Различные компоненты неодинаково отражают информацию о принадлежности рассматриваемых траекторий к имеющимся выборкам.

Информативность компонент, т.е. степень сохранности информации о принадлежности пространственных траекторий к соответствующим выборкам, анализируется отдельно для каждой компоненты (используются результаты совместного разбиения посадочных траекторий самолётов, полученные с помощью метода

полиномиальных регрессий [64]). Далее это разбиение называется *совместным априорным разбиением* и используется для оценки эффективности выполненного анализа.

Для каждой из компонент траектории разделяются на две равные части. Та часть, для которой распределение траекторий по выборкам оказывается более неоднородным, используется в качестве *обучающей группы* при построении модели структуры выборок. Вторая часть является *тестируемой группой*. В результате применения многомерного дискриминантного анализа [76, 158] к обучающей группе вычисляются параметры модели гауссовой смеси. Такие параметризованные модели, полученные для каждой компоненты траекторий, используются для предсказания распределения траекторий по исходным выборкам в тестируемой группе.

Информативность разбиения на выборки по каждой компоненте траекторий оценивается следующим образом. Распределение по выборкам траекторий из тестируемой группы сравнивается с распределением этих же траекторий по выборкам в совместном априорном разбиении исходных данных. Доля траекторий, отнесённых к одной и той же выборке, рассматривается как индекс относительной информативности компоненты. Таким образом, покомпонентный анализ позволяет выделить наиболее информативную компоненту для описания структуры разбиения на выборки в исходном трехмерном пространстве.

Многомерный дискриминантный анализ

Разбиение траекторий обучающей группы выполняется в рамках вероятностной модели, при этом каждой полученной выборке соответствует своё распределение вероятности. Поэтому траектории обучающей группы, для которых выборки являются скрытыми, описываются конечной моделью смеси распределений. Подробное описание таких моделей содержится в [76]. Однако методы разбиения на выборки на основе модели смеси распределений, в пространствах большой размерности, представляющих траектории, оказываются высоко параметризованными. Поэтому на практике, предварительно уменьшают размерность

данных [159] с помощью метода главных компонент (PCA) [160] или методов отбора характеристик [161]. Однако уменьшение размерности траекторий перед разбиением приводит к суб-оптимальному представлению данных, поскольку частичная потеря информации может влиять на точность определения выборок. Сохранение информативности при снижении размерности обеспечивается регуляризацией или ограничением параметров модели, либо разработкой парсimonных (экономных) моделей. В настоящей работе для разбиения траекторий используется метод ограничения параметров модели гауссовой смеси, уменьшающий размерность внутренних пространств выборок и налагающий ограничения на матрицы ковариации. Этот метод относится к методам обучения с учителем (supervised learning) [162] и называется многомерным дискриминантным анализом [76, 158]. Методы разбиения на выборки на основе модели гауссовой смеси ведут себя неоднозначно, если объем данных мал по сравнению с числом оцениваемых параметров [94]. Необходим компромисс между числом оцениваемых параметров и общностью модели. Решение этой проблемы в многомерном дискриминантном анализе состоит в повторной параметризации – рассмотрении подпространства локальных групп анализируемых объектов [76, 158].

Пусть $\mathbf{x}_n, n = \overline{1, N}$ является набором векторов размерности q , представляющих траектории $\mathbf{X}_n, n = \overline{1, N}$ в пространстве характеристик. Дискриминантный анализ является методом обучения с учителем, целью которой является назначение вектора \mathbf{x} одной из K выборок, известных на основе обучающей части. Согласно модели гауссовой смеси выборка векторов \mathbf{x} описывается распределением

$$p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k) \quad (2.3.1)$$

π_k – доля k -й выборки, $\mathcal{N}(..)$ – гауссово распределение плотности вероятности со средним $\boldsymbol{\mu}_k$ и матрицей ковариации $\boldsymbol{\Sigma}_k$

$$\mathcal{N}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}|} \exp -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_k)^T \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_k), \quad (2.3.2)$$

Модель (2.3.1, 2.3.2) соответствует методу квадратичного дискриминантного анализа, который требует оценки числа параметров $\sim q^2$, поэтому его применение затруднено в многомерном пространстве. Благодаря феномену пустого пространства [163] можно предположить, что многомерные данные локализуются в подпространствах размерности, гораздо меньшей, чем q . С учётом этого предположения в [164] предлагается параметризация модели гауссовой смеси, которая уменьшает число оцениваемых параметров (гауссова модель $[a_{kj}b_kQ_kd_k]$ и её подмодели).

Пусть \mathbf{Q}_k – ортогональная матрица со столбцами собственных векторов ковариационной матрицы Σ_k и Δ_k – диагональная матрица ее собственных чисел, т.е.

$$\Delta_k = \mathbf{Q}_k^T \Sigma_k \mathbf{Q}_k. \quad (2.3.3)$$

Следовательно, матрица Δ_k – ковариационная матрица в пространстве её собственных векторов. Предполагается, что Δ_k разделяется на два блока

$$\Delta_k = \text{diag}(a_{k,1}, \dots, a_{k,d_k}, b_{k,1}, \dots, b_{k,q-d_k}),$$

где первые d_k ($d_k < q$) значений $a_{k,1}, \dots, a_{k,d_k}$ параметризуют дисперсию в подпространстве, содержащем k -ю выборку, а остальные $q - d_k$ компонент $b_{k,1}, \dots, b_{k,q-d_k}$ моделируют дисперсию шума. Модели с такой параметризацией являются парсимонными и предполагают, что каждая выборка k является изотропной. Размерность d_k рассматривается как внутренняя размерность скрытого подпространства k -ой группы.

Фиксируя некоторые параметры как общие внутри выборки или между выборками, можно получить частные модели, соответствующие различным регуляризациям. Например, если зафиксировать первые d_k собственных значений как общие для каждой выборки, получается более ограниченная модель вида $[a_k b_k Q_k d_k]$ [164]. Применение этой модели даёт хорошие результаты, т.е. предпо-

ложение, что каждая матрица Δ_k содержит только два различных собственных значения a_k и b_k является эффективным способом регуляризации оценки Δ_k . Это объясняется тем, что дисперсия при оценке a_k , которая является средним по значениям $a_{k,1}, \dots, a_{k,d_k}$, на самом деле меньше, чем дисперсия для каждой отдельной оценки $a_{k,1}, \dots, a_{k,d_k}$. Часто, для сокращения внутренней размерности d_k скрытого подпространства k -той группы, выбираются первые наибольшие собственные значения $a_{k,1}, \dots, a_{k,d_k}$.

Другим способом регуляризации является фиксирование параметров $b_{k,1}, \dots, b_{k,q-d_k}$ как общих между выборками. Это приводит к моделям вида $[a_k b Q_k d_k]$ и $[a_k b Q_k d_k]$, которые предполагают, что дисперсия одинакова вне специфических подпространств кластеров. В этих моделях шум вне скрытых подпространств выборок моделируется с помощью только одного параметра b , что оправдано, когда анализируемые данные получены одинаковым способом.

В настоящей работе при выполнении многомерного дискриминантного анализа исходного набора посадочных траекторий испытываются различные парсimonные модели, среди которых модель $[a_k b Q_k d_k]$ оказывается наиболее эффективной. Результаты применения данной модели приведены далее в Главе 2.3.1.

Определение наиболее информативных направлений в пространстве при описании структуры разбиения многомерных траекторий на выборки

Каждой траектории $\mathbf{X}_n, n = \overline{1, 116}$ соответствуют последовательности координат $X_n = \{x_n[i], i = \overline{1, 160}\}$, $Y_n = \{y_n[i], i = \overline{1, 160}\}$, и $Z_n = \{z_n[i], i = \overline{1, 160}\}$, (эти компоненты используются в многомерном дискриминантном анализе). В разделе 2.1 на Рис. 11, *a* представлены результаты разбиения исходного набора траекторий по методу полиномиальных регрессий [64]. В настоящей главе это разбиение называется совместным априорным разбиением. При дискриминантном анализе исходный набор траекторий разделяется на две равночисленные группы по 58 траекторий. Одна из групп, демонстрирующая большую неоднородность

в распределении траекторий по выборкам, используется для обучения (оценки параметров) вероятностных моделей, как это описано выше в разделе 2.3.1. Для каждой компоненты траекторий в трехмерном пространстве создаётся своя модель. Та группа траекторий, которая используется для оценки (настройки параметров) модели при многомерном дискриминантном анализе [76, 158], называется обучающей группой, вторая группа – тестируемой.

На Рис. 22 показаны результаты покомпонентного дискриминантного анализа для компонент X (Рис. 22, *a*) и Y (Рис. 22, *b*), соответственно (n – номер траектории в тестируемой группе, k – номер выборки). Нулевому номеру выборки соответствуют посторонние траектории. Символом « \circ » обозначается принадлежность траектории к выборке в априорном разбиении. Символом « $+$ » – принадлежность траектории к выборке, прогнозируемая согласно покомпонентному дискриминантному анализу. Обозначение « \oplus » используется, если принадлежность траектории к определённой выборке при априорном разбиении и в случае прогноза совпадают.

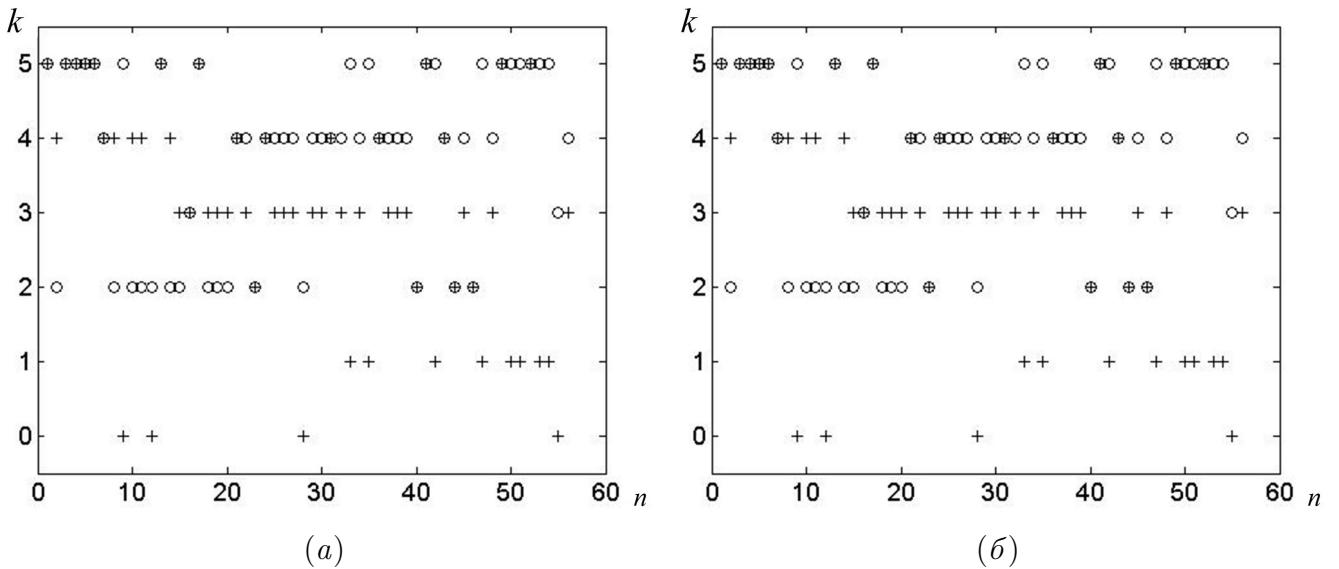


Рис. 22: Покомпонентный дискриминантный анализ результатов совместного априорного разбиения для тестируемой группы траекторий.

а) X-проекция траекторий, б) Y-проекция траекторий, в) Z-проекция траекторий

В результате вычисления параметров используемой модели $[a_k b Q_k d_k]$, размерности исходных данных для пяти анализируемых выборок сокращаются от $q = 159$ до соответствующих значений: $d_x = \{2, 1, 1, 1, 1\}$, $d_y = \{2, 1, 2, 2, 1\}$,

$d_z = \{3, 1, 2, 1, 1\}$ для каждой из компонент X, Y, Z . Результаты покомпонентного многомерного дискриминантного анализа для тестируемой группы (см. Рис. 22) демонстрируют степень совпадения априорного разбиения с разбиением, прогнозируемым согласно модели: 0.3750, 0.7143 и 0.357143 для компонент X, Y и Z соответственно. Таким образом, компоненты X и Y выделяются как наиболее полно отражающие структуру выборки траекторий в трехмерном пространстве.

Полученные численные оценки совпадения распределения траекторий по выборкам можно рассматривать в качестве индекса относительной информативности компонент для существующей структуры разбиения на выборки. Кроме того, отметим, что число посторонних траекторий, которое выявляется покомпонентным дискриминантным анализом, совпадает с количеством таких траекторий, выявляемых в работах [64, 75].

2.3.2 Отображение в абстрактные пространства характеристик

В настоящей главе задача секторизации пространства решается при рассмотрении проекций анализируемого набора траекторий на плоскость (x, y) . К анализируемому набору посадочных траекторий в двумерном случае применяется итеративный подход, позволяющий разделять траектории при их отображении в абстрактные пространства характеристик [74]. Особенность рассматриваемого метода заключается в том, что одновременно используются несколько абстрактных пространств характеристик траекторий.

Представление траекторий в пространствах характеристик

В каждом пространстве характеристик используется эмпирическое распределение вероятности векторов, представляющих траектории, для которого с помощью алгоритма сдвига среднего (mean shift) [165, 166] определяются моды – локальные максимумы этого распределения. Представляющие траектории вектора, которые относятся к конкретным модам, образуют выборки. Далее результаты разбиения в пространствах характеристик анализируются совместно для окончательного определения выборок. Полученные на первой итерации

выборки с малым числом элементов и вектора, соответствующие траекториям, которые находятся далеко от центра выборки, считаются посторонними. Затем для множества всех посторонних траекторий процедура разбиения повторяется до достижения стационарного результата (до тех пор, пока последующие итерации не меняют число посторонних траекторий).

При разбиении траекторий на выборки применяются как методы обучения с учителем (supervised learning), так и без учителя (unsupervised learning). Первые – чувствительны к начальному выбору параметров, что может привести к ненадежному разбиению на выборки. Во втором случае не требуется ни знание числа выборок, на которые нужно разбить данные, ни обучающая выборка. Данные анализируемых траекторий представляются в различных абстрактных пространствах характеристик, в каждом из которых выполняется непараметрическое разбиение. Анализ множества траекторий с помощью алгоритма сдвига среднего [165, 166] выявляет моды и соответствующие им выборки. Окончательные выборки формируются в результате сравнительного анализа результатов разбиения по всем используемым пространствам характеристик. Не вошедшие в выборки траектории считаются посторонними.

В трехмерном пространстве траектории объектов представляются в виде векторов

$$\mathbf{X}_n = \{(x_n[i], y_n[i], z_n[i]) , i = \overline{1, L_n}\}, n = \overline{1, N},$$

где декартовы координаты $(x_j[i], y_j[i], z_j[i])$ соответствуют оцениваемому положению n -го объекта, L_n – число точек траектории (траектории объектов могут иметь различные длины). Пусть функции $\Phi_m(..)$, $m = \overline{1, M}$ переводят траекторию \mathbf{X}_n в d_m -мерные пространства характеристик $\{\Psi_m^{d_m}, m = \overline{1, M}\}$, т.е. $\Phi_m(..) : \mathbf{X}_n \rightarrow \Psi_m^{d_m}$, $m = \overline{1, M}$, где M – число пространств характеристик, d_m – размерность m -го пространства. Пространства характеристик $\{\Psi_m^{d_m}, m = \overline{1, M}\}$ считаются независимыми, во-первых, чтобы избежать нормирования, необходимого при совместном анализе характеристик, и, во-вторых, чтобы упростить совместный анализ неортогональных пространств характеристик с различными

областями определения (пространственными и угловыми). Кроме того, этот подход допускает параллельное разбиение с использованием различных характеристик и дальнейшую интеграцию результатов, полученных в различных пространствах характеристик.

Выбор характеристик траектории определяется решаемой задачей, и каждое пространство характеристик способствует выделению выборок из множества анализируемых траекторий. В качестве характеристик траектории рассматриваются пространственные и угловые представления траектории n -го объекта: средняя скорость объекта (average velocity) $\langle \mathbf{v}_n \rangle$; вектор перемещения объекта (directional distance) \mathbf{d}_n ; среднее траектории объекта (mean) \mathbf{m}_n ; модель формы траектории объекта в виде полиномиальной регрессии (shape); представление траектории объекта с помощью анализа главных компонент (Principal Component Analysis – PCA) [160, 167] и гистограмма изгибов траектории объекта (directional histogram) [168].

