На правах рукописи

Егорова Евгения Кирилловна

РЕДУКЦИЯ КОЛИЧЕСТВА ВХОЖДЕНИЙ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Специальность 05.13.17

Теоретические основы информатики

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва 2018 г.

Работа выполнена в федеральном исследовательском центре «Информатика и управление» Российской Академии Наук

Научный руководитель:	**Цурков Владимир Иванович** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом сложных систем федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской Академии Наук
Официальные оппоненты:	**Афраймович Лев Григорьевич** доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики и автоматизации научных исследований ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (ННГУ)
	Лукьянова Елена Александровна кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и функционального анализа ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского»
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Защита состоится 18 октября 2018 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета Д 002.073.05 при федеральном исследовательском центре «Информатика и управление» Российской Академии Наук (ФИЦ ИУ РАН) по адресу: 119333, г. Москва, ул. Вавилова, 40, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФИЦ ИУ РАН http://www.frccsc.ru/.

Автореферат разослан «   » июля 2018 г.

Учёный секретарь
Диссертационного совета,
Д 002.073.05, д. ф.-м. н., профессор — Рязанов В. В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Системы автоматического управления сложнейшими объектами и процессами, интеллектуальные пакеты прикладных программ, системы планирования вычислений, системы автоматизированного проектирования – вот далеко не полный перечень аппаратных и программных систем, без которых немыслим сейчас научно-технический прогресс.

Особое место в указанном списке занимают вычислительные системы и другие специализированные ЭВМ. Взаимоотношения вышеперечисленных систем с вычислительной техникой имеют две различные стороны: ЭВМ является основным инструментом исследований, включая моделирование, и будучи сами сложными системами, выступают важными объектами исследований.

Проектирование таких систем в настоящее время характеризуется широким использованием достижений микроэлектроники. Элементной базой для синтеза вычислительных и логических управляющих устройств рассматриваемых систем являются интегральные схемы. Стремительное развитие микроэлектроники, проявляющееся в постоянном совершенствовании и в создании новых элементов базиса, содержащего микросхемы различной степени интеграции, с одной стороны, создаёт благоприятные предпосылки для разработки новых высокопроизводительных вычислительных и управляющих систем с высокой степенью параллелизма обработки данных, а с другой стороны, ставит ряд трудно решаемых проблем перед разработчиками этой техники.

Таким образом, приходим к задачам аппаратной реализации булевых функций, т. е. к задачам синтеза функционально-логических схем в заданных базисах. Ситуацию, сложившуюся в этой области, можно охарактеризовать тем, что нет способов приемлемой трудоёмкости, позволяющих оптимальным образом синтезировать каждую схему. Причиной этому является возрастающая сложность (площадь кристалла, глубина схемы, число логических элементов, суммарная длина проводников между элементами и другие показатели качества) проектируемых систем.

Соответствующей вычислительной моделью является формула, реализующая булеву функцию. Булевы функции нашли широкое применение в целом ряде различных областей. Сложность используемых на практике функций увеличивается, в связи с усложнением решаемых задач. Увеличивается число используемых переменных, и количество логических операций, которое необходимо выполнить для получения значения функции. Но не только функции становятся сложнее, более сложными становятся и ЭВМ, на которых выполняется их вычисление. В связи с совершенствованием ЭВМ, появлением и широким распространением многопроцессорных и многоядерных систем, появилась необходимость в создании алгоритмов и программ, которые смогут использовать новые аппаратные возможности. В алгоритмах, которые дадут существенное преимущество по сравнению с классическими, на новых ЭВМ, при вычислении больших функций.

Алгебра логики имеет большое значение в основаниях математики. Строгое, математически точное построение логических исчислений, решение проблемы дедукции, аксиоматические системы и доказательство теорем. В то же время быстрое развитие вычислительной техники способствует расширению как круга задач, решаемых с помощью алгебры логики, так и методов, применяемых для их решения. Это в первую очередь относится к задачам искусственного интеллекта, решение которых немыслимо без привлечения методов алгебры логики.