Средняя скорость $\langle \mathbf{v}_n \rangle$ описывает изменение положения n -го объекта

$$\langle \mathbf{v}_n \rangle = \frac{1}{L_n - 1} \sum_{i=1}^{L_n-1} (x_n[i+1] - x_n[i], y_n[i+1] - y_n[i], z_n[i+1] - z_n[i]). \quad (2.3.4)$$

Средняя скорость помогает разделению траекторий объектов, движущихся с переменным шагом. Вектор перемещения \mathbf{d}_n n -го объекта представляет длину проекций траекторий на оси координат и описывает направление движения

$$\mathbf{d}_n = (x_n[L_n] - x_n[1], y_n[L_n] - y_n[1], z_n[L_n] - z_n[1]). \quad (2.3.5)$$

Эта характеристика помогает разделить длинные и короткие траектории, а также противоположно направленные траектории. Другая характеристика – пространственные координаты среднего положения \mathbf{m}_n n -ой траектории

$$\mathbf{m}_n = \frac{1}{L_n} \sum_{i=1}^{L_n} (x_n[i], y_n[i], z_n[i]). \quad (2.3.6)$$

Эта характеристика хорошо разделяет траектории, относящиеся к различным областям в трехмерном пространстве. Для моделирования формы траектории \mathbf{X}_n

независимо от её длины и набора точек используется полиномиальная регрессия

$$\begin{cases} \mathbf{x}_n^* = (1 \quad \mathbf{z}_n \quad (\mathbf{z}_n)^2 \quad \dots \quad (\mathbf{z}_n)^p) \times \left(\boldsymbol{\beta}_0^{(1)} \boldsymbol{\beta}_1^{(1)} \dots \boldsymbol{\beta}_p^{(1)} \right)^T + \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}, \\ \mathbf{y}_n^* = (1 \quad \mathbf{x}_n \quad (\mathbf{x}_n)^2 \quad \dots \quad (\mathbf{x}_n)^p) \times \left(\boldsymbol{\beta}_0^{(2)} \boldsymbol{\beta}_1^{(2)} \dots \boldsymbol{\beta}_p^{(2)} \right)^T + \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}, \\ \mathbf{z}_n^* = (1 \quad \mathbf{y}_n \quad (\mathbf{y}_n)^2 \quad \dots \quad (\mathbf{y}_n)^p) \times \left(\boldsymbol{\beta}_0^{(3)} \boldsymbol{\beta}_1^{(3)} \dots \boldsymbol{\beta}_p^{(3)} \right)^T + \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)}, \end{cases} \quad (2.3.7)$$

где первые множители в правой части уравнений – стандартные матрицы Вандермонта размерности $L_n \times (p + 1)$ с компонентами $\mathbf{z}_n = \{\mathbf{z}_n[i], i = \overline{1, L_n}\}$, $\mathbf{x}_n = \{\mathbf{x}_n[i], i = \overline{1, L_n}\}$ и $\mathbf{y}_n = \{\mathbf{y}_n[i], i = \overline{1, L_n}\}$, соответственно. Второй множитель в (2.3.7) – вектор размерности $(p + 1) \times 1$, и последний компонент это вектор размерности $L_n \times 1$. Наилучшая модель определяется нахождением оптимальных значений коэффициентов $(\boldsymbol{\beta}_0^{(j)}, \boldsymbol{\beta}_1^{(j)}, \boldsymbol{\beta}_2^{(j)})$, $j = 1, 2, 3$ в (2.3.7), для которых $\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = |\mathbf{x}^* - \mathbf{x}|$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = |\mathbf{y}^* - \mathbf{y}|$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} = |\mathbf{z}^* - \mathbf{z}|$ минимальны. Этот поиск требует некоторого компромисса между точностью и эффективностью. С увеличением степени полинома точность приближения растёт, но только до некоторой величины. В настоящей работе фиксируется $p = 2$, т.к. рост значения p не влияет на общую точность. Коэффициенты $(\boldsymbol{\beta}_0^{(j)}, \boldsymbol{\beta}_1^{(j)}, \boldsymbol{\beta}_2^{(j)})$, $j = 1, 2, 3$ определяют начальное положение, скорость и ускорение объекта.

Анализ главных компонент (PCA) используется для уменьшения размерности данных перед их разбиением на выборки с минимальными потерями информативности [51, 160]. PCA-анализ хорошо работает для данных с единым гауссовым распределением. Этот метод требует точной оценки ковариационной матрицы шума на основе исходных данных. Пусть $\mathbf{r}_n[i] = (x_n[i], y_n[i], z_n[i])^T$, тогда траектория \mathbf{X}_n может быть представлена в виде набора этих векторов $\mathbf{X}_n = \{\mathbf{r}_n[i], i = \overline{1, L_n}\}$. Затем из каждой точки траектории \mathbf{X}_n вычитаются координаты среднего положения \mathbf{m}_n этой траектории

$$\tilde{\mathbf{X}}_n = \{\mathbf{r}_n[i] - \mathbf{m}_n, i = \overline{1, L_n}\}. \quad (2.3.8)$$

Матрица ковариации имеет вид

$$\boldsymbol{\Xi}_n = \frac{1}{L_n} \tilde{\mathbf{X}}_n \tilde{\mathbf{X}}_n^T. \quad (2.3.9)$$

Разложение собственных чисел $\boldsymbol{\Xi}_j$ (2.3.9) даёт собственные значения $\boldsymbol{\alpha} = \{\boldsymbol{\alpha}_i, i = \overline{1, L_n}\}$ и соответствующие собственные вектора $\boldsymbol{\phi} = \{\boldsymbol{\varphi}_i, i = \overline{1, L_n}\}$. Упорядочив $\boldsymbol{\alpha}_i, i = \overline{1, L_n}$ по убыванию, рассматривают первые два собственных вектора $\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_l \in \boldsymbol{\varphi}$, соответствующие двум наибольшим собственным значениям $\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_l \in \boldsymbol{\alpha}$, поскольку наибольшее изменение приходится как раз на эти две собственных компоненты [51, 160].

Для оценки резкости поворотов траектории \mathbf{X}_n , вычисляется гистограмма направленности (trajectory directional histogram) в каждой координатной плоскости. Эта характеристика описывает статистически направленное распределение траекторий. Гистограмма направленности вычисляется по методу, предложенному в [168]

$$\mathbf{h}_n = H(\boldsymbol{\theta}_n[i]), \quad (2.3.10)$$

где $H(\boldsymbol{\theta}_n[i])$ гистограмма углов направлений

$\boldsymbol{\theta}_n[i] = \text{arctg}((y_n[i+1] - y_n[i])/(x_n[i+1] - x_n[i]))$. Аналогичные гистограммы вводятся для плоскостей (x, z) и (z, y) . Однако, гистограмма направленности сама по себе не достаточна, т.к. не содержит пространственную информацию. Поэтому две траектории, которые разнесены в пространстве, попадут в одну выборку, если их гистограммы направленности подобны. Индексы трёх самых больших значений \mathbf{h}_n соответствуют доминирующими углам в траектории.

Таким образом, исходный набор траекторий преобразуется в вектора пространства характеристик. Затем в этих пространствах выполняется поиск выборок. Поскольку нет никаких предварительных знаний о типе анализируемых траекторий, все их характеристики считаются равнозначными и при разбиении на выборки имеют равные веса. В следующем разделе описывается процедура разбиения.

Абстрактные пространства. Разбиение на выборки.

В настоящей работе пространства характеристик считаются независимыми, что упрощает совместный анализ неортогональных пространств характеристик

с различными областями определения. Каждому пространству характеристик ставится в соответствие эмпирическое распределение вероятности векторов, представляющих траектории в этом пространстве [165]. Метод сдвига среднего поднимается по градиенту распределения вероятности (2.3.11), достигая ближайший пик распределения, т.е. доминантную моду [165, 166, 169]. После этого каждый вектор представляющий траекторию приписывается к ближайшей моде, т.е. к соответствующей выборке.

Пусть $\mathbf{x}_n \in \Psi_m^{d_m}$, $n = \overline{1, N}$ является набором векторов представляющих траектории \mathbf{X}_n , $n = \overline{1, N}$ в m -том пространстве характеристик. Эмпирическое распределение вероятности векторов имеет вид

$$p(\mathbf{x}, h_m^{d_m}) = \frac{1}{N h_m^{d_m}} \sum_{n=1}^N K\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_n}{h_m^{d_m}}\right) \quad (2.3.11)$$

где $h_m^{d_m}$ – ширина полосы ядра $K(..)$. Правильный выбор ширины полосы $h_m^{d_m}$ важен при разбиении траекторий на выборки методом сдвига среднего. Для этого используется итеративная процедура. Первоначальная ширина полосы составляет 10% от каждой размерности m -того пространства характеристик и итеративно возрастает до 80%. Нижняя граница отсекает выборки из одного вектора (для единственной траектории), а верхняя граница исключает выборку, объединяющую вектора $\mathbf{x}_n \in \Psi_m^{d_m}$, $n = \overline{1, N}$ для всех траекторий. Малая величина $h_m^{d_m}$ снижает отклонение оценки распределения (2.3.11), но увеличивает дисперсию. В [170] показано, что оптимальным ядром в (2.3.11), обеспечивающим минимум средней интегральной квадратичной ошибки m (mean integrated square error), является радиально-симметричное ядро Епанечникова [171]

$$K(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2V_m^{d_m}}(d_m + 2)(1 - \|\mathbf{x}\|^2), & \|\mathbf{x}\| < 1, \\ 0, & \|\mathbf{x}\| \geq 1, \end{cases} \quad (2.3.12)$$

где $V_m^{d_m}$ представляет объём d_m - мерной единичной сферы. Градиент эмпириче-

ского распределения (2.3.11) имеет вид

$$\nabla p(\mathbf{x}) = \frac{d_m + 2}{h_m^{d_m} V_m^{d_m}} \left(\frac{1}{N_S} \sum_{\mathbf{x}_n \in S(\mathbf{x})} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \right), \quad (2.3.13)$$

где $S(\mathbf{x})$ – гиперсфера радиуса $h_m^{d_m}$ с объёмом $h_m^{d_m} V_m^{d_m}$ и центром в точке \mathbf{x} , содержащая N_S векторов [166]. В результате вектор сдвига среднего

$$\mathbf{M}_h(\mathbf{x}) = \frac{1}{N_S} \sum_{\mathbf{x}_n \in S(\mathbf{x})} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)$$

имеет вид

$$\mathbf{M}_h(\mathbf{x}) = \frac{h_m^{d_m} V_m^{d_m}}{d_m + 2} \cdot \nabla p(\mathbf{x}). \quad (2.3.14)$$

Результатом выполнения процедуры сдвига среднего является множество векторов, связанных с конкретной модой [169]. После выбора начального вектора, представляющего некоторую траекторию, процедура сдвига среднего сходится к локальной моде, и все вектора, ограниченные шириной полосы $h_m^{d_m}$ ядра $K(..)$ в (2.3.11), приписываются к этой моде. Малая ширина полосы способствует росту числа мод и большой дисперсии, которая означает неустойчивость оценки локального распределения (2.3.11). Этот недостаток устраняется путем объединения близко расположенных мод [172]. В настоящей работе смежные выборки объединяются, если соответствующие им моды распределения находятся на расстоянии меньше, чем $h_m^{d_m} + 0,1\% (h_m^{d_m})$.

Окончательное разбиение на выборки траекторий движения

После объединения смежных выборок в каждом пространстве характеристик, окончательное разбиение исходных траекторий обеспечивается совместным анализом выборок во всех пространствах характеристик. Это разбиение проходит в три этапа: сначала оценивается среднее число выборок, затем устанавливается соответствие между выборками в различных пространствах характеристик и в результате каждая траектория приписывается к конкретной выборке.

Пусть множество $\{N_m, m = \overline{1, M}\}$ содержит число выборок для каждого из пространства характеристик $\{\Psi_m^{d_m}\}$. Окончательное число выборок $K = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M N_m$. После определения числа выборок K , оптимизируется их структура. Оптимизация разбиения начинается с выбора пространства характеристик $\Psi_l^{d_l} \in \{\Psi_m^{d_m}, m = \overline{1, M}\}$, для которого $N_l = K$. Исходными выборками считаются выборки $\{\mathbb{C}_k^l, k = \overline{1, K}\} \subset \Psi_l^{d_l}$. Затем ищется соответствие этих выборок выборкам во всех остальных пространствах $\Psi_n^{d_n} \in \{\Psi_m^{d_m}, m = \overline{1, M}\}, n \neq l$. Если выборка $\mathbb{C}_j^n \subset \Psi_n^{d_n}$ имеет максимальное число перекрывающихся элементов с выборкой $\mathbb{C}_k^l \subset \Psi_l^{d_l}$, т.е.

$$j = \arg \max_r |\mathbb{C}_k^l \cap \mathbb{C}_r^n|, \quad (2.3.15)$$

то выборка \mathbb{C}_k^l корректируется согласно $\mathbb{C}_k^l = \mathbb{C}_k^l \cap \mathbb{C}_j^n$. Такая корректировка выполняется для всех выборок $\{\mathbb{C}_k^l, k = \overline{1, K}\} \subset \Psi_l^{d_l}$ и в результате формируется K согласованных выборок траекторий $\{\mathbb{C}_k^{\text{final}}, k = \overline{1, K}\}$. После этого к выборкам $\{\mathbb{C}_k^{\text{final}}, k = \overline{1, K}\}$ присоединяется множество траекторий $\{\mathbf{X}' \subseteq \{\mathbf{X}_j, j = \overline{1, J}\}\}$, которые не вошли в выборки. Каждая выборка моделируется собственным распределением Гаусса с шириной полосы, определяемой дисперсией выборки. Условная вероятность того, что траектория $\mathbf{X}_0 \in \{\mathbf{X}'\}$ генерируется в соответствии с окончательной моделью разбиения, имеет вид

$$p(\mathbf{X}_0 | \mathbb{C}_k^{\text{final}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \boldsymbol{\sigma}_k^{\text{final}}} \exp \left(- \left(\frac{\mathbf{m}_{\mathbf{X}_0} - \boldsymbol{\mu}_k^{\text{final}}}{\boldsymbol{\sigma}_k^{\text{final}}} \right)^2 \right), \quad (2.3.16)$$

где $\mathbf{m}_{\mathbf{X}_0}$ – среднее положение траектории \mathbf{X}_0 , $\boldsymbol{\mu}_k^{\text{final}} = \frac{1}{N_k} \sum_{j=1}^{N_k} \mathbf{m}_j$ (со средними положениями траекторий (2.3.6)) – среднее положение траекторий для выборки $\mathbb{C}_k^{\text{final}}$ и $\boldsymbol{\sigma}_k^{\text{final}} = \frac{1}{N_k} \sum_{j=1}^{N_k} \boldsymbol{\Xi}_j$ (с матрицами ковариации траекторий (2.3.9)) – стандартная дисперсия для выборки $\mathbb{C}_k^{\text{final}}$ [166], где N_k – число траекторий в этой выборке. Траектория \mathbf{X}_0 приписывается к выборке $\mathbb{C}_k^{\text{final}}$, если вероятность

$$p(\mathbf{X}_0 | \mathbb{C}_k^{\text{final}}) > p(\mathbf{X}_0 | \mathbb{C}_l^{\text{final}}), \quad l = \overline{1, K}, l \neq k. \quad (2.3.17)$$

Описанный подход к разбиению траекторий на выборки, использующий выделение выборок в пространствах характеристик, позволяет группировать даже траектории, удалённые в декартовом трехмерном пространстве, и выявляет выборки траекторий, представляющих характерные паттерны движения.

Выявление траекторий, не вошедших в выборки

Существует два типа посторонних траекторий. Посторонние траектории первого типа располагаются в областях с высокой плотностью траекторий, но демонстрируют поведение, отличное от общего паттерна движения. Если траектория $\mathbf{X}_j \in \mathbb{C}_k^{\text{final}}$ со средним $\mathbf{m}_{\mathbf{X}_j}$ лежит далеко от центра $\boldsymbol{\mu}_k^{\text{final}}$ выборки, к которой она принадлежит, она считается посторонней при условии

$$\frac{\mathbf{m}_{\mathbf{X}_j} - \boldsymbol{\mu}_k^{\text{final}}}{\sigma_k^{\text{final}}} > \tau, \quad (2.3.18)$$

где $\tau = 0,95$. Второй тип посторонних траекторий располагается в районах с низкой плотностью траекторий. Если выборка содержит небольшое число траекторий и не может быть объединена с ближайшей выборкой, то считается, что она состоит из посторонних траекторий. Пороговое значение для выделения выборки посторонних траекторий составляет 10% от среднего количества элементов по всем выборкам.

Определение пучков многомерных посадочных траекторий в абстрактных пространствах характеристик

Наиболее информативные оси координат (x и y) определены в Главе 2.3.1, поэтому в настоящей главе рассматривается проекция исходного набора посадочных траекторий на плоскость (x, y) , представленная на Рис. 23. В результате итеративного подхода к разбиению траекторий рассматриваемой проекции на выборки возможно выделение пучков траекторий, соответствующих посадкам на заданные взлётно-посадочные полосы.