Стоит отметить, что на практике множество элементарных логических операций является обязательной частью набора инструкций всех современных микропроцессоров и соответственно входит в языки программирования. Это является одним из важнейших практических приложений методов алгебры логики, изучаемых в современной информатике.

Цель работы.

Анализ и редукция количества вхождений переменных в реализацию некоторого класса симметрических булевых функций, представленных в виде полиномов Жегалкина с высокой степенью.

Для достижения заявленной цели предлагается решение следующих задач:

1. обзор существующих методов анализа количества вхождении переменных в формулу, реализующую булеву функцию;

2. построение метода минимизации показателей качества для некоторого класса булевых функций;
3. разработка алгоритма редукции количества вхождений переменных в реализацию произвольной булевой функции в базисе Жегалкина.

Научная новизна.

В данной работе проводится редукция количества переменных сформулированы и доказаны теоремы дающие аналитические оценки для показателей сложности булевых функций и схем. Разработан алгоритм редукции количества вхождений переменных в реализацию произвольной булевой функции в базисе Жегалкина.

Научная и практическая значимость.

Работа содержит решение актуальных проблем в области дискретного моделирования и построения СБИС. Автором были найдены аналитические оценки сложности для полинома Жегалкина $F_{n-2}^{(n)}$ в базисах G_1 и G_3, проведены аналитические исследования вопросов минимизации оценок сложности булевых формул и построен программный комплекс автоматической редукции оценки сложности булевых функций.

Объект исследования.

Реализация симметрических булевых функций в виде полиномов Жегалкина со степенью $n - 2$.

Предмет исследования.

Методы редукции количества вхождений переменных в реализацию булевой функции в некотором базисе.

Положения, выносимые на защиту.

1. Предложен метод декомпозиции булевых функций, позволяющий аналитически получать верхнюю оценку сложности показателей для представления функции в виде полинома большой степени в классе формул, а также – в классе схем.

2. Данный метод применён для аналитического нахождения ряда оценок для полинома Жегалкина строения $F_{n-2}^{(n)}$ в классах формул и схем из функциональных элементов.
3. Сформулированы и доказаны теоремы о верхних границах минимальных оценок реализации симметрических булевых функций в виде полиномов Жегалкина строения $F_{n-2}^{(n)}$.
4. Разработан алгоритм минимизации количества вхождений переменных в реализацию произвольной булевой функции в виде полинома Жегалкина.
5. Разработанный алгоритм реализован в виде программного комплекса, получившего свидетельство о государственной регистрации.

Степень достоверности полученных результатов подтверждаются проработкой литературных источников по теме диссертации и современной методикой исследования, которая соответствует поставленным в работе целям и задачам. Научные положения, выводы и рекомендации, сформулированные в диссертации, подкреплены убедительными фактическими данными и проведением всего исследования на математическом уровне строгости.

Апробация работы.

Основные результаты работы докладывались на конференциях:

1. Межвузовская молодёжная научно-практическая конференции «Информационные и телекоммуникационные технологии» (Ступино, декабрь 2009 г.).
2. XXXVII международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения» (Москва, апрель 2011 г.).
3. Международная научно-практическая конференция молодых учёных и педагогов, аспирантов и студентов «Кибернетика: вчера, сегодня, завтра» (Дмитров, декабрь 2011 г.).
4. Международной научно-технической конференции молодых учёных, аспирантов и студентов «Управление, автоматизация и окружающая среда-2012» (Севастополь, март 2012 г.).
5. XXXVIII международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения» (Москва, апрель 2012 г.).

6. I Форум союзного государства вузов инженерно-технического профиля (Минск, май 2012 г.).
7. XXXIX международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения» (Москва, апрель 2013 г.).
8. XLII международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения» (Москва, апрель 2016 г.).

Также полученные в диссертации результаты обсуждались на семинарах, проводимых в Московском авиационном институте (национальном исследовательском институте) и Федеральном исследовательском центре «Информатика и управление» Российской Академии Наук.

Связь с плановыми научными исследованиями. Работа выполнена с поддержкой грантов Российского фонда фундаментальных исследований:

- № 09-01-90441 А Математические модели правильного мышления.
- № 13-01-00827 А Математическое моделирование и оптимизация в задачах механики упругих систем и полупроводниковых гетероструктур.
- № 16-01-00425 А Моделирование и управление в неклассических задачах теории упругости и гидродинамики.

Личный вклад автора.

Все научные результаты, которые выносятся на защиту, получены полностью автором.

Публикации.

По теме диссертации получено 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ, а также опубликовано самостоятельно и в соавторстве 14 работ в том числе 3 работы в изданиях, входящих в перечень ведущих журналов и изданий, рекомендованных ВАК для публикации основных результатов диссертаций на соискания учёной степени доктора и кандидата наук и Опубликованные материалы отражают основное содержание диссертации.

Структура и объем работы: диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы (62 наименования) и приложения. Объем работы 108 страниц, включая 17 рисунков.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснованы актуальность анализа и синтеза дискретных вычислительных и управляющих логических устройств обработки информации, сформулированы цель и задачи исследований, научная новизна и практическая ценность полученных результатов, приведены сведения об использовании, реализации и апробации результатов работы, и структуре диссертации.

Первая глава диссертации носит вводный характер.

В начале главы проводится обзор основных исторических этапов развития алгебры логики, начиная с Аристотеля. Далее рассматривается зарождение символьной логики, основы которой заложил Г. Лейбниц, и её дальнейшее развитие в трудах Д. Буля, О. Моргана, Ч. Пирса, Д. Венна, Э. Шрёдера. Отмечаются труды П. Эренфеста, указавшего на возможность применения аппарата булевой алгебры в телефонной связи для описания переключательных цепей, и В. И. Шестакова и К. Шеннона, сформулировавших теорию релейно-контактных схем.

В остальных разделах первой главы рассматривается математический аппарат, на который опираются дальнейшие исследования. Даётся представление о булевых функциях и формулах, полноте и базисах. Приводится математико-информационное описание булевых функций и даются определения показателей сложности реализации. Также описаны оптимизирующие логико-комбинаторные преобразования, включающие в себя следующие механизмы: удаление фиктивных переменных, эквивалентные преобразования булевых функций, их преобразования между базисами. Эти механизмы предоставляют качественные способы реализации булевых формул для более простого нахождения различных показателей качества. Также рассматриваются современные проблемы представления полинома Жегалкина.

Во второй главе проводится аналитический анализ методов редукции количества вхождений переменных в формулу. При этом рассматриваются различные варианты оптимизации формул с помощью функциональных уравнений для того, чтобы получить более точные оценки. Кроме того, рассматривается представление булевых формул в классе схем и получение оценок уже для этого класса. В завершении наглядно сравниваются полученные оценки.

Исследуется сложность представления симметрической булевой функции, представленной в виде полинома Жегалкина. Булева функция $f^{(n)}$зависит от переменных из множества $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и задаётся полином Жегалкина $F_{n-2}^{(n)} = K_1 \oplus \dots \oplus K_i \oplus \dots \oplus K_m$, где K_i – монотонная элементарная конъюнкция ранга $n-2$.

Формулируются следующие леммы для нахождения показателя качества $L_B\left(F_{n-2}^{(n)}\right)$:

Лемма 1. Число элементарных конъюнкций K_i есть $C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$.

Лемма 2. Число букв в любой элементарной конъюнкции есть $(n-2)$.

Таким образом количество букв для формулы данного класса $L_B\left(F_{n-2}^{(n)}\right) = (n-2)\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n\right) = \frac{1}{2}n^3 - \frac{3}{2}n^2 + n$.

Отсюда выведена следующая теорема.

Теорема 1. Для функции $F_{n-2}^{(n)}$ оценка $L_B\left(F_{n-2}^{(n)}\right) \le \frac{1}{2}n^3 - \frac{3}{2}n^2 + n$.

Для полиномов Жегалкина, имеющих в составе только положительно определённые элементарные конъюнкции количество подформул в формуле, соответствует количеству знаков действий в соответствующей формуле, следовательно, оценка $L_F\left(F_{n-2}^{(n)}\right)$ находится следующим образом:

$$L_F\left(F_{n-2}^{(n)}\right) = L_B\left(F_{n-2}^{(n)}\right) - 1 = \frac{1}{2}n^3 - \frac{3}{2}n^2 + n - 1.$$

Таким образом получается следующая теорема.