На первом этапе в анализируемых траекториях выделяются две выборки

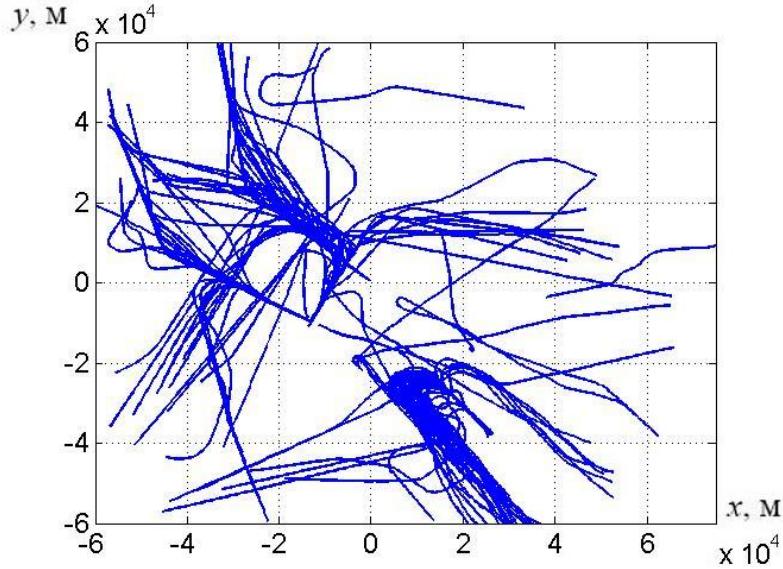


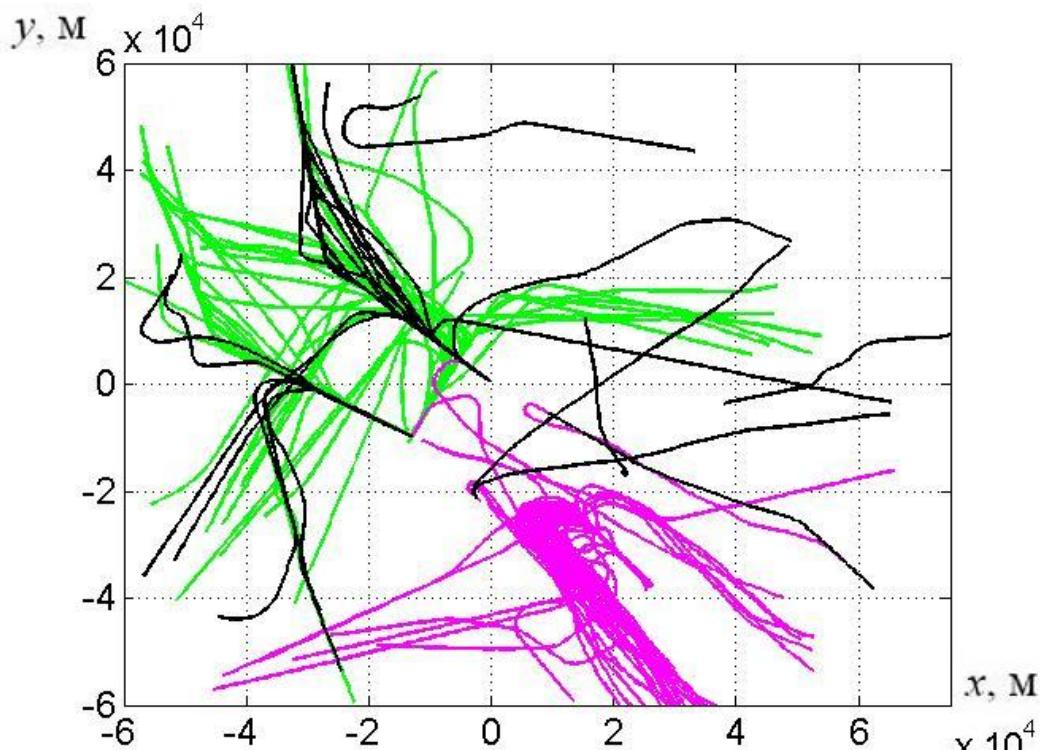
Рис. 23: Проекция исходного набора траекторий на плоскость (x, y)

(показаны зеленым и розовым цветом на Рис. 24, *a*) и посторонние траектории – не вошедшие ни в одну из выборок (показаны черным цветом). Из Рис. 24, *a* видно, что траектории в каждой из полученных выборок траектории несмотря на различное положение в пространстве схожи по форме.

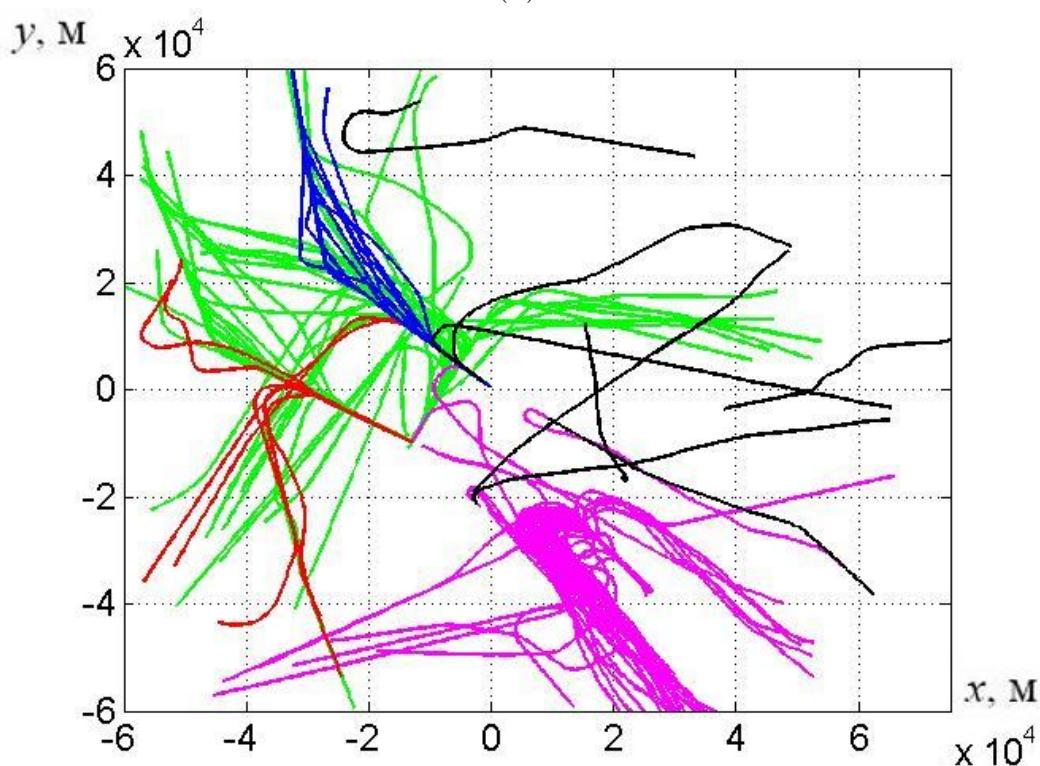
На следующей итерации к траекториям, отнесённым на первом этапе к посторонним, применяется описанный выше метод разбиения на выборки в пространствах характеристик, в результате чего в них выделяются ещё две выборки (показаны красным и синим цветом на Рис. 24, *b*). Помимо этого, определяются настоящие посторонние траектории (показаны черным цветом на Рис. 24, *b*) – не отнесённые ни к одной из полученных выборок.

В работе [21] выборки, полученные при разбиении аналогичных данных, содержат только пространственно близкие траектории. Объединение в выборки траекторий сходной формы, представленное в настоящей главе, возможно благодаря тому, что в двух из рассматриваемых пространств характеристик (полиномиальная регрессия и гистограмма направленности) моделируется форма траектории.

В результате применения итеративного подхода к разбиению многомерных



(a)



(б)

Рис. 24: а) Выборки траекторий, полученные после первой итерации.
б) Итоговый результат итеративного разбиения траекторий на выборки

траекторий на выборки на основе их представления в пространствах характеристик выделяются характерные посадочные паттерны (см. Рис. 24, б). Однако

пучки траекторий, соответствующие посадкам на заданную взлётно-посадочную полосу видны только в одной из полученных выборок – выделенной синим цветом на Рис. 24, б.

Видно, что получение точного решения задачи секторизации пространства в двумерном случае с помощью описанного выше метода невозможно. Это связано с особенностью рассматриваемых траекторий – их кривизной и кручением, которые не позволяют точно разделить траектории со сходными характеристиками в абстрактных пространствах. Для точного выделения пучков траекторий в двумерном случае необходимы методы, учитывающие кривизну траекторий.

2.3.3 Спектральный метод с использованием полярной кривизны

В настоящей главе пучки траекторий выделяются на примере x -проекций траекторий. Для этого применяется спектральный метод разбиения с использованием полярной кривизны. В этом методе используется модель разбиения набора траекторий на выборки в виде объединения аффинных подпространств. Сходство векторов выборки оценивается многомерным тензором близости, который разворачивается в матрицу близости (подобия) векторов и анализируется спектральным методом. В пучках траекторий, полученных таким методом, определяются центроиды. Траектория в пучке, наиболее удалённая от соответствующего центроида по мере косинуса, считается выбросом.

При анализе наборов (существенно) многомерных векторов не могут использоваться методы визуализации, обеспечивающие оценку числа выборок. Поэтому, все алгоритмы разбиения имеют ту же проблему, что и алгоритм K-means. Примером является разбиение в пространстве многомерных векторов \mathbb{R}^D (где $D \gg 1$) на основе генеративных моделей, в которых алгоритм ожидания-максимизации правдоподобия – Expectation-Maximization (EM) используется для обучения смеси распределений. Во-первых, чтобы оценить это параметрическое распределение, необходимо сделать предположение о Гауссовом распределении в каждой определяемой выборке. Во-вторых, логарифм правдоподобия может иметь много

локальных минимумов, и, следовательно, требуются многочисленные запуски, чтобы получить приемлемое решение. Поэтому алгоритм K-means был обобщен, чтобы определять K d -мерных аффинных подпространств наилучшим образом аппроксимирующих набор векторов в \mathbb{R}^D . Таким образом, прототипом для выборки векторов становится аппроксимирующее аффинное подпространство, а не центроид, как в алгоритме K-means.

Альтернативой алгоритму K-means являются спектральные методы разбиения, в которых используются главные собственные вектора матрицы близости (подобия), основанной на евклидовом расстоянии между многомерными векторами. Спектральные методы успешно применяются к задачам сегментирования изображений (размерность пространства характеристик для пикселей изображения ≤ 7), но их применимость ограничена парными мерами близости (подобия) при формировании матрицы близости (подобия). Однако геометрические задачи часто связаны с анализом выборки более двух многомерных векторов, где требуется оценить их меру подобия. При решении таких задач определяется вероятность принадлежности к одной и той же выборке целого набора векторов (а не пары), что приводит к многомерному тензору близости (подобия). Ниже показано, что спектральный метод разбиения с использованием многомерного тензора близости (подобия) векторов обеспечивает точное разбиение для (существенно) многомерных данных, представляющих траектории движения самолетов при посадке в аэропорту.

Спектральное разбиение с тензором близости на основе полярной кристаллизации

Задача гибридного линейного моделирования (*hybrid linear modeling*) предполагает, что набор данных (многомерных векторов) достаточно хорошо аппроксимируется объединением аффинных подпространств (*flats*). При этом необходимо одновременно оценить параметры каждого из аффинных пространств и ассоциацию анализируемых многомерных векторов с аффинными подпространствами [173]. Любое d -мерное аффинное подпространство является подмножеством

пространства векторов \mathbb{R}^D и характеризуется решением линейной системы уравнений $\mathbb{F} = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^D, \mathbf{F}^T \mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma}\}$, где $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{D \times (D-d)}$, $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^{1 \times (D-d)}$ (например, 0-мерное аффинное подпространство (0-flat) – точка; 1-мерное (1-flat) – плоскость; $(D-1)$ -мерное ($(D-1)$ -flat) – гиперплоскость). В настоящей главе рассматривается специальный случай гибридного линейного моделирования, когда все аффинные подпространства имеют одинаковую размерность $d \geq 0$ [78]. Для набора векторов используется определенный в [174] многомерный тензор аффинности (близости) (*affinity tensor*) и алгоритм спектрального разбиения [175, 176]. Каждым $(d+2)$ -векторам из набора данных назначается аффинная мера, в результате чего формируется (многомерный) тензор аффинности (близости) порядка $(d+2)$. Разворачивание этого тензора близости в матрицу близости (подобия) обеспечивает применение спектрального разбиения [175, 176].

Пусть d и D – целые числа, такие, что $0 \leq d \leq D$. Для каждого $(d+2)$ различных векторов-столбцов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d+2} \in \mathbb{R}^D$, $V_{d+1}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d+2})$ обозначает объем выпуклой оболочки образованной $(d+1)$ вектором – $(d+1)$ -симплекса ($(d+1)$ -мерного обобщения треугольника или $(d+1)$ -мерного тетраэдра) [177]. В каждой вершине \mathbf{x}_m полярный синус определяется как

$$p \sin_{\mathbf{x}_m}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d+2}) = \frac{(d+1)! V_{d+1}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d+2})}{\prod_{j=\overline{1, d+2}, j \neq m}^{} \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_m\|}, \quad m = \overline{1, d+2}. \quad (2.3.19)$$

Пусть $\text{diam}(\mathbb{X})$ обозначает диаметр набора векторов $\mathbb{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d+2}\}$. Полярная кривизна (*polar curvature*) набора $(d+2)$ -векторов определяется в [78, 178, 179] как

$$c_p(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d+2}) = \text{diam}(\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d+2}\}) \left(\sum_{m=1}^{d+2} (p \sin_{\mathbf{x}_m}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d+2}))^2 \right)^{1/2}, \quad (2.3.20)$$

При $d = 0$ полярная кривизна совпадает с евклидовым расстоянием. Введем обозначения для набора индексов $M = \{1, \dots, d+2\}$ и матрицы из векторов-столбцов $\mathbf{X}_M = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{d+2}]$. С учетом (2.3.19), c_p (2.3.20) принимает вид

$$c_p(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d+2}) = \max_{j,m \in M} \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_m\| \left(\frac{1}{d+2} \sum_{j \in M} \frac{\det(\mathbf{x}_M^T \mathbf{x}_M + \mathbf{1})}{\prod_{j \in M, j \neq m} \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_m\|^2} \right)^{1/2}.$$

Числитель $\det(\mathbf{x}_M^T \mathbf{x}_M + \mathbf{1})$ является, с точностью до множителя, квадратом объема $(d+1)$ -симплекса, сформированного $(d+2)$ векторами $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d+2}\}$. Следовательно, полярная кривизна может рассматриваться, как объем $(d+1)$ -симплекса, нормированного в каждой вершине, усредненного по вершинам и затем масштабированного диаметром $(d+1)$ -симплекса. Если $(d+2)$ вектора выбираются из одного и того же аффинного подпространства, то ожидается, что полярная кривизна $c_p \approx 0$ и, следовательно, аффинность (близость) ≈ 1 . С другой стороны, когда вектора выбираются из объединения аффинных подпространств, то ожидается, что полярная кривизна велика и аффинность (близость) ≈ 0 .

Алгоритм K аффинных подпространств разделяет набор данных $\mathbb{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\} \subset \mathbb{R}^D$ на K выборок $\mathbb{C}_1, \dots, \mathbb{C}_k$, каждая из которых наиболее хорошо аппроксимируется его d -мерным аффинным подпространством \mathbb{F}_k , $k = \overline{1, K}$. При заданных K и d , этот алгоритм минимизирует целевую функцию

$$e = \sum_{k=1}^K \min_{\mathbb{F}_k, k=\overline{1, K}} \sum_{\mathbf{x}_j \in \mathbb{C}_k} \|\mathbf{x}_j - P_{\mathbb{F}_k} \mathbf{x}_j\|^2,$$

где $P_{\mathbb{F}_k} \mathbf{x}_j$ – проекция вектора \mathbf{x}_j на d -мерное аффинное подпространство \mathbb{F}_k , $k = \overline{1, K}$. На практике, минимизация целевой функции выполняется итеративно, как в алгоритме K-means [180]. То есть, после инициализации K d -мерных аффинных подпространств (например, они могут быть выбраны случайным образом), повторяются два шага до достижения сходимости: 1) назначаются выборки в соответствии с минимальным расстоянием до аффинных подпространств, определенных на предыдущей итерации; 2) для этих вновь полученных выборок посредством анализа главных компонент – *Principal Component Analysis* (PCA [160]) вычисляются d -мерные аффинные подпространства с минимальной среднеквадратичной ошибкой. Эта процедура очень быстрая и гарантированно сходится, по крайней мере, к локальному минимуму. Однако, на практике, ло-

кальный минимум, к которому сходится алгоритм K аффинных подпространств, гораздо хуже глобального минимума целевой функции. В результате, этот алгоритм не такой точный, как более ранние алгоритмы гибридного линейного моделирования, и даже при моделировании поверх линейных подпространств (в противоположность общим аффинным подпространствам) он часто дает сбой, когда, или d достаточно велико (например, $d \geq 10$), или имеется значительная составляющая посторонних векторов [181, 182].