Теорема 2. Для функции $F_{n-2}^{(n)}$ оценка $L_F\left(F_{n-2}^{(n)}\right) \le \frac{1}{2}n^3 - \frac{3}{2}n^2 + n - 1$.

Для улучшения полученной выше оценки $L_B\left(F_{n-2}^{(n)}\right)$ применяется следующее функциональное уравнение:

$$F_{n-2}^{(n)} = F_{n-2}^{(n-1)} \oplus x_n \cdot F_{n-3}^{(n-1)}.$$

Ему соответствует следующее функциональное уравнение для показателя качества L_B:

$$L_B\left(F_{n-2}^{(n)}\right) = L_B\left(F_{n-2}^{(n-1)}\right) + 1 + L_B\left(F_{n-3}^{(n-1)}\right).$$

Вводится следующая замена:

$$u_n = L_B\left(F_{n-2}^{(n)}\right), \qquad u_{n-1} = L_B\left(F_{n-3}^{(n-1)}\right).$$

Таким образом, получено рекуррентное соотношение

$$u_n - u_{n-1} = L_B\left(F_{n-2}^{(n-1)}\right) + 1.$$

При этом $L_B\left(F_{n-2}^{(n-1)}\right)$ оценивается как

$$L_B\left(F_{n-2}^{(n-1)}\right) = (n-2)C_{n-1}^{n-2} = (n-2)(n-1) = n^2 - 3n + 2,$$

и получается следующее разностное уравнение

$$u_n - u_{n-1} = n^2 - 3n + 3.$$

Начальные условия подсчитываются непосредственно из полинома F_2^4. При $n = 4$:

$$F_2^4 = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_4 \oplus x_2x_4 \oplus x_3x_4 =$$
$$= \left(x_1x_2 \oplus x_3(x_1 \oplus x_2)\right) \oplus x_4(x_1 \oplus x_2 \oplus x_3).$$

Количество букв в формуле определяет таким образом начальное условие для $n = 4$: $u_4 = L_B(F_2^4, G_3) = 9$. Полученное разностное уравнение и начальное условие при $n = 4$ позволяют получить его решение в виде рекуррентного соотношения. Для этого составляются конечные разности первого, второго и последующих порядков до тех пор, пока они не будут нулевыми, то есть не будет получено решение в виде многочлена с неопределёнными коэффициентами.

n	4	5	6	7	8
u_n	9	22	43	74	117
Δ_1		13	21	31	43
Δ_2			8	10	12
Δ_3				2	2
Δ_4					0

Таб. 1 Конечные разности

Так как конечные разности четвёртого порядка равны нулю, то, из свойства конечных разностей, предполагается решение в виде многочлена третьей степени:

$$u_n = a_0 n^3 + a_1 n^2 + a_2 n + a_3.$$

Решением полученной системы уравнений будут являться коэффициенты многочлена, описывающего оценку количества вхождений переменных в формулу.

$$\begin{cases} 343a_0 + 49a_1 + 7a_2 + a_3 = 74, \\ 216a_0 + 36a_1 + 6a_2 + a_3 = 43, \\ 125a_0 + 25a_1 + 5a_2 + a_3 = 22, \\ 64a_0 + 16a_1 + 4a_2 + a_3 = 9; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = {}^1/_3, \\ a_1 = -1, \\ a_2 = {}^5/_3, \\ a_3 = -3. \end{cases}$$

Таким образом получена ещё одна оценка для показателя качества $L_B\left(F_{n-2}^{(n)}\right)$:

$$L_{B_2}\left(F_{n-2}^{(n)}, G_3\right) = \frac{1}{3}n^3 - n^2 + \frac{5}{3}n - 3.$$

Отсюда уточнение теоремы 1.

Теорема 3. Для функции $F_{n-2}^{(n)}$ оценка $L_B\left(F_{n-2}^{(n)}\right) \le \frac{1}{3}n^3 - n^2 + \frac{5}{3}n - 3.$

Поскольку оценка $L_B\left(F_{n-2}^{(n-1)}\right)$ проведена неоптимальным образом, результат для формулы строения $F_{n-2}^{(n)}$ можно дополнительно улучшить аналогичным методом. Функциональное уравнение для $F_{n-2}^{(n-1)}$ выглядит следующим образом:

$$F_{n-2}^{(n-1)} = F_{n-2}^{(n-2)} \oplus x_n \cdot F_{n-3}^{(n-2)}.$$

Ему соответствует следующее разностное уравнение:

$$L_B\left(F_{n-2}^{(n-1)}\right) = L_B\left(F_{n-2}^{(n-2)}\right) + 1 + L_B\left(F_{n-3}^{(n-2)}\right),$$

$$u_n = L_B\left(F_{n-2}^{(n-1)}\right), \qquad u_{n-1} = L_B\left(F_{n-3}^{(n-2)}\right),$$

$$L_B\left(F_{n-2}^{(n-2)}\right) = n-2,$$

$$u_n - u_{n-1} = L_B\left(F_{n-2}^{(n-2)}\right) + 1 = (n-2) + 1 = n-1.$$

И начальные условия:

$$F_2^3 = F_2^2 \oplus x_3 F_1^2 = x_1 x_2 \oplus x_3(x_1 \oplus x_2),$$

$$u_4 = L_B(F_2^3) = 5.$$

Решение ищется описанным выше методом.

$$L_B\left(F_{n-2}^{(n-1)}, G_3\right) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1.$$

Полученная оценка используется для улучшения показателя $L_B\left(F_{n-2}^{(n)}\right)$:

$$L_{B_3}\left(F_{n-2}^{(n)}, G_3\right) = \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{6}n - 1.$$

В результате можно сформулировать очередную теорему.

Теорема 4. Для функции $F_{n-2}^{(n)}$ оценка $L_B\left(F_{n-2}^{(n)}\right) \le \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{6}n - 1.$

Согласно особенностям строения формулы $F_{n-2}^{(n)}$ показатель L_B на единицу превосходит показатель L_F. Аналогично теореме 3:

Теорема 5. Для функции $F_{n-2}^{(n)}$ оценка $L_F\left(F_{n-2}^{(n)}\right) \le \frac{1}{3}n^3 - n^2 + \frac{5}{3}n - 4.$

Доказательство следует из проведённой минимизации булевых формул с помощью функциональной декомпозиции.

Повышая точность оценки, аналогично доказательству теоремы 4:

Теорема 6. Для функции $F_{n-2}^{(n)}$ оценка $L_F\left(F_{n-2}^{(n)}\right) \le \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{6}n - 2.$

Для оценки схемной реализации функции $F_{n-2}^{(n)}$ необходимо привести формулу из базиса $G_3 = \{\oplus, \wedge\}$ в базис $G_1 = \{\wedge, \vee, \neg\}$.

$$F_{n-2}^{(n)} = F_{n-2}^{(n-1)} \oplus x_n \cdot F_{n-3}^{(n-1)} = \overline{F_{n-2}^{(n-1)}} \cdot x_n \cdot F_{n-3}^{(n-1)} \vee F_{n-2}^{(n-1)}\overline{x_n \cdot F_{n-3}^{(n-1)}}.$$

В полученной реализации в базисе G_1 для текущей итерации формулы $F_{n-2}^{(n-1)}$ и $F_{n-3}^{(n-1)}$ реализованы неявно, подразумевается, что они представлены в базисе G_3, а их композиция – в базисе G_1. Предполагается, что на каждой следующей итерации получившиеся подформулы переводятся в базис G_1. Данной формуле соответствует следующая схема:

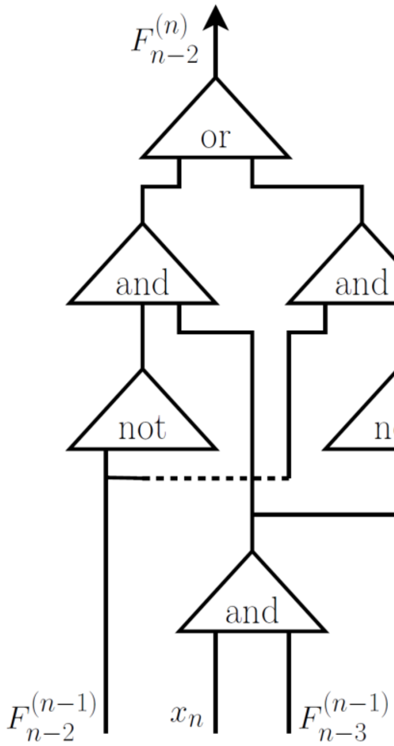

Рис. 1 Схема n-й итерации разложения в G_1

Оценке показателя L_S для данной схемы будет соответствовать следующее функциональное уравнение:

$$L_S\left(F_{n-2}^{(n)}\right) = L_S\left(F_{n-2}^{(n-1)}\right) + 6 + L_S\left(F_{n-3}^{(n-1)}\right).$$

Решая его описанным выше методом, и получив оценку можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 7. Для функции $F_{n-2}^{(n)}$ оценка $L_S\left(F_{n-2}^{(n)}\right) \leq \frac{1}{6}n^3 + 2n^2 - \frac{13}{6}n - 11.$

Данную оценку возможно улучшить, воспользовавшись ещё одним способом представления операции $\oplus$ в базисе G_1.

$$F_{n-2}^{(n)} = F_{n-2}^{(n-1)} \oplus x_n \cdot F_{n-3}^{(n-1)} = \overline{F_{n-2}^{(n-1)} \cdot x_n \cdot F_{n-3}^{(n-1)}}\left(F_{n-2}^{(n-1)} \vee x_n \cdot F_{n-3}^{(n-1)}\right).$$

Данная формула представима в виде следующей схемы:

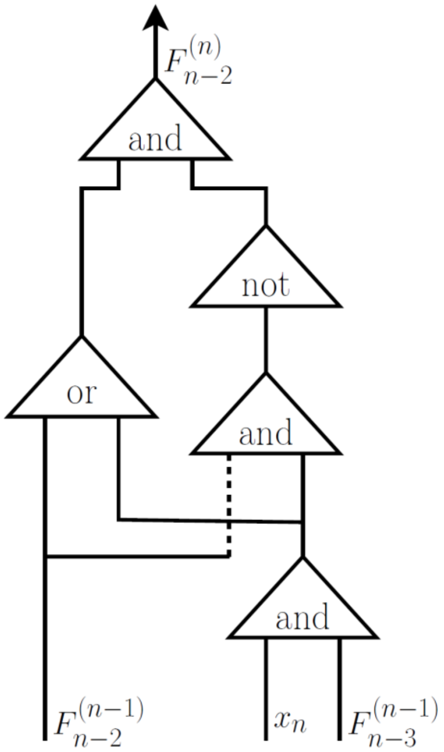

Рис. 2 Альтернативная схема n-й итерации разложения в G_1

Таким образом происходит уточнение теоремы 7.

Теорема 8. Для функции $\mathrm{F}_{\mathrm{n-2}}^{(\mathrm{n})}$ оценка $\mathrm{L_S}\left(\mathrm{F}_{\mathrm{n-2}}^{(\mathrm{n})}\right) \leq \frac{1}{6}\mathrm{n}^3 + \frac{3}{2}\mathrm{n}^2 - \frac{5}{3}\mathrm{n} - 11.$

Сравнивая полученные оценки, можно выбрать наилучшие.