Ниже предполагается, что набор векторов $\mathbb{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\} \subset \mathbb{R}^D$ выбран из объединения K d -мерных аффинных подпространств \mathbb{F}_k , $k = \overline{1, K}$ (возможно с шумом и посторонними векторами), где $K > 1$ и N велико. Используя полярную кривизну c_p (2.3.20) с фиксированной константой моделирования $\sigma > 0$, конструируется тензор аффинности (близости) \mathcal{A} порядка $(d+2)$ для различных $(d+2)$ векторов $\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_{d+2}} \in \mathbb{X}$ с компонентами

$$\mathcal{A}(i_1, \dots, i_{d+2}) = \exp \left(- \left(c_p(\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_{d+2}}) \right)^2 / (\sigma^2) \right). \quad (2.3.21)$$

Выбор оптимального значения параметра σ обсуждается в [78]. В (2.3.21) тензор близости (подобия) \mathcal{A} порядка $(d+2)$ имеет размерность $\underbrace{N \times N \times \dots \times N}_{d+2}$. Однако в настоящей главе используется только матричное представление тензора \mathcal{A} (2.3.21), которое обозначается посредством \mathbf{A} и называется матрицей близости (подобия). Размерность матрицы \mathbf{A} равна $N \times N^{d+1}$. Для каждого $i = \overline{1, N}$, строка i матрицы \mathbf{A} (т.е., $\mathbf{A}(i, :)$) разворачивается из слоя i тензора \mathcal{A} (2.3.21) (т.е., $\mathcal{A}(i, :, \dots, :)$) следуя некоторому произвольному, но фиксированному порядку, например лексикографическому порядку последних $(d+1)$ индексов [183]. Это упорядочение несущественно для настоящего рассмотрения, поскольку как показано в [175, 176], в спектральной кластеризации используется произведение

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T, \quad (2.3.22)$$

которое не зависит от порядка индексов. Определение матрицы \mathbf{A} и умножение этой матрицы большой размерности на результат ее транспонирования (чтобы

произвести \mathbf{W} (2.3.22)) вычислительно сложно. Возможное решение состоит в однородной выборке, т.е. в случайной выборке и вычислении небольшого поднабора столбцов \mathbf{A} , чтобы произвести оценку \mathbf{W} (2.3.22) [174, 184]. Обозначив столбец j матрицы \mathbf{A} как $\mathbf{A}(:, j)$, записываем \mathbf{W} (2.3.22) в следующем виде

$$\mathbf{W} = \sum_{j=1}^{N^{d+1}} \mathbf{A}(:, j) \mathbf{A}(:, j)^T \quad (2.3.23)$$

Следовательно, \mathbf{W} – сумма N^{d+1} матриц ранга 1. Пусть j_1, \dots, j_c – с целых чисел, случайно выбранных из интервала $[1, N^{d+1}]$. Как показано в [184], матрица \mathbf{W} (2.3.23) аппроксимируется следующим образом

$$\mathbf{W} \approx \sum_{t=1}^c \mathbf{A}(:, j_t) \mathbf{A}(:, j_t)^T. \quad (2.3.24)$$

В [78] алгоритм спектрального разбиения с матрицей близости на основе полярной кривизны (2.3.20) – Spectral Curvature Clustering (SCC) формирует матрицу парных весов \mathbf{W} (2.3.24) из аппроксимированной матрицы близости (подобия)

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}_c \mathbf{A}_c^T,$$

и применяет спектральное разбиение [175] для определения K выборок $\mathbb{C}_1, \dots, \mathbb{C}_K$. Для того, чтобы улучшить эти выборки, SCC-алгоритм затем повторно выбирает вектора из выборок \mathbb{C}_k , $k = \overline{1, K}$ в пределах небольшой полосы вокруг каждого из их аппроксимирующих d -мерных аффинных подпространств \mathbb{F}_k , $k = \overline{1, K}$. Эта процедура повторяется до достижения сходимости и называется итеративной выборкой (*iterative sampling*) [78]. Сходимость измеряется ошибкой ортогональных наименьших квадратов – *orthogonal least squares* (OLS) для d -мерных аффинных подпространств \mathbb{F}_k , $k = \overline{1, K}$ аппроксимирующих выборок $\mathbb{C}_1, \dots, \mathbb{C}_K$ в виде

$$e_{\text{OLS}} = \sum_{k=1}^K \sum_{\mathbf{x}_j \in \mathbb{C}_k} \|\mathbf{x}_j - P_{\mathbb{F}_k} \mathbf{x}_j\|^2, \quad (2.3.25)$$

где $P_{\mathbb{F}_k} \mathbf{x}_j$ – проекция вектора \mathbf{x}_j на d -мерное аффинное подпространство \mathbb{F}_k

(может быть получена анализом главных компонент (PCA) [180]). SCC-алгоритм спектрального разбиения с матрицей близости (подобия) на основе полярной кривизны представлен на Рис. 25 [78].

Алгоритм Spectral Curvature Clustering (SCC)

Вход: Набор векторов \mathbb{X} , внутренняя размерность (*intrinsic dimension*) d , число K d -мерных аффинных подпространств, число выбираемых столбцов c (по умолчанию = $100K$).

Выход: K непересекающихся выборок $\mathbb{C}_1, \dots, \mathbb{C}_K$ и ошибка e_{OLS} .

Шаги:

1. Случайным образом выбираются c поднаборов из \mathbb{X} , каждый из которых содержит в точности $(d + 1)$ различных векторов.
2. Вычисляется полярная кривизна (2.3.20) для каждого поднабора и каждого из оставшихся $(N - d - 1)$ векторов в \mathbb{X} , эти $(N - d - 1)$ с значений полярной кривизны сортируются по возрастанию и формируют вектор \mathbf{c}_p .
3. **for** $q = 1 : (d + 1)$ **do**
 - Используется (2.3.21) с $\sigma = \mathbf{c}_p \cdot (N \cdot c / K^q)$ для вычисления c выбранных столбцов \mathbf{A} . Используя эти c столбцов формируется матрица $\mathbf{A}_c \in \mathbb{R}^{N \times c}$ (2.3.24).
 - Вычисляется матрица $\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{A}_c (\mathbf{A}_c^T \mathbf{1}))$, где $\mathbf{1}$ – вектор из единиц. Эта матрица используется для нормировки матрицы \mathbf{A}_c : $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{A}_c$.
 - Формируется матрица \mathbf{U} , столбцы которой – K старших левых сингулярных векторов $\tilde{\mathbf{A}}_c$.
 - Эти (найденные) выборки используются для группировки векторов набора \mathbb{X} в K поднаборов, и вычисляется соответствующая ошибка e_{OLS} (2.3.25).

end for. Регистрируются K поднаборов $\mathbb{C}_1, \dots, \mathbb{C}_K$ набора \mathbb{Z} , которые соответствуют наименьшей ошибке e_{OLS} (2.3.25) в приведённом выше цикле.

4. Из каждого найденного \mathbb{C}_k , $k = \overline{1, K}$ выбираются вектора в пределах небольшой полосы вокруг каждой из их OLS-аппроксимирующих d -мерных аффинных подпространств \mathbb{F}_k , $k = \overline{1, K}$, и выполняются шаги 2 и 3, чтобы найти K новые выборки. Итерации повторяются до достижения сходимости.

Рис. 25: Алгоритм спектрального разбиения с матрицей близости (подобия) на основе полярной кривизны

В следующей главе траектории одной из выборок, полученной в результате первичного разбиения исходного набора траекторий по методу полиномиальных регрессий [64], разбиваются на подвыборки описанным выше методом с помощью алгоритма спектральной кластеризации (см. Рис. 25) с тензором близости (подобия) на основе полярной кривизны (2.3.20). Полученные подвыборки соответствуют пучкам траекторий, приземлившихся на заданные взлётно-посадочные полосы.

Восстановление двух первых столбцов исходных данных после разложения сингулярных чисел (svd-разложения) и сокращение числа сингулярных чисел до двух показано на Рис. 26 (в коде Matlab исходные данные – переменная X).

```
[N,D] = size(X);
[U,S] = svds(X - repmat(mean(X,1),N,1),6);
data = U(:,1:2).*repmat(transpose(diag(S(1:2,1:2))),N,1);
```

Рис. 26: Восстановленных исходных данных после разложения сингулярных чисел и сокращение их числа до двух

Выделение пучков траекторий спектральным методом

В результате применения описанного выше метода к набору x -проекций посадочных траекторий самолётов точно выделяются пучки траекторий, соответствующие посадкам на заданные взлётно-посадочные полосы. На Рис. 27 показано разбиение x -компонент траекторий выборки (представленной на Рис. 14) на подвыборки, выполненное алгоритмами SCC [78]. Заданная внутренняя раз мерность аффинных подпространств для алгоритма SCC $d = 5$. На Рис. 27 (а) разбиение анализируемой выборки алгоритмом SCC показано в координатах двух первых столбцов восстановленных данных (см. Рис. 26). В результате разбиения выделяются пучки траекторий, представленные на Рис. 27 (б) красным, синим и зелёным цветом. В выделенных пучках траекторий с помощью марковской модели непрерывного скрытого профиля определяются центроиды и выбросы – траектории пучка, наиболее удалённые от выделенного центроида по мере косинуса.

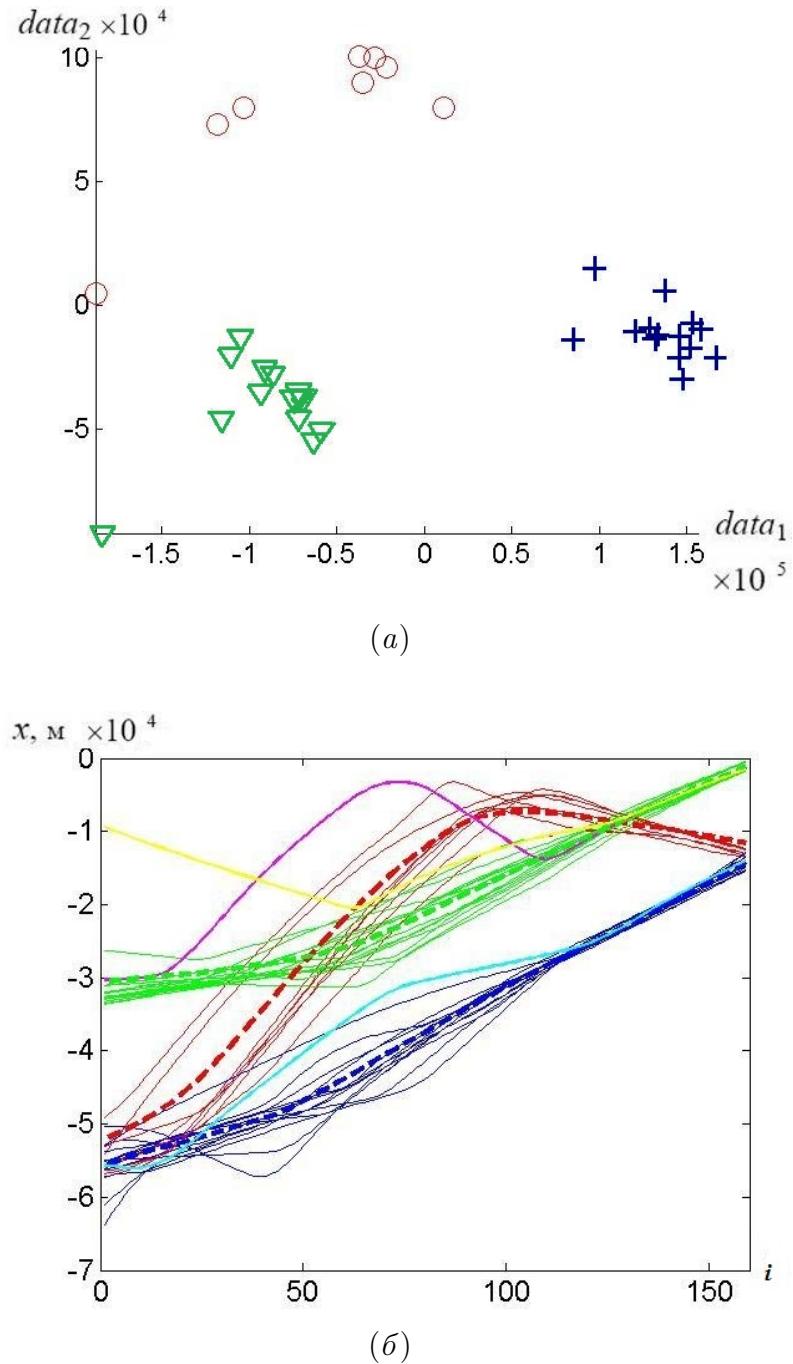


Рис. 27: Выделение пучков траекторий спектральным методом с помощью алгоритма SCC на примере x -проекций траекторий выборки, представленной на Рис. 14

При разбиении анализируемая выборка траекторий (многомерных векторов) моделируется объединением d -мерных аффинных (линейных) подпространств. При этом учитывается не бинарное, а d -арное подобие, и принадлежность рассматриваемых траекторий (многомерных векторов) к подвыборке оценивается (многомерным) тензором близости порядка $(d + 2)$, который разворачивается в

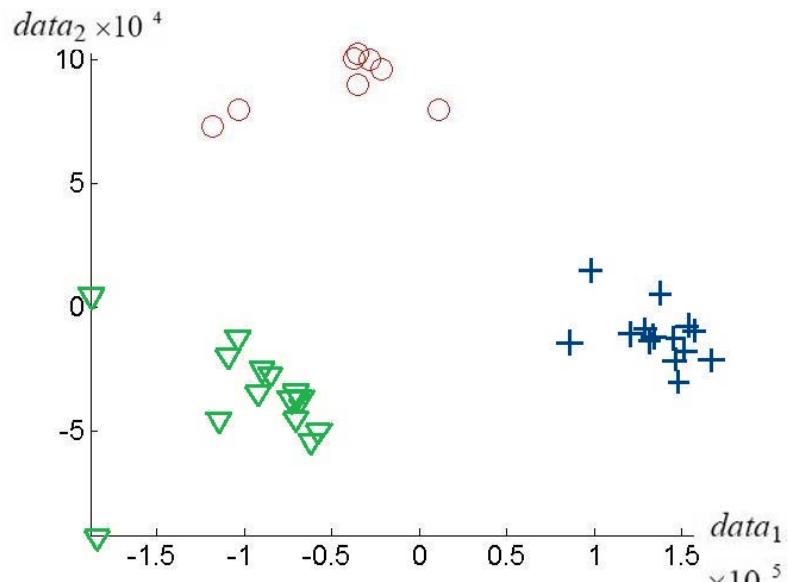
матрицу близости (подобия) векторов, обеспечивая эффективное использование спектрального метода.

Стоить заметить, что алгоритм SCC ошибочно относит розовую траекторию к красному пучку, и в этой подвыборке по мере косинуса она оказывается кандидатом на выброс. В результате нормальная траектория зеленого пучка идентифицируется, как посторонняя (показана желтым цветом). В синем пучке голубым цветом показан выброс. Полученные результаты могут быть улучшены – при использовании линейной модификации спектрального метода – алгоритма LSCC (Linear Spectral Curvature Clustering).

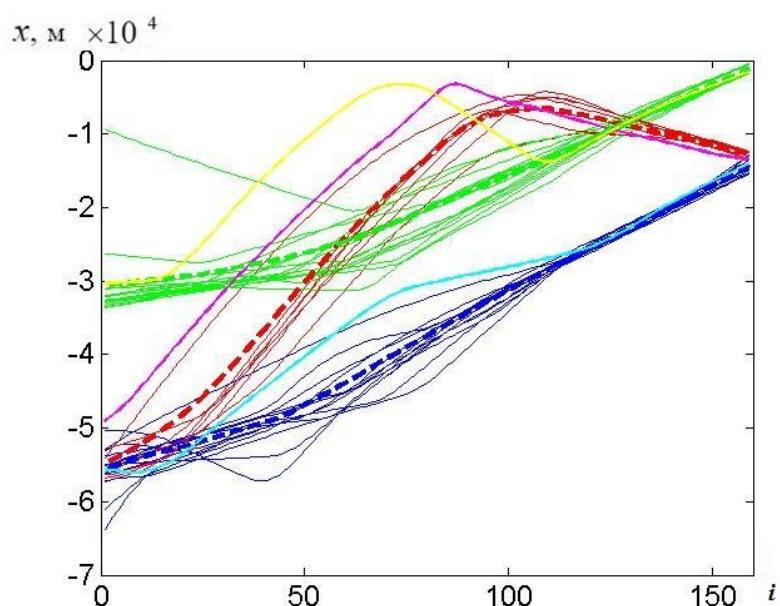
Анализируемые в настоящей работе посадочные траектории самолётов имеют ряд особенностей, таких как кривизна, множественные пересечения и наличие почти линейных участков, которые необходимо учитывать при выделении пучков траекторий. В линейном спектральном методе разбиения (LSCC) предполагается, что все рассматриваемые подпространства линейные. При этом, спектральная кривизна вычисляется при рассмотрении любых $d + 1$ точек. Это упрощает SCC-алгоритм, описанный в Главе 2.3.3, поскольку вычисляемый тензор близости имеет порядок $d + 1$. Более того, результаты разбиения, полученные с помощью алгоритма SCC, могут быть улучшены, поскольку, новая матрицы \mathbf{A} имеет меньше столбцов, и $d + 1$ точек могут принадлежать одному линейному подпространству. Это исключает неблагоприятную маленькую кривизну для $d + 2$ точек в афинном подпространстве (в случае SCC-алгоритма).

Разбиение, полученное с помощью LSCC-алгоритма, показано на Рис. 28 (а) в координатах двух первых столбцов данных, восстановленных после разложения сингулярных чисел (svd-разложения) для исходных данных и редуцирования числа сингулярных чисел до двух. На Рис. 28 (б) представлены результаты секторизации в двумерном случае, полученные с помощью алгоритма LSCC.

При сравнении результатов, представленных на Рис. 27 и 28 видно, что оба алгоритма (SCC и LSCC) дают практически идентичный результат, за исключением одной траектории, которая в первом случае относится к красному



(a)



(б)

Рис. 28: Выделение пучков траекторий спектральным методом с помощью алгоритма LSCC на примере x -проекций траекторий выборки, представленной на Рис. 14

пучку, а во втором – к зелёному. Как видно на Рис. 27 (б) в красном пучке эта траектория оказывается выбросом и показана розовым цветом на Рис. 28 (б). В следствие этой ошибки нормальная траектория зелёного пучка идентифицируется как посторонняя (выделена жёлтым цветом на Рис. 27 (б)). LSCC-алгоритм правильно относит эту траекторию к зеленому пучку, в котором она является выбросом (показана жёлтым цветом на Рис. 28 (г)).

Сектора, выделяемые с помощью алгоритма LSCC, соответствуют траекториям посадки на заданные взлётно-посадочные полосы. Данный метод может быть использован при решении задачи секторизации в двумерном случае, если число пучков, содержащихся в выборке, известно заранее.