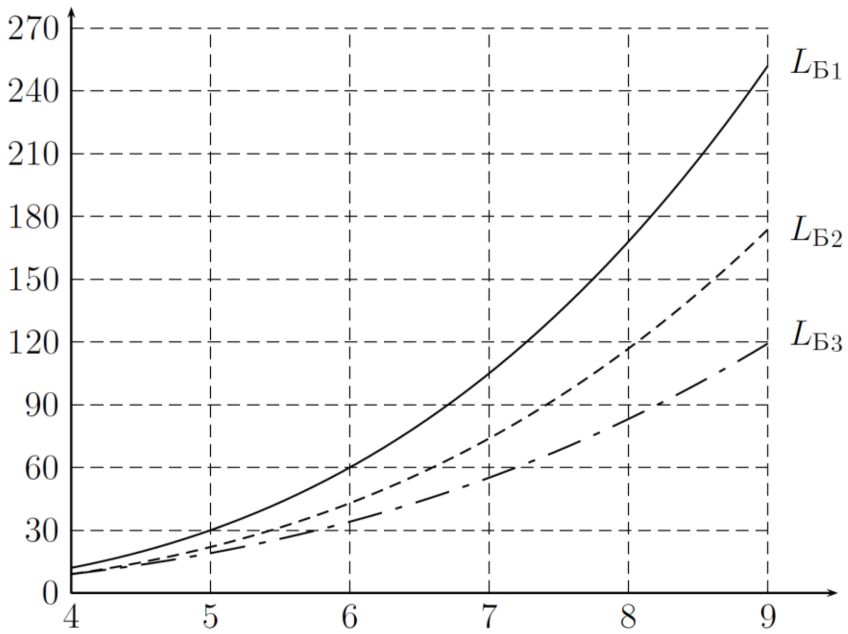

Рис. 3 Сравнение показателей качества $L_{\text{Б}}$

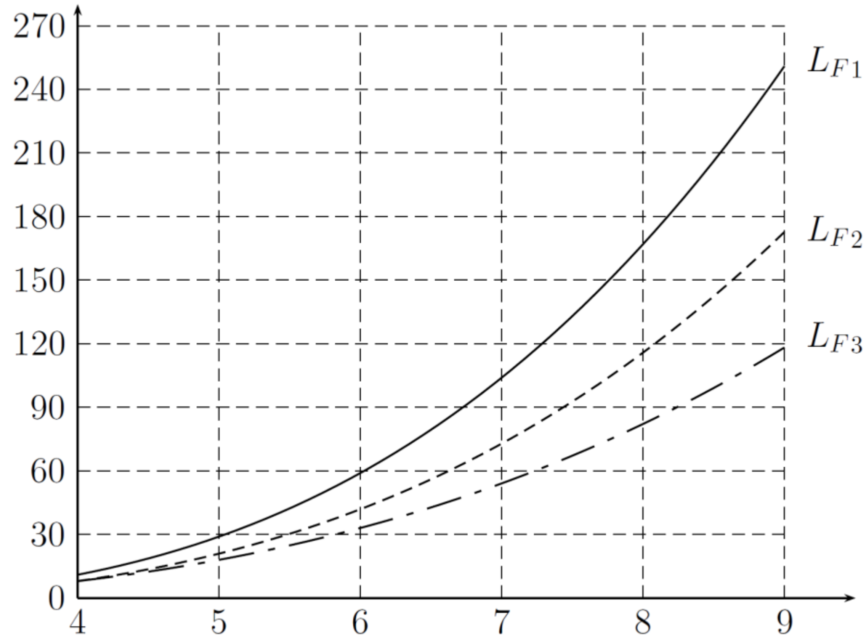

Рис. 4 Сравнение показателей качества L_F

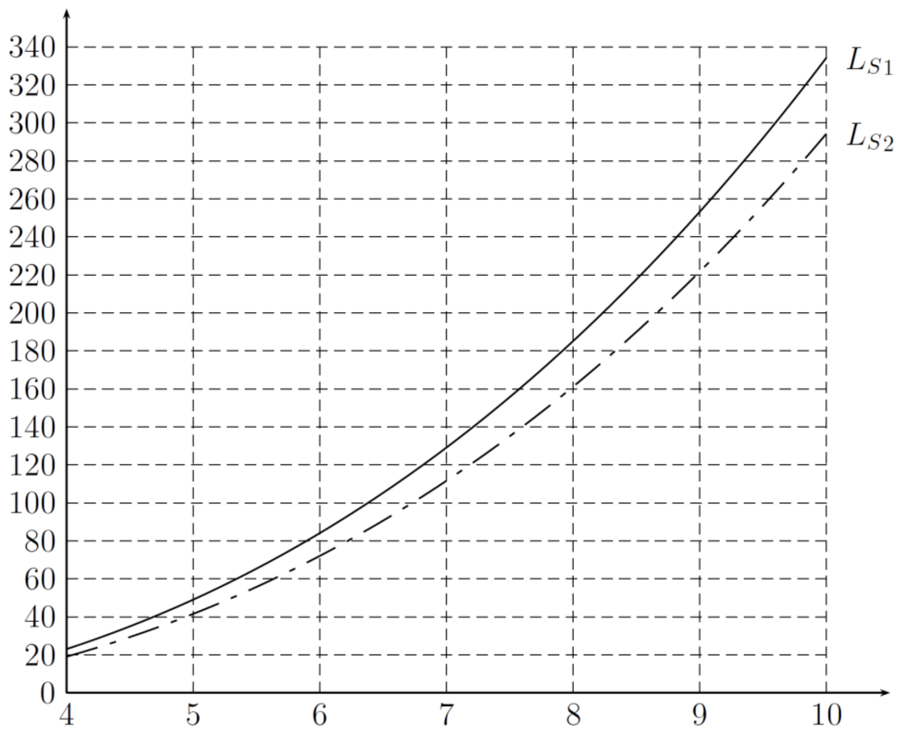

Рис. 5 Сравнение показателей качества L_S

В последней (третьей) главе представлены вопросы автоматизации редукции количества переменных. Подробно приведён алгоритм, на основе которого был построен программный комплекс автоматизированной оценки сложности. А также были отработаны основные особенности поведения алгоритма на функциях с малым числом переменных.

Для работы алгоритма используется следующее представление функции. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_j, \dots, x_n\}$ – множество булевых переменных. Произвольная булева функция $f^{(n)}(X)$ задаётся полиномом Жегалкина:

$$F^{(n)} = K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_i \oplus \dots \oplus K_m,$$

в базисе $G_3 = \{\&, \oplus, 0, 1\}$, где

- n – число переменных,
- m – длина полинома Жегалкина,
- K_i – монотонная элементарная конъюнкция (ЭК) ранга r_i, $i = \overline{1, m}$,
- $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ – вектор рангов полинома Жегалкина.