2.4 Алгоритм разбиения воздушного пространства зоны аэропорта на сектора (секторизация воздушного пространства в двумерном случае)

Результаты разбиения x -проекций траекторий выборки показывают, что в двумерном случае возможно точное решение задачи секторизации воздушного пространства. Если априори известно число пучков, содержащихся в рассматриваемой выборке, то в двумерном случае данная задача решается с помощью алгоритма, представленного на Рис. 29, который состоит из четырёх шагов.



Рис. 29: Алгоритм секторизации пространства в двумерном случае

1 шаг. На первом шаге происходит существенное сокращение данных за счёт рассмотрения одной из проекций траекторий на оси координат.

2 шаг. На втором шаге алгоритм линейной спектральной кластеризации используется для выделения пучков траекторий в плоском случае. При ис-

пользовании этого алгоритма требуется задание числа пучков, содержащихся в рассматриваемой выборке траекторий.

3 шаг На третьем шаге в выделенных пучках траекторий возможно определение центральных траекторий. Например, как это делается в примере, рассматриваемом в главе 2.3, с помощью Марковской модели непрерывного скрытого профиля (алгоритма СРМ, описанного в главе 2.2.3).

4 шаг На четвёртом шаге определяется траектория, потенциально находящаяся в зоне риска. Эта траектория наиболее удалена по мере косинуса от выделенного на Шаге 3 центроида.

Данный алгоритм позволяет решить задачу секторизации в двумерном случае, однако он требует предварительного знания числа пучков.

Выводы по Главе 2

1. На основе комплексного анализа широко известных методов data mining предложен способ разбиения воздушного пространства зоны аэропорта на сектора (секторизации воздушного пространства) в плоском случае, новизна которого состоит в применении спектрального метода с использованием полярной кривизны для разбиения набора посадочных траекторий самолётов на сектора и использовании меры косинуса для определения граничных траекторий сектора. Результаты применения способа демонстрируются на примере обработки данных посадочных траекторий, зарегистрированных радиолокационной системой TRACON (terminal radar approach control) 1 января 2006 г. над заливом Сан-Франциско и находящихся в свободном доступе.

Глава 3. Разработка основанных на применении меры косинуса алгоритмов анализа многомерных временных рядов, представленных четырёхмерны- ми посадочными траекториями самолётов, в трёх- мерном случае

В настоящей главе рассматривается метод, позволяющий получать устойчивое разбиение анализируемых наборов посадочных траекторий на асимптотически сходящиеся пучки. Пучки траекторий выделяются на основании близости по мере косинуса траекторий рассматриваемой выборки к выделенным асимптотам траекторий. Оценка асимптот траекторий происходит при сокращении размерности данных – рассмотрении двумерной ортогональной проекции рассеянных данных. Оценка асимптот траекторий происходит при определении наиболее правдоподобной ортогональной линейной регрессии «рассеянных» данных алгоритмом RANSAC. Результаты, представленные в настоящей главе, опубликованы в [185, 186]. Предлагаемый авторский алгоритм запатентован [187–190].

3.1 Определение характерной геометрической асимптоты многомерных траекторий движения с заданным па- метром порога

Особенностью рассматриваемых пучков траекторий является то, что все они имеют характерную геометрическую асимптоту в области сходимости траекторий (1.3.1) [68]. Поскольку дискретные точки траекторий пучка плотно лежат в окрестности асимптоты, основа предлагаемого метода для оценки асимптот пучков траекторий состоит в том, что набор векторов выборки многомерных траекторий $\{\mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^{3 \times L}, n = \overline{1, N_k}\}$ рассеивается во множество точек этих траекторий

$$\{\mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^{3 \times L}, n = \overline{1, N_k}\} \Rightarrow \{(x_n[i], y_n[i], z_n[i]) \in \mathbb{R}^3, i = \overline{1, L}, n = 1, N_k\}. \quad (3.1.1)$$

Множество точек (3.1.1) должно быть упорядочено по значениям одной из координат (в направлении возрастания – *ascend* или убывания – *descend*). При этом происходит упорядочение по остальным координатам всех точек, представляющих сходящийся пучок траекторий движения по определённому профилю. После этого для «рассеянных» в результате такого упорядочения трёхмерных данных $\{Z_j = (x_j, y_j, z_j), j = \overline{1, L \cdot N_k}\}$ (3.1.1) с помощью алгоритма RANSAC (Random Sample and Consensus – случайная выборка и консенсус) [191, 192] анализируются модели ортогональной линейной регрессии

$$\mathfrak{M}(\boldsymbol{\theta}) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1^*x + b_1^*y + c_1^*z = d_1^*) \wedge (a_2^*x + b_2^*y + c_2^*z = d_2^*) \right\}, \quad (3.1.2)$$

\wedge – конъюнкция, $\boldsymbol{\theta} = \{a_1^*, b_1^*, c_1^*, d_1^*, a_2^*, b_2^*, c_2^*, d_2^*\}$ – вектор параметров этих моделей при заданном пороге евклидового расстояния $\rho_{\perp}(Z_j, \mathfrak{M}(\boldsymbol{\theta}))$, вычисляемого по ортогональной проекции точки $Z_j = (x_j, y_j, z_j)$ из (3.1.1) на линию $\mathfrak{M}(\boldsymbol{\theta})$. Таким образом модель (3.1.2) симметрична относительно координат x, y, z . Для выдвижения гипотезы относительно модели ортогональной линейной регрессии (3.1.2) достаточно любой пары точек из (3.1.1). Окончательная модель (3.1.2) подтверждается наибольшим относительным количеством (процентом) «рассеянных» данных $\{Z_j = (x_j, y_j, z_j), j = \overline{1, L \cdot N_k}\}$ (3.1.1). В настоящей работе используется алгоритм MLESAC (Maximum Likelihood Estimation Sample Consensus – консенсус выборок с оценкой по максимуму правдоподобия) [193, 194] – вероятностная версия алгоритма RANSAC. Этот алгоритм оценивает правдоподобие модели (3.1.2), представляя распределение расстояния «рассеянных» данных $\mathbb{Z} = \{Z_j = (x_j, y_j, z_j), j = \overline{1, L \cdot N_k}\}$ от модели $\mathfrak{M}(\boldsymbol{\theta})$ (3.1.2), как смесь распределения данных, подтверждающих модель (3.1.2) (*inliers*), и распределения данных, отклоняющих эту модель (*outliers*). Считая, что «рассеянные» данные \mathbb{Z} (3.1.1) независимые, получаем выражение для логарифма правдоподобия в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left(\rho_{\perp} (\mathbb{Z}, \mathfrak{M}(\boldsymbol{\theta})) \mid \boldsymbol{\theta} \right) &= \\ &= \sum_{j=1}^{L \cdot N_k} \log \left(\gamma p \left(\rho_{\perp} (Z_j, \mathfrak{M}(\boldsymbol{\theta})) \mid Z_j \text{ is inlier} \right) + (1 - \gamma) p \left(\rho_{\perp} (Z_j, \mathfrak{M}(\boldsymbol{\theta})) \mid Z_j \text{ is outlier} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

где γ – параметр смещивания. Распределение расстояний до данных, подтверждающих модель (3.1.2), представляется гауссовым распределением

$$p \left(\rho_{\perp} (Z_j, \mathfrak{M}(\boldsymbol{\theta})) \mid Z_j \text{ is inlier} \right) \propto \exp \left(-\frac{(\rho_{\perp} (Z_j, \mathfrak{M}(\boldsymbol{\theta})))^2}{2\sigma^2} \right), \quad (3.1.4)$$

где σ – стандартное отклонение. Распределение расстояния до данных, отклоняющих модель (3.1.2), описывается равномерным распределением

$$p \left(\rho_{\perp} (Z_j, \mathfrak{M}(\boldsymbol{\theta})) \mid Z_j \text{ is outlier} \right) = \begin{cases} (2\rho_{max})^{-1}, & \rho_{\perp} (Z_j, \mathfrak{M}(\boldsymbol{\theta})) < \rho_{max}, \\ 0, & \rho_{\perp} (Z_j, \mathfrak{M}(\boldsymbol{\theta})) \geq \rho_{max}, \end{cases} \quad (3.1.5)$$

где ρ_{max} – наибольшее расстояние до данных (определяется контекстом). Минимизация логарифма правдоподобия (3.1.3) позволяет оценить вектор параметров $\boldsymbol{\theta}$ и параметр смещивания γ . Это обеспечивается итерациями ЕМ-алгоритма [108].

Определённая таким образом наиболее правдоподобная линейная регрессия «рассеянных» данных выборки траекторий определяет геометрическую асимптоту $\mathfrak{M}(\boldsymbol{\theta})_k$, $k = \overline{1, K}$ (3.1.2) одного из пучков при условии (1.3.1).

Для структуры `trajs` размерности `size(trajs,1) × size(trajs,2) × size(trajs,3)`, представляющей набор трёхмерных траекторий рассматриваемой выборки, «рассеянные» данные (3.1.1) Data являются результатом кода на Matlab (см. Рис. 30). На Рис. 31 (a) показаны «рассеянные» данные (3.1.1) `Data(:,1:2)` двумерных проекций `trajs(:,:,1:2)` траекторий рассматриваемой выборки и результат их линейной регрессии с использованием алгоритма MLESAC (Рис. 31), определяющий асимптоту первого пучка (голубая линия) (см. Рис. 31).

После выделения асимптоты касательный ей пучок траекторий определяется

```
% рассеяние данных
Data = zeros(size(trajs,2),size(trajs,3));
for k = 1:size(trajs,1),
    Data = [Data; squeeze(trajs(k,:,:))];
end;
% сортировка рассеянных данных
[~,Isort] = sort(Data(:,1),1,'ascend');
Data = Data(Isort,:,:);
```

Рис. 30: Пример кода на Matlab для получения «рассеянных» данных траекторий

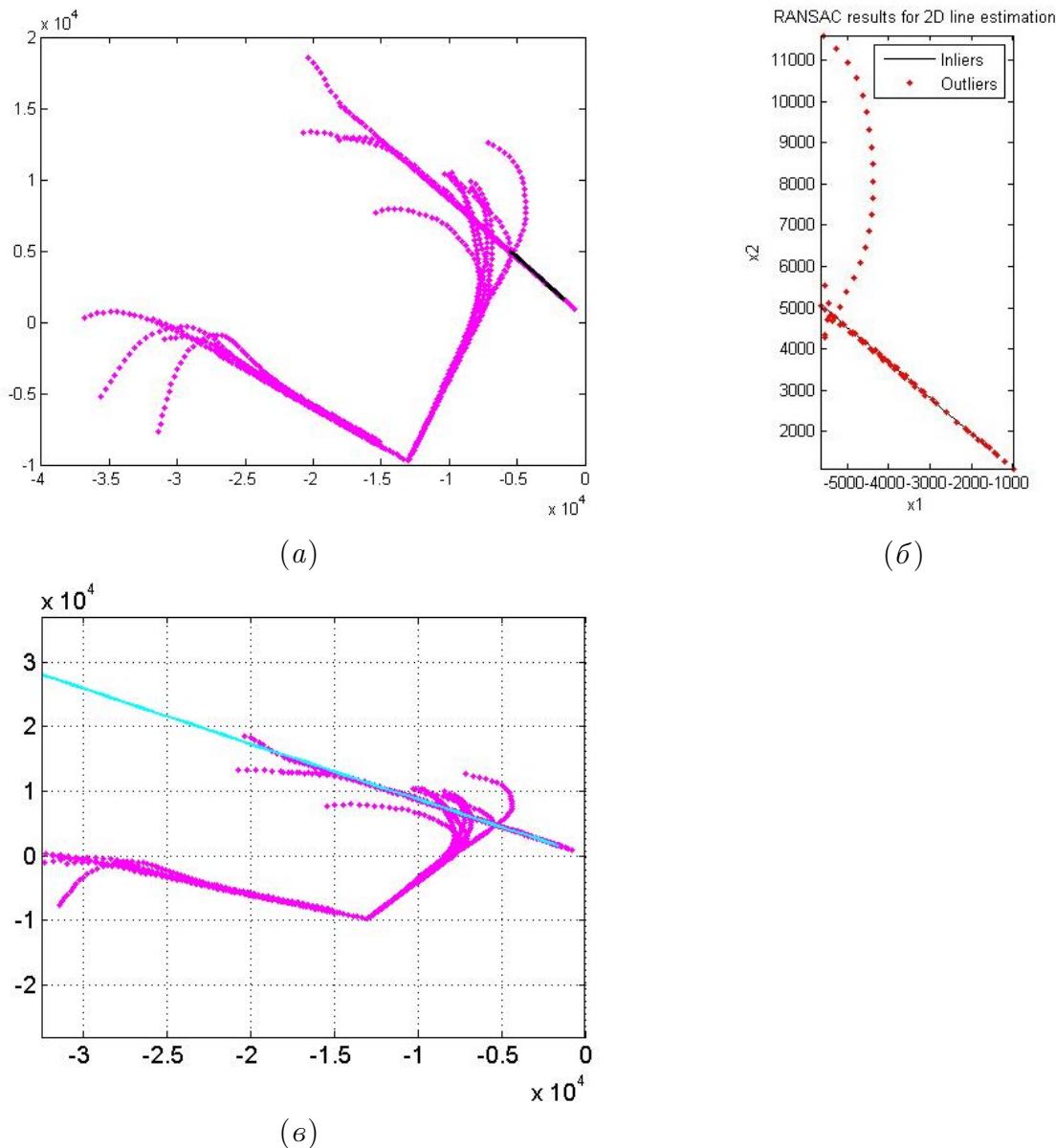


Рис. 31: Иллюстрация этапов определения геометрической асимптоты пучка траекторий, которая определяется наиболее правдоподобной линейной регрессией данных

на основе однократного применения формулы (1.3.9) с мерой косинуса (1.3.7) (см. раздел 1.3). После удаления из «рассеянных» данных (3.1.1) тех точек, которые

представляют траектории выделенного пучка, повторяется процедура определения геометрической асимптоты и выделяется следующий пучок траекторий. Поскольку определение модели (3.1.2) должно быть симметричным относительно координат x, y, z , при формировании «рассеянных» данных оставшихся траекторий в (3.1.1) производится сортировка по очередной пространственной координате отличной от использованной в (3.1.1) при определении предыдущей асимптоты (3.1.2). Возможная зависимость результата (3.1.2) от направления координат устраняется изменением направления сортировки в (3.1.1) с возрастания на убывание или наоборот. Анализ траекторий выборки завершается определением всех пучков в выборке.

Множественные пересечения и наличие почти линейных участков в хвостах пучков траекторий вдали от фокуса может препятствовать непосредственному определению асимптот сходящихся пучков по методу, описанному выше. В таком случае при анализе траекторий рассматриваемой выборки используются «рассеянные» данные сокращённых траекторий с частью точек $quatum \approx 0.4$, считая от фокусов пучков.

Так, например, на Рис. 32, *a* показаны «рассеянные» данные (3.1.1) $Data(:,1:2)$ двумерных проекций $trajs(:,:,1:2)$ полных траекторий выборки и результат их линейной регрессии с использованием алгоритма MLESAC, определяющего асимптоту первого пучка (голубая линия). В этом случае результаты линейной регрессии «рассеянных» данных сокращённых и полных траекторий совпадают.

Траектории первого пучка удаляются из рассматриваемой выборки на основе близости траекторий к голубой асимптоте (см. Рис. 32, *б*) по мере косинуса (1.3.7). Затем поиск асимптоты повторяется, и определяется новый пучок. В результате последовательных итераций выделяется все пучки траекторий в выборке (см. Рис. 35, *a*) в трехмерном случае.

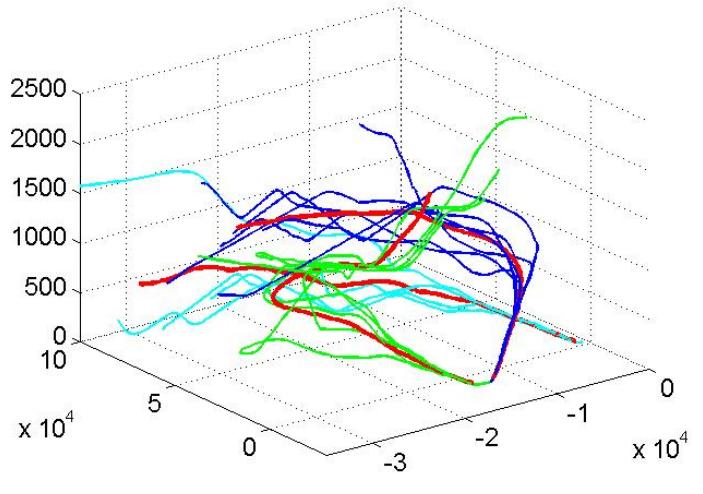
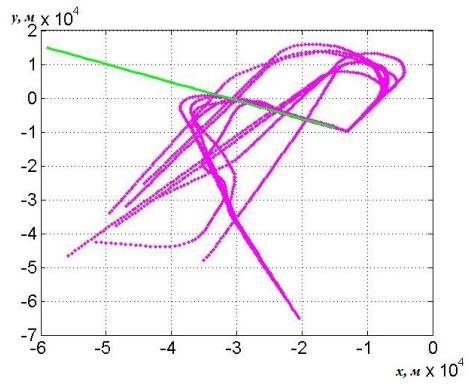
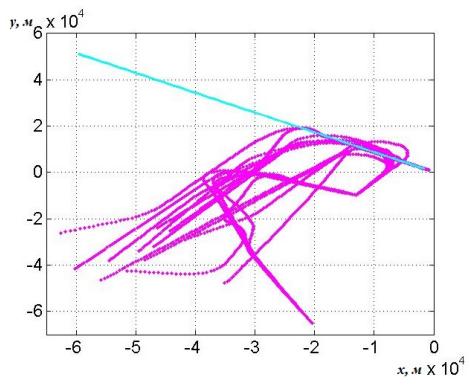
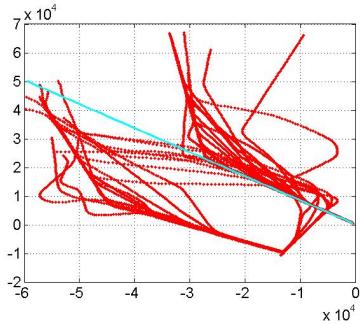
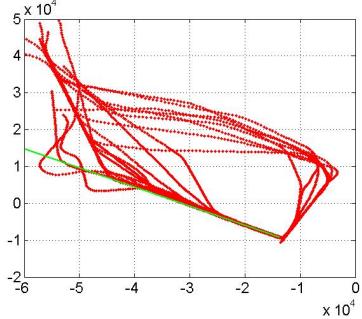


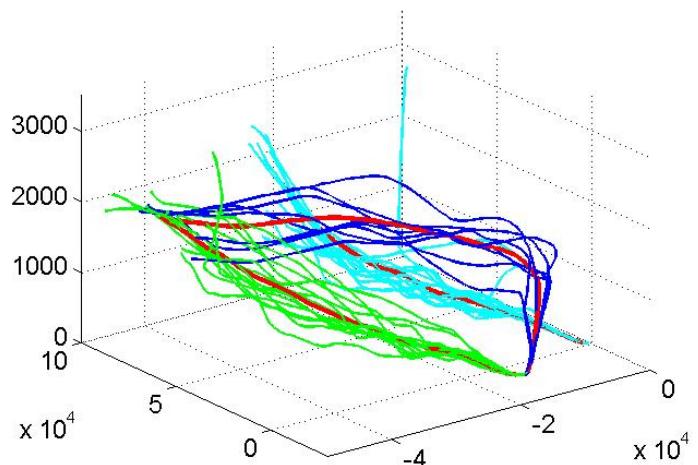
Рис. 32: Траектории выборки, представленной на Рис. 13.
а,б – «рассеянные» данные траекторий и их линейные регрессии;
в – три выделенных пучка траекторий



(а)



(б)



(в)

Рис. 33: Траектории выборки, представленной на Рис. 14.
а,б – «рассеянные» данные траекторий и их линейные регрессии;
в – три выделенных пучка траекторий

3.2 Алгоритм устойчивого разбиения набора траекторий на пучки траекторий, асимптотически сходящиеся с заданным параметром порога (секторизация воздушного пространства в трёхмерном случае)

Представленные результаты показывают, что поставленная задача секторизации воздушного пространства в трёхмерном случае на основании анализа посадочных траекторий самолётов, может быть решена с помощью алгоритма, состоящего из семи шагов (см. Рис. 34).



Рис. 34: Алгоритм устойчивого разбиения выборки посадочных траекторий на пучки

Шаг 1. На первом шаге выполняется сокращение размерности рассматриваемых данных. Для этого исходный набор траекторий рассматриваемой выборки рассеивается во множество точек, представлявших траектории выборки.

Шаг 2. На втором шаге формируется двумерная ортогональная проекция набора рассеянных точек, необходимая для последующей оценки асимптот пучков траекторий.

Шаг 3. На третьем шаге происходит упорядочение (сортировка) точек сформированной проекции по значениям одной из координат (в направлении возрастания или убывания). При этом автоматически происходит упорядочение по остальным координатам всех точек.

Шаг 4. На четвёртом шаге с помощью алгоритма RANSAC анализируются модели ортогональной линейной регрессии «рассеянных данных» и с помощью алгоритма MLESAC выполняется оценка правдоподобия получаемых моделей. Наиболее правдоподобная ортогональная линейная регрессия данных, определяемая на данном шаге, подтверждается наибольшим относительным количеством (процентом) «рассеянных данных».

Шаг 5. На пятом шаге происходит определение геометрической асимптоты выделяемого пучка траекторий. Геометрическая асимптота первого пучка траекторий совпадает с определённой на предыдущем шаге наиболее правдоподобной моделью ортонональной линейной регрессии данных. Полученная на данном шаге асимптота удовлетворяет условию асимптотического схождения пучка, задаваемому параметром порога (параметр порога в рассматриваемой задаче не превышает ширины взлётно-посадочной полосы).

Шаг 6. На шестом шаге происходит возвращение в исходное пространство данных, и в исходном трёхмерном пространстве выделяется пучок траекторий. Выделение пучка траекторий происходит по мере близости траекторий выборки к выделенной геометрической асимптоте. В качестве меры близости используется мера косинуса. Таким образом выделяется пучок многомерных посадочных траекторий самолётов, касательный выделенной на шаге 5 геометрической асимптоте.

Шаг 7. На седьмом шаге выделенный пучок траекторий удаляется из рассматриваемой выборки, и происходит возвращение к шагу три. Далее все пучки траекторий, содержащиеся в выборке, выделяются последовательно.

Данный алгоритм позволяет последовательно выделить в рассматриваемой выборке все асимптотически сходящиеся с параметром порога пучки многомерных траекторий, соответствующие посадкам на заданные взлётно-посадочные полосы (ВПП). Параметр порога определяется шириной ВПП. Получаемое разбиение является устойчивым и не требует никакого предварительного знания о числе пучков, содержащихся в выборке.

3.3 Оптимизационная задача с ограничениями по определению центроида для выделенного пучка многомерных траекторий движения

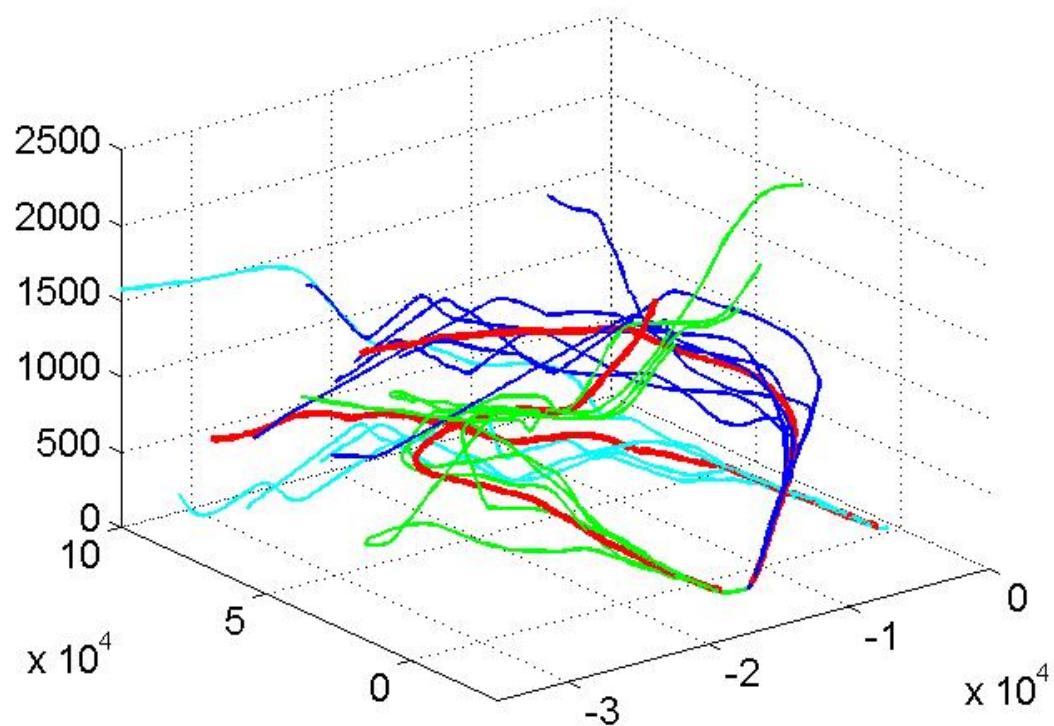
После того, как точно выделены пучки траекторий \mathbb{C}_k , их центроиды $\{\mathbf{C}_k, k = \overline{1, K}\}$ определяются по схеме $\mathbb{C}_k \Rightarrow \mathbf{C}_k, k = \overline{1, K}$ на основе однократного применения формулы

$$\{\langle \mathbf{C}_k \rangle, k = \overline{1, K}\} = \arg \min_{\{\mathbf{C}_k, k = \overline{1, K}\}} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K r_{nk} \rho_{\text{cosine}}^2 (\mathbf{X}_n, \mathbf{C}_k) \quad (3.3.1)$$

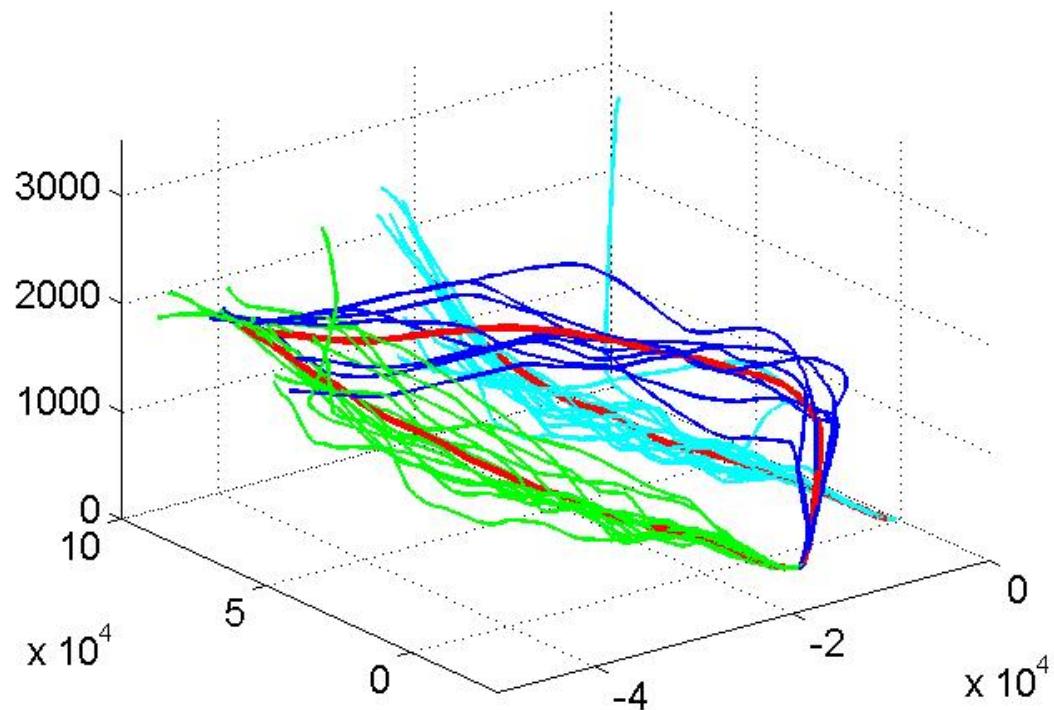
при условии (1.3.4) с использованием квадрата меры косинуса (1.3.7).

Оценка (3.3.1) эффективна при представлении векторов $\{\mathbf{X}_n, n = \overline{1, N}\}$ и $\{\mathbf{C}_k, k = \overline{1, K}\}$ в исходном пространстве состояний.

На Рис. 35 красными жирными линиями отмечены центроиды, определённые для выделенных пучков траекторий выборок, представленных на Рис. 13 и 14. Траектория, определённая таким образом может рассматриваться в качестве характерной (опорной) траектории пучка.



(a)



(б)

Рис. 35: Центроиды выделенных пучков траекторий анализируемых выборок
(выделены красным)

3.4 Алгоритм определения характерной (опорной) траектории посадки – центроида для выделенного пучка многомерных траекторий движения

Представленные результаты показывают, что поставленная задача определения характерной (опорной) траектории посадки при анализе посадочных траекторий самолётов, может быть решена с помощью алгоритма, состоящего из трёх шагов (см. Рис. 36).

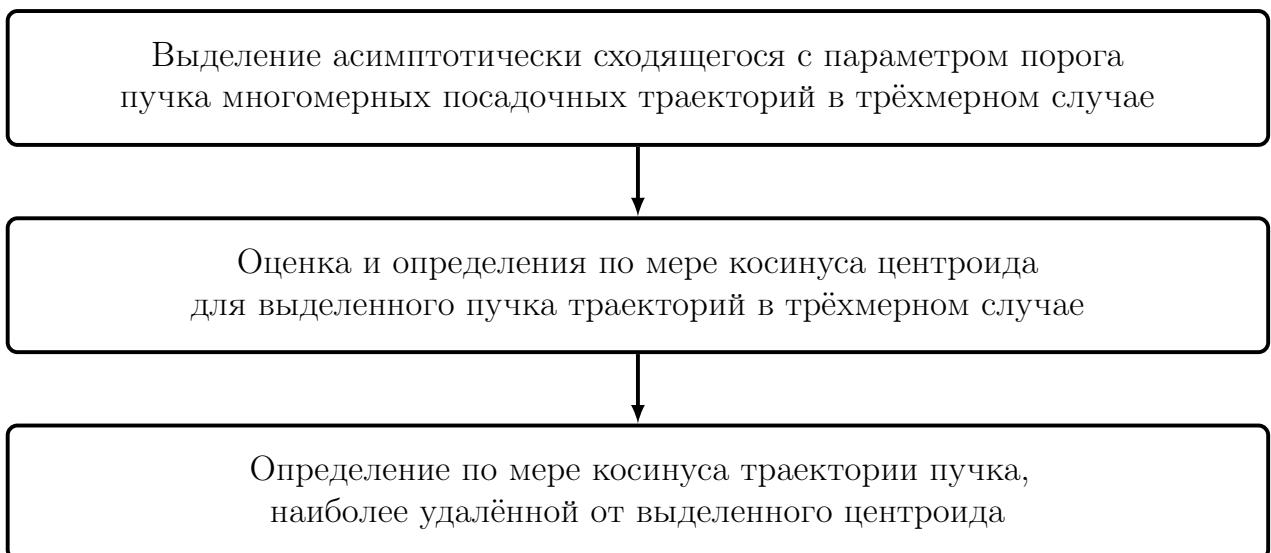


Рис. 36: Алгоритм определения центроида – характерной траектории посадки

Шаг 1. На первом шаге выделяется пучок траекторий, соответствующий посадкам самолётов на выделенную взлётно-посадочную полосу, траектории в котором асимптотически сходятся с параметром порога.

Шаг 2. На втором шаге в выделенном пучке траекторий при решении оптимизационной задачи определяется центральная траектория, называемая в контексте работы центроидом. В трёхмерном случае данная траектория может рассматриваться как характерная (опорная) траектория посадки. Суммарное среднеквадратичное расстояние от выделенной траектории до всех траекторий в пучке – минимально. Получение данного результата возможно благодаря использованию в качестве меры близости меры косинуса, которая учитывает осо-

бенности геометрии многомерных посадочных траекторий самолётов – кривизну, кручение и множественные пересечения.

Шаг 3. На третьем шаге по мере косинуса определяется траектория пучка, наиболее удалённая от выделенного центроида по мере косинуса. При решении задач безопасности можно говорить, что выделенная траектория представляет движение в зоне риска.

Выводы по Главе 3

1. Предложен оригинальный способ устойчивого разбиения набора многомерных посадочных траекторий самолётов на пучки траекторий, соответствующих посадкам на заданные взлётно-посадочные полосы (ВПП), в трёхмерном случае. Рассматриваемые пучки траекторий являются асимптотически сходящимися с заданным параметром порога, который определяется шириной ВПП. Точный результат разбиения достигается благодаря использованию алгоритма RANSAC при сокращении размерности данных и использовании меры косинуса в качестве меры близости траекторий при переходе в пространство исходной размерности. Предлагаемый способ позволяет точно решать задачу секторизации воздушного пространства расширенной зоны аэропорта в трёхмерном случае. Результаты демонстрируются на примере выделения пучков траекторий в выборке траекторий, зарегистрированных радаром TRACON.
2. Предложен способ определения характерной (опорной) траектории посадки самолёта – центроида для выделенного пучка многомерных пространственных траекторий. Результат, полученный при решении оптимизационной задачи с ограничениями, является устойчивым благодаря использованию в качестве меры близости пространственных траекторий меры косинуса, которая учитывает особенности пространственной геометрии многомерных траекторий движения – кривизны, кручения и множественных пересечений. Полученный результат демонстрируется на примере анализа реальных данных и может быть использован при решении практических задач.

Заключение

В результате проделанной работы:

1. Предложен способ разбиения воздушного пространства зоны аэропорта на сектора (секторизация пространства) в плоском случае.
2. Предложен способ устойчивого разбиения набора траекторий на пучки траекторий, асимптотически сходящиеся с заданным параметром порога, в трёхмерном случае.
3. Предложен способ определения характерной (опорной) траектории посадки – центроида для выделенного пучка многомерных траекторий движения в трёхмерном случае.

Полученные результаты позволяют решать задачу секторизации воздушного пространства расширенной зоны аэропорта на реальных данных. То есть можно констатировать, что заявленная научная задача решена.

Список литературы

1. Wensveen J. Air transportation: A management perspective. — Routledge, 2016.
2. Veresov K. A., Degtyarev O. V., Minaenko V. N. Solution of sectorization problems for air traffic control area. III. Algorithm for determining configurations and schedule for traffic control sectors // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. — 2013. — Vol. 52, no. 2. — Pp. 293–312.
3. Дивак Н.И. К вопросу о разработке новой структуры воздушного пространства московской воздушной зоны // *Научный вестник МГТУ ГА*. — 2014. — № 209. — С. 67–71.
4. Xue M. Design Analysis of Corridors-in-the-sky // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference / AIAA. — Reston, VA: 2009. — Pp. 1–11.
5. Salaun E., et al. Aircraft proximity maps based on data-driven flow modeling // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. — 2012. — Vol. 35, no. 2. — Pp. 563–577.
6. Zhang Y., Shortle J., Sherry L. Methodology for collision risk assessment of flow corridor concept // Proceedings of the Integrated Communication, Navigation, and Surveillance Conference (ICNS) / IEEE. — Herndon, VA: 2013. — Pp. 1–8.
7. Nakamura Y., Takeichi N., Kageyama K. A Self-separation Algorithm using Relative Speed for a High-density Air Corridor // *Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*. — 2014. — Vol. 57, no. 6. — Pp. 336–342.
8. Zhang Y., Shortle J., Sherry L. Methodology for Collision Risk Assessment of an Airspace Flow Corridor Concept // *Reliability Engineering & System Safety*. — 2015. — October. — Vol. 142. — Pp. 444–455.
9. Bureau Japan Civil Aviation. Long-term Vision for the Future Air Traffic Systems (CARATS). — 2010.

10. A comparison of 4D-trajectory operations envisioned for Nextgen and SESAR, some preliminary findings / ICAS. — 2012.
11. A comparison of the two arrival traffic synchronization concepts envisioned for NEXTGEN AND SESAR. / ICAS. — 2014.
12. *Degtyarev O. V., Minaenko V. N., Orekhov M. O.* Solution of sectorization problems for an air traffic control area. I. Basic principles and questions of airspace sectorization and its formalization as an optimization problem // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. — 2009. — Vol. 48, no. 3. — Pp. 384–400.
13. *Degtyarev O. V., Minaenko V. N., Orekhov M. O.* Solution of sectorization problems for an air traffic management area. II. Development of sectorization algorithms // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. — 2010. — Vol. 49, no. 4. — Pp. 624–642.
14. A weighted-graph approach for dynamic airspace configuration / American Institute of Aeronautics and Astronautics. — 2007.
15. *Kostitsyna I., Mitchell J.* Local Redesigning of Airspace Sectors // *arXiv preprint arXiv:1302.1089*. — 2013.
16. *Xue M.* Three-dimensional sector design with optimal number of sectors // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. — 2012. — Vol. 35, no. 2. — Pp. 609–618.
17. 3D Sectors Design by Genetic Algorithm Towards Automated Sectorisation. — Bologna, Italy, 2015.
18. Aircraft trajectory clustering techniques using circular statistics. — Yellowstone Conference Center, Big Sky, Montana, 2016. IEEE.
19. *Wilson A., Rintoul M., Valicka C.* Exploratory Trajectory Clustering with Distance Geometry // International Conference on Augmented Cognition / Springer. — 2016. — Pp. 263–274.

20. Wei J., et al. Design and Evaluation of a Dynamic Sectorization Algorithm for Terminal Airspace // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. — 2014. — Vol. 37, no. 5. — Pp. 1539–1555.
21. Gariel M., Srivastava A., Feron E. Trajectory clustering and an application to airspace monitoring // *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*. — 2011. — Vol. 12, no. 4. — Pp. 1511–1524.
22. Li Z., et al. Incremental clustering for trajectories // *Database Systems for Advanced Applications. Lecture Notes in Computer Science*. — 2010. — Vol. 5982. — Pp. 32–46.
23. Laxhammar R., Falkman G. Online learning and sequential anomaly detection in trajectories // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. — 2014. — Vol. 36, no. 6. — Pp. 1158–1173.
24. Lowe C.D. Predicting Pilot Intent and Aircraft Trajectory in Uncontrolled Airspace: Ph.D. thesis / Massachusetts Institute of Technology (MIT). — Cambridge, 2014. — June.
25. Liu H., Li J. Unsupervised multi-target trajectory detection, learning and analysis in complicated environments // 2012 21st International Conference on Pattern Recognition (ICPR) / IEEE. — 2012. — Pp. 3716–3720.
26. Bastani V., Marcenaro L., Regazzoni C. Unsupervised trajectory pattern classification using hierarchical Dirichlet Process Mixture hidden Markov model // 2014 IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing (MLSP) / IEEE. — 2014. — Pp. 1–6.
27. Rintoul M., Wilson A. Trajectory analysis via a geometric feature space approach // *Statistical Analysis and Data Mining: The ASA Data Science Journal*. — 2015.
28. Hung C., Peng W., Lee W. Clustering and aggregating clues of trajectories for mining trajectory patterns and routes // *The VLDB Journal—The International Journal on Very Large Data Bases*. — 2015. — Vol. 24, no. 2. — Pp. 169–192.

29. *Enriquez M., Kurcz C.* A Simple and Robust Flow Detection Algorithm Based on Spectral Clustering // International Conference on Research in Air Transportation (ICRAT) / Federal Aviation Administration (FAA) and EUROCONTROL. — Berkeley, CA, USA: 2012. — May 22-25.
30. *Enriquez M.* Identifying temporally persistent flows in the terminal airspace via spectral clustering // Tenth USA/Europe Air Traffic Management Research and Development Seminar (ATM2013) / Federal Aviation Administration (FAA) and EUROCONTROL. — Chicago, IL, USA: 2013. — June 10-13.
31. *Eerland W.J., Box S.* Trajectory Clustering, Modelling and Selection with the focus on Airspace Protection // AIAA Infotech@ Aerospace. — AIAA, 2016. — Pp. 1–14.
32. ICAO Doc 9935 HLSC 2010 / ICAO. — Монреаль, 2010. — 29 марта - 1 апреля. — Доклад.
33. ICAO Doc 8168 PANS-OPS. Производство полетов воздушных судов. II Построение схем визуальных полетов и полетов по приборам, 2007. — 2.
34. Statistical Summary of Commercial Jet Airplane Accidents Worldwide Operations (1959–2013). — Boeing, 2014. — Pp. 10–12, 20. — <http://www.skybrary.aero/bookshelf/books/2990.pdf>.
35. *Albert N., et al.* Method and device for aiding the piloting of an aircraft during a final approach phase, Patent: US 8489261. — 2013.
36. *Choi H. S., et al.* Development of an Aircraft Auto-landing Guidance System using Time Delay Control, and Simulation with Crosswind and Aileron Fault // *Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*. — 2015. — Vol. 58, no. 1. — Pp. 23–29.
37. *Бронников А.М., Бегичев Ю.И., Цупренко К.В.* Адаптивный алгоритм улучшения устойчивости и управляемости самолёта на этапе посадки на палубу // *Известия ЮФУ. Технические науки*. — 2012. — Т. 128, № 3. — С. 196–201.

38. Желонкин М.В., Бондаренко А.А., и др. Методика обучения палубной посадке на пилотажном стенде // *Труды МФТИ*. — 2014. — Т. 6, № 3. — С. 14–19.
39. Takacs R., Freeman G., Connor G. Low visibility landing system and method, Patent: US US8374737. — 2013.
40. Rodionova O. Aircraft trajectory optimization in North Atlantic oceanic airspace: Ph.D. thesis / Université de Toulouse. — 2015.
41. Shinkafi A., Lawson C. Development of a tool to study aircraft trajectory optimisation in the presence of icing conditions // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*. — 2015. — Vol. 229, no. 8. — Pp. 1464–1484.
42. Алешин Б.С., Баженов В.Г., и др. Оценка реализуемости и безопасности траекторий самолета с помощью бортовой математической модели // *Проблемы управления*. — 2013. — Т. 4. — С. 64–71.
43. Суников Ю.А. Метод и модель безопасного захода воздушного судна на посадку на основе построения оптимальной посадочной траектории: Автореферат / Тамбовское высшее военное авиационное училище радиоэлектроники. — Тамбов, 2009.
44. Grevtsov N. Synthesis of control algorithms for aircraft trajectories in time-optimal climb and descent // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. — 2008. — Vol. 47, no. 1. — Pp. 129–138.
45. LaCivita M. Using aircraft trajectory data to infer aircraft intent. Patent: US 8977484. — 2015.
46. Kuchar J. K., Yang L. C. A review of conflict detection and resolution modeling methods // *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*. — 2000. — Vol. 1, no. 4. — Pp. 179–189.
47. Золотухин В.В. Методы теории компромиссных игр в задачах управления воздушным движением: Автореферат / МФТИ. — Москва, 2012.

48. Петров Н.А. Разработка универсального алгоритма разрешения конфликтных ситуаций в воздушном пространстве при полёте магистрального самолёта // *Научный вестник МГТУ ГА*. — 2014. — № 205. — С. 129–136.
49. Баженов В.Г., Кулида Е.Л., Лебедев В.Г. Формирование бесконфликтных траекторий предпосадочного маневрирования с учетом ограничений на маневренные возможности самолета // *Проблемы управления*. — 2012. — Т. 2. — С. 70–75.
50. Баженов С. Г., Егоров Н. А., и др. Управление траекторией и скоростью самолета при заходе на посадку в условиях пересеченной местности // *Проблемы управления*. — 2015. — Т. 2, № 0. — С. 45–51.
51. Yang Y., Zhang J., Cai K. Terminal-Area Aircraft Intent Inference Approach Based on Online Trajectory Clustering. Article ID 671360 // *The Scientific World Journal. Academic Editor Kema Peng. Hindawi Publishing Corporation*. — 2015. — P. 11.
52. Baumgartner T. I., Maeder U. Trajectory prediction for low-cost collision avoidance systems // Digital Avionics Systems Conference, 2009. DASC'09. IEEE/AIAA 28th / IEEE. — 2009. — Pp. 5–8.
53. Maeder U., Morari M., Baumgartner T. Trajectory prediction for light aircraft // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. — 2011. — Vol. 34, no. 4. — Pp. 1112–1119.
54. Berge M. Generalized Arrival Planning, US Patent App. 13/744,918 (US 20140019033 A1). — 2014.
55. Erzberger H. Design principles and algorithms for automated air traffic management // *Knowledge-Based Functions in Aerospace Systems*. — 1995. — Vol. 7. — P. 2.
56. Wang L., Gu Q. Optimization model for sequencing arrival flights on parallel runways // International Conference on Information Science, Electronics and

Electrical Engineering (ISEEE) / IEEE. — Vol. 1. — Sapporo: 2014. — Pp. 489–492.

57. Кухаренко Б.Г., Солнцева-Чалей М.О. Использование методов сокращения фона при сегментировании телеметрических изображений для идентификации групп объектов // *Информационные технологии*. — 2014. — № 2. — С. 3–8.
58. Кухаренко Б.Г., Солнцева-Чалей М.О. Использование методов выделения ярких областей при сегментировании телеметрических изображений для идентификации групп объектов // *Информационные технологии*. — 2016. — Т. 22, № 7. — С. 504–509.
59. Sanford B., Harwood K., et al. Center-TRACON Automation System: Development And Evaluation In The Field // In 38th Annual Air Traffic Control Association Conference Proceedings / ATCA. — Nashville: 1993. — October. — Pp. 238–245.
60. Erzberger H., Davis T., Green S. Design of Center-TRACON Automation System // Proceedings of the AGARD Guidance and Control Panel 56th Symposium on Machine Intelligence in Air Traffic management. — Berlin, Germany: 1993. — Pp. 52–1–52–14.
61. Williams D., Green S. Flight evaluation of Center-TRACON Automation System trajectory prediction process. — National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center, 1998. — July. — NASA/TP-1998-208439.
62. Erzberger H., Green S. En route spacing system and method, Patent: US 6393358 B1. — 2002.
63. Gariel M. Toward a graceful degradation of air traffic management systems: Ph.D. thesis / Georgia Institute of Technology. — 2010.
64. Кухаренко Б.Г., Солнцева М.О. Кластеризация управляемых объектов на основе сходства их многомерных траекторий // *Информационные технологии*. — 2014. — № 5. — С. 3–7.

65. *Johnson W.W.* On Singular Solutions of Differential Equations of the First Order // *The Annals of Mathematics*. — 1887. — Vol. 3, no. 2. — Pp. 33–38.
66. *Griffiths P., Harris J.* Principles of algebraic geometry. — John Wiley & Sons, 2014.
67. *Eisenbud D., Harris J.* 3264 & all that: Intersection theory in algebraic geometry. — Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2015.
68. *Погорелов А.В.* Дифференциальная геометрия. — Наука, 1974.
69. *Ramasubramanian V., Paliwal K.* A generalized optimization of the k-d tree for fast nearest-neighbour search // TENCON'89. Fourth IEEE Region 10 International Conference / IEEE. — 1989. — Pp. 565–568.
70. *Moore A.* The anchors hierarchy: Using the triangle inequality to survive high dimensional data // Proceedings of the Sixteenth conference on Uncertainty in artificial intelligence / Morgan Kaufmann Publishers Inc. — 2000. — Pp. 397–405.
71. *Hodgson M.* Reducing the computational requirements of the minimum-distance classifier // *Remote Sensing of Environment*. — 1988. — Vol. 25, no. 1. — Pp. 117–128.
72. *Elkan Ch.* Using the triangle inequality to accelerate k-means // ICML. — Vol. 3. — 2003. — Pp. 147–153.
73. *Gaffney S., Smyth P.* Joint probabilistic curve clustering and alignment // In Advances in Neural Information Processing Systems. — Vol. 17. — Cambridge, MA: MIT Press, 2005. — Pp. 473–480.
74. *Anjum N., Cavallaro A.* Trajectory clustering for scene context learning and outlier detection // Video Search and Mining. — Springer, 2010. — Pp. 33–51.
75. *Кухаренко Б.Г., Солнцева М.О.* Итеративная кластеризация траекторий управляемых объектов в многомерном пространстве характеристик // *Информационные технологии*. — 2014. — № 8. — С. 11–16.

76. Bouveyron C., Brunet-Saumard C. Model-based clustering of high-dimensional data: A review // *Computational Statistics & Data Analysis*. — 2014. — Vol. 71. — Pp. 52–78.
77. Кухаренко Б.Г., Солнцева М.О. Покомпонентный дискриминантный анализ результатов кластеризации многомерных траекторий // *Информационные технологии*. — 2014. — № 11. — С. 3–7.
78. Chen G., Lerman G. Spectral curvature clustering (SCC) // *International Journal of Computer Vision*. — 2009. — Vol. 81, no. 3. — Pp. 317–330.
79. Кухаренко Б.Г., Солнцева-Чалей М.О. Спектральный метод с использованием полярной кривизны для анализа результатов кластеризации многомерных траекторий // *Информационные технологии*. — 2015. — Т. 21, № 12. — С. 901–905.
80. MacQueen J., et al. Some methods for classification and analysis of multivariate observations // Proceedings of the fifth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability / Oakland, CA, USA. — Vol. 1. — University of California Press, 1967. — Pp. 281–297.
81. Кухаренко Б.Г., Солнцева М.О. Анализ результатов кластеризации многомерных траекторий посредством моделей линейных динамических систем // *Информационные технологии*. — 2015. — № 2. — С. 104–109.
82. Кухаренко Б.Г., Солнцева М.О. Применение моделей нелинейных динамических систем для анализа результатов кластеризации многомерных траекторий // *Информационные технологии*. — 2015. — Т. 21, № 5. — С. 341–345.
83. Listgarten J., Neal R., et al. Multiple alignment of continuous time series // Proceedings of Neural Information Processing Systems (NIPS 2004) / Ed. by Bottou L. Saul L.K., Weiss Y. — Vancouver, British Columbia, Canada: 2004. — December 13-18. — Pp. 817–824.
84. Кухаренко Б.Г., Солнцева М.О. Применение моделей непрерывного скрыто-

го профиля для анализа результатов кластеризации многомерных траекторий // *Информационные технологии*. — 2015. — Т. 21, № 8. — С. 585–590.

85. *Ramsay J.O., Silverman B.W.* Functional Data Analysis. — 1997.
86. *Ramsay J.O., Silverman B.W.* Applied functional data analysis: methods and case studies. — Springer, New York, 2002.
87. *Levitin D., et al.* Introduction to functional data analysis. // *Canadian Psychology*. — 2007. — Vol. 48, no. 3. — P. 135.
88. *Ramsay J.O., et al.* Description and processing of functional data arising from juggling trajectories // *Electronic Journal of Statistics*. — 2014. — Vol. 8, no. 2. — Pp. 1811–1816.
89. *Chudova D., Gaffney S., Smyth P.* Probabilistic models for joint clustering and time-warping of multidimensional curves // Proceedings of the Nineteenth conference on Uncertainty in Artificial Intelligence / Morgan Kaufmann Publishers Inc. — 2002. — Pp. 134–141.
90. *Ward J., Joe H.* Hierarchical grouping to optimize an objective function // *Journal of the American statistical association*. — 1963. — Vol. 58, no. 301. — Pp. 236–244.
91. *Hartigan J.A., Wong M.A.* Algorithm AS 136: A k-means clustering algorithm // *Applied statistics*. — 1979. — Pp. 100–108.
92. *Banfield J.D., Raftery A.E.* Model-based Gaussian and non-Gaussian clustering // *Biometrics*. — 1993. — Pp. 803–821.
93. *Celeux G., Govaert G.* Gaussian parsimonious clustering models // *Pattern recognition*. — 1995. — Vol. 28, no. 5. — Pp. 781–793.
94. *McLachlan G., Peel D.* Finite mixture models. — John Wiley & Sons, 2004.
95. *DeSarbo W., Cron W.* A maximum likelihood methodology for clusterwise linear regression // *Journal of classification*. — 1988. — Vol. 5, no. 2. — Pp. 249–282.
96. *Jones PN, McLachlan GJ.* Fitting finite mixture models in a regression context // *Australian Journal of Statistics*. — 1992. — Vol. 34, no. 2. — Pp. 233–240.

97. Chudova D., Gaffney S., et al. Translation-invariant mixture models for curve clustering // Proceedings of the ninth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining / ACM. — 2003. — Pp. 79–88.
98. De la Cruz-Mesía R., Quintana F.A., Marshall G. Model-based clustering for longitudinal data // *Computational Statistics & Data Analysis*. — 2008. — Vol. 52, no. 3. — Pp. 1441–1457.
99. Chamroukhi F. Unsupervised learning of regression mixture models with unknown number of components // *arXiv preprint arXiv:1409.6981*. — 2014.
100. Gaffney S., Smyth P. Trajectory clustering with mixtures of regression models // Proceedings of the fifth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining. — 1999. — Pp. 63–72.
101. Gaffney S. J., Smyth P. Curve clustering with random effects regression mixtures // Proceedings of the ninth international workshop on artificial intelligence and statistics. — 2003.
102. Gaffney S. J. Probabilistic curve-aligned clustering and prediction with regression mixture models: Ph.D. thesis / University of California, Irvine. — 2004.
103. Gaffney S., Robertson A., et al. Probabilistic clustering of extratropical cyclones using regression mixture models // *Climate dynamics*. — 2007. — Vol. 29, no. 4. — Pp. 423–440.
104. Sugar C. A., James G. M. Finding the number of clusters in a dataset // *Journal of the American Statistical Association*. — 2003. — Vol. 98, no. 463.
105. James G. M., Sugar C. A. Clustering for sparsely sampled functional data // *Journal of the American Statistical Association*. — 2003. — Vol. 98, no. 462. — Pp. 397–408.
106. Liu X., Yang M. C. K. Simultaneous curve registration and clustering for functional data // *Computational Statistics & Data Analysis*. — 2009. — Vol. 53, no. 4. — Pp. 1361–1376.

107. *Hébrail G., et al.* Exploratory analysis of functional data via clustering and optimal segmentation // *Neurocomputing*. — 2010. — Vol. 73, no. 7. — Pp. 1125–1141.
108. *Dempster A., Laird N., Rubin D.* Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm // *Journal of the royal statistical society. Series B (methodological)*. — 1977. — Pp. 1–38.
109. *Яцкив И., Гусарова Л.* Методы определения количества кластеров при классификации без обучения // *Transport and telecommunication*. — 2003. — Т. 4. — С. 23–28.
110. *Ходашинский И.А.* Идентификация нечетких систем: методы и алгоритмы // *Проблемы управления*. — 2009. — № 4.
111. *Yu H., Liu Z., Wang G.* An automatic method to determine the number of clusters using decision-theoretic rough set // *International Journal of Approximate Reasoning*. — 2014. — Vol. 55, no. 1. — Pp. 101–115.
112. *Chu H.J., et al.* Integration of fuzzy cluster analysis and kernel density estimation for tracking typhoon trajectories in the Taiwan region // *Expert Systems with Applications*. — 2012. — Vol. 39, no. 10. — Pp. 9451–9457.
113. *Silvestre C., et al.* Identifying the number of clusters in discrete mixture models // *preprint arXiv:1409.7419*. — 2014.
114. *Burnham K., Anderson D.* Multimodel inference understanding AIC and BIC in model selection // *Sociological methods & research*. — 2004. — Vol. 33, no. 2. — Pp. 261–304.
115. *Steele R., Raftery A.* Performance of Bayesian model selection criteria for Gaussian mixture models // *Frontiers of Statistical Decision Making and Bayesian Analysis*. — 2010. — Pp. 113–130.
116. *Frühwirth-Schnatter S.* Model-based Clustering of Time Series-A Review from a Bayesian Perspective. — 2011.

117. *Aoki Masanao.* State space modeling of time series. — Springer Science & Business Media, 2013.
118. *Durbin J., Koopman S.* Time series analysis by state space methods. No. 38. — Oxford University Press, 2012.
119. *Ghahramani Z., Hinton G.* Variational learning for switching state-space models // *Neural computation*. — 2000. — Vol. 12, no. 4. — Pp. 831–864.
120. *Цыплаков А.* Введение в моделирование в пространстве состояний // *Квантиль*. — 2011. — Т. 9. — С. 1–24.
121. *Бенъкович Е.С., Колесов Ю.Б., Сениченков Ю.Б.* Практическое моделирование динамических систем. — BHV СПб. и др., 2002.
122. *Shumway R.H., Stoffer D.S.* ARIMA models // *Time Series Analysis and Its Applications*. — Springer, 2011. — Pp. 83–171.
123. *Kalman R. E.* A new approach to linear filtering and prediction problems // *Journal of Fluids Engineering*. — 1960. — Vol. 82, no. 1. — Pp. 35–45.
124. *Kalman R.E., Bucy R.S.* New results in linear filtering and prediction theory // *Journal of Fluids Engineering*. — 1961. — Vol. 83, no. 1. — Pp. 95–108.
125. *Kalman R.E.* The theory of optimal control and the calculus of variations // *Mathematical optimization techniques*. — 1963. — Pp. 309–331.
126. *Maybeck P.S.* The Kalman filter: An introduction to concepts // *Autonomous Robot Vehicles*. — Springer, 1990. — Pp. 194–204.
127. *Simon D.* Optimal state estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches. — John Wiley & Sons, 2006.
128. *Einicke G.* Smoothing, Filtering and Prediction: Estimating the Past, Present and Future. — Rijeka, Croatia: Intech, 2012.
129. *Ghahramani Z., Roweis S.* Learning nonlinear dynamical systems using an EM algorithm // *Advances in neural information processing systems*. — 1999. — Pp. 431–437.

130. *Murphy K.* Switching kalman filters. — Citeseer. — 1998.
131. *Ghahramani Z.* Learning dynamic Bayesian networks // Adaptive processing of sequences and data structures. — Springer, 1998. — Pp. 168–197.
132. *Smyth P., Heckerman D., Jordan M.I.* Probabilistic independence networks for hidden Markov probability models // *Neural computation*. — 1997. — Vol. 9, no. 2. — Pp. 227–269.
133. *Murphy K.P.* Dynamic bayesian networks: representation, inference and learning: Ph.D. thesis / University of California, Berkeley. — 2002.
134. *Rabiner L.R.* A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition // *Proceedings of the IEEE*. — 1989. — Vol. 77, no. 2. — Pp. 257–286.
135. *Ghahramani Z., Jordan M.* Factorial hidden Markov models // *Machine learning*. — 1997. — Vol. 29, no. 2-3. — Pp. 245–273.
136. *Douc R., Moulines E., Stoffer D.* Nonlinear time series: Theory, Methods and Applications with R Examples. — CRC Press, 2014.
137. *Mergner S.* Applications of State Space Models in Finance: An Empirical Analysis of the Time-Varying Relationship Between Macroeconomics, Fundamentals and Pan-European Industry Portfolios. — Universitätsverlag Göttingen, 2009.
138. *Shumway R.H., Stoffer D.S.* Time series analysis and its applications. — Springer Science & Business Media, 2013.
139. *Shumway R.H., Stoffer D.S.* Time series analysis and its applications: with R examples. — Springer Science & Business Media, 2010.
140. Feature extraction: foundations and applications / I. Guyon, S. Gunn, M. Nikravesh, L. Zadeh. — Springer, 2008. — Vol. 207.
141. *Jähne B.* Digital image processing: electronic version of the book, exercises, additional images and runtime version of the heurisko image processing software. — Springer, 2002. — Pp. 513–528.

142. Burges C. Dimension reduction: A guided tour // *Machine Learning*. — 2009. — Vol. 2, no. 4. — Pp. 275–365.
143. Солнцева М.О., Кухаренко Б.Г. Кластеризация управляемых объектов на основе сходства их траекторий и скоростных режимов // *Труды МФТИ*. — 2014. — Т. 6, № 3. — С. 65–72.
144. Кухаренко Б.Г., Солнцева-Чалей М.О. Спектральный метод с использованием полярной кривизны для анализа результатов кластеризации многомерных траекторий // *Информационные технологии*. — 2015. — Т. 21, № 12.
145. Shumway R.H., Stoffer D.S. An approach to time series smoothing and forecasting using the EM algorithm // *Journal of time series analysis*. — 1982. — Vol. 3, no. 4. — Pp. 253–264.
146. Shumway R.H., Stoffer D.S. Dynamic linear models with switching // *Journal of the American Statistical Association*. — 1991. — Vol. 86, no. 415. — Pp. 763–769.
147. Shumway R.H., Stoffer D.S. Time Series Analysis and Its Applications. — Springer, 2011. — Pp. 83–171.
148. Rauch H.E. Solutions to the linear smoothing problem // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 1963. — Vol. 8, no. 4. — Pp. 371–372.
149. Roweis S., Ghahramani Z. A unifying review of linear Gaussian models // *Neural computation*. — 1999. — Vol. 11, no. 2. — Pp. 305–345.
150. Roweis S., Ghahramani Z. Learning nonlinear dynamical systems using the expectation–maximization algorithm // Kalman filtering and neural networks / Ed. by S. Haykin. — John Wiley & Sons, 2001. — Pp. 175–220.
151. Kukharenko B.G. Use of the prony method for modal identification of slow-evolutionary linear structures // *Journal of Structural Control*. — 2000. — Vol. 7, no. 2. — Pp. 203–217.
152. Broomhead D.S., Lowe D. Multivariable functional interpolation and adaptive networks // *Complex Systems*. — 1988. — Vol. 2. — Pp. 321–355.

153. Moody J., Darken C. Fast learning in networks of locally-tuned processing units // *Neural computation*. — 1989. — Vol. 1, no. 2. — Pp. 281–294.
154. Listgarten J. Analysis of sibling time series data: alignment and difference detection: Ph.D. thesis / University of Toronto: Graduate Department of Computer Science. — 2007.
155. Кухаренко Б.Г. Анализ независимых компонент и скрытая Марковская модель для определения доминантных компонент многомерных временных рядов // *Информационные технологии. Приложение*. — 2010. — № 11. — С. 1–32.
156. Poritz A.B. Hidden Markov models: A guided tour // 1988 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing / IEEE. — 1988. — Pp. 7–13.
157. Dasgupta P., Maskin E. On the robustness of majority rule // *Journal of the European Economic Association*. — 2008. — Vol. 6, no. 5. — Pp. 949–973.
158. Bergé L., Bouveyron C., Girard S. HDclassif: An R package for model-based clustering and discriminant analysis of high-dimensional data // *Journal of Statistical Software*. — 2012. — Vol. 46, no. 6. — Pp. 1–29.
159. Cunningham P. Dimension reduction // Machine learning techniques for multimedia. — Springer, 2008. — Pp. 91–112.
160. Jolliffe I.T. Principal component analysis. — 2nd edition edition. — New York: Springer: Springer Series in Statistics, 2002.
161. Guyon I., Elisseeff A. An introduction to variable and feature selection // *The Journal of Machine Learning Research*. — 2003. — Vol. 3. — Pp. 1157–1182.
162. Kotsiantis S. B. Supervised Machine Learning: A Review of Classification Techniques // *Informatica*. — 2007. — Vol. 31. — P. 249–268.
163. Scott D., Thompson J. Probability density estimation in higher dimensions // Computer Science and Statistics: Proceedings of the fifteenth symposium on the interface. — Vol. 528. — North-Holland, Amsterdam: 1983. — Pp. 173–179.

164. Bouveyron C., Girard S., Schmid C. High-dimensional discriminant analysis // *Communications in Statistics—Theory and Methods.* — 2007. — Vol. 36, no. 14. — Pp. 2607–2623.
165. Fukunaga K., Hostetler L. The estimation of the gradient of a density function, with applications in pattern recognition // *IEEE Transactions on Information Theory.* — 1975. — Vol. 21, no. 1. — Pp. 32–40.
166. Comaniciu D., Meer P. Mean shift: A robust approach toward feature space analysis // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence.* — 2002. — Vol. 24, no. 5. — Pp. 603–619.
167. Yang K., Shahabi C. A PCA-based similarity measure for multivariate time series // Proceedings of the 2nd ACM international workshop on Multimedia databases / ACM. — 2004. — Pp. 65–74.
168. Li X., Hu W., Hu W. A coarse-to-fine strategy for vehicle motion trajectory clustering // ICPR 2006. 18th International Conference on Pattern Recognition / IEEE. — Vol. 1. — 2006. — Pp. 591–594.
169. Кухаренко Б.Г., Солнцева М.О. Использование методов сокращения фона при сегментировании телеметрических изображений для идентификации групп объектов // *Информационные технологии.* — 2014. — № 2. — С. 3–8.
170. Comaniciu D., Meer P. Distribution free decomposition of multivariate data // *Pattern Analysis and Applications.* — 1999. — Vol. 2, no. 1. — Pp. 22–30.
171. Епанечников B.A. Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности // *Теория вероятностей и ее применения.* — 1969. — Т. 14, № 1. — С. 156–161.
172. Wang H., Suter D. False-peaks-avoiding mean shift method for unsupervised peak-valley sliding image segmentation // Proceedings of 7th International Conference on Digital Image Computing: Techniques and Applications (DICTA'03) / Macquarie University. — Sydney, Australia: 2003. — 10–12 December. — P. 581–590.

173. *Ma Y., Yang A., et al.* Estimation of subspace arrangements with applications in modeling and segmenting mixed data // *SIAM review*. — 2008. — Vol. 50, no. 3. — Pp. 413–458.
174. *Govindu V.M.* A tensor decomposition for geometric grouping and segmentation // IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition / IEEE. — Vol. 1. — 2005. — Pp. 1150–1157.
175. *Ng A., Jordan M., Weiss Y.* On spectral clustering: Analysis and an algorithm // *Advances in neural information processing systems*. — 2002. — Vol. 2. — Pp. 849–856.
176. *Luxburg V.U.* A tutorial on spectral clustering // *Statistics and computing*. — 2007. — Vol. 17, no. 4. — Pp. 395–416.
177. *Daverman R.J., Sher R.B.* Handbook of geometric topology. — Amsterdam: Elsevier Science BV, 2002.
178. *Whitehouse J.T.* Generalized Sines, Multiway Curvatures, and the Multiscale Geometry of d-Regular Measures: Ph.D. thesis / University of Minnesota. — 2009.
179. *Lerman G., Whitehouse J.T.* High-dimensional Menger-type curvatures—part II: d-separation and a menagerie of curvatures // *Constructive Approximation*. — 2009. — Vol. 30, no. 3. — Pp. 325–360.
180. *Kroonenberg P.M.* Applied multiway data analysis. — John Wiley & Sons, 2008. — Vol. 702.
181. *Zhang T., Szelam A., Lerman G.* Median k-flats for hybrid linear modeling with many outliers // 2009 IEEE 12th International Conference on Computer Vision Workshops / IEEE. — 2009. — Pp. 234–241.
182. *Zhang T., Szelam A., et al.* Hybrid linear modeling via local best-fit flats // *International journal of computer vision*. — 2012. — Vol. 100, no. 3. — Pp. 217–240.

183. *Bader B.W., Kolda T.G.* MATLAB Tensor Classes for Fast Algorithm Prototyping: Source Code: Technical Report SAND2004-5187. — Albuquerque, NM: Sandia National Laboratories, 2004.
184. *Drineas P., Kannan R., Mahoney M.* Fast Monte Carlo algorithms for matrices I: Approximating matrix multiplication // *SIAM Journal on Computing*. — 2006. — Vol. 36, no. 1. — Pp. 132–157.
185. *Solntseva-Chaley M.* New data mining technique for multidimensional aircraft trajectories analysis // *International Conference on Big Data and its Applications (ICBDA 2016)*. — 2016. — Vol. 8. — Pp. 1–7,01001. <http://dx.doi.org/10.1051/itmconf/20160801001>.
186. *Кухаренко Б.Г., Солнцева-Чалей М.О.* Моделирование центроидов для пучков многомерных траекторий // *Информационные технологии*. — 2016. — Т. 22, № 2. — С. 83–89.
187. *Солнцева-Чалей М.О.* Способ последовательного определения усреднённых траекторий движения материальных объектов в трёхмерном пространстве - №2017101343; заявл. 16.01.2017. — 2017.
188. *Kukharenko B.G, Solntseva-Chaley M.O.* Stable partition of trajectories set into asymptotically converged beams, US No. 15-258,736, 07.09.2016. — 2016.
189. *Кухаренко Б.Г., Солнцева-Чалей М.О.* Способ определения посадочной траектории летательного аппарата на основании данных о зарегистрированных траекториях с применением в качестве меры сходства траекторий меры косинуса (варианты) - патент на изобретение №2616107. — выдан 12.04.2017.
190. *Кухаренко Б.Г., Солнцева-Чалей М.О.* Способ определения посадочных траекторий летательных аппаратов, соответствующих одной взлётно-посадочной полосе - патент на изобретение № 2616106. — выдан 12.04.2017.
191. *Fischler M., Bolles R.* Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography // *Communications of the ACM*. — 1981. — Vol. 24, no. 6. — Pp. 381–395.

192. *Zuliani M.* RANSAC for Dummies // *Vision Research Lab, University of California, Santa Barbara.* — 2009.
193. *Torr P., Zisserman A.* MLESAC: A new robust estimator with application to estimating image geometry // *Computer Vision and Image Understanding.* — 2000. — Vol. 78, no. 1. — Pp. 138–156.
194. *Кухаренко Б.Г.* Алгоритмы анализа изображений для определения локальных особенностей и распознавания объектов и панорамы // *Информационные технологии. Приложение.* — 2011. — № 7. — С. 1–32.