Полином Жегалкина $F^{(n)}$ задаётся при помощи матрицы $K_{i,j}$ размером $[m \times n]$, представляемой в виде таблицы с числом строк – $(m + 1)$ и столбцов – $(n + 1)$. Определяются матрица и таблица следующим образом: в ячейку $K_{i,j}$ пишется 1, если $x_j \in \{K_i\}$, иначе $K_{i,j} = 0$ $(i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$, где под $\{K_i\}$ понимается множество переменных, образующих элементарную конъюнкцию K_i.

В столбец $\left(i = \overline{1, m},\ n + 1\right)$ записывается ранг элементарной конъюнкции K_i, вычисляемый следующим образом:

$$r_i = r_{i,n+1} = \sum_{j=1}^{n} K_{i,j}.$$

Вектор $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_i, \dots, r_m)$ рангов ЭК полинома Жегалкина, упорядочивается для алгоритма один раз отношением “≥”. Получаем $r_1 \geq \dots \geq r_i \geq \dots \geq r_m$. В строку $\left(n + 1,\ j = \overline{1, n}\right)$, записывается p_j – число повторений переменной x_j, $j = \overline{1, n}$, в формуле $F^{(n)}$:

$$p_j = p_{m+1,j} = \sum_{i=1}^{m} K_{i,j}.$$

Так получен вектор $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_j, \dots, p_n)$ повторяемости переменных из множества $X = \{x_1, \dots, x_j, \dots, x_n\}$ в формуле $F^{(n)}$, т. е. переменная x_j, $j = \overline{1, n}$, повторяется в формуле $F^{(n)}$ p_i раз.

В ячейку $(m + 1, n + 1)$ пишется $L_B = \sum_{i=1}^{m} r_i$ – число букв в формуле $F^{(n)}$.

	x_1	…	x_j	…	x_n	$\mathbf{r}$
K_1	0/1	…	0/1	…	0/1	r_1
…	…	…	…	…	…	…
K_m	0/1	…	0/1	…	0/1	r_m
$\mathbf{p}$	p_1	…	p_j	…	p_n	$L_Б$

Таб. 2 Матричное представление полинома

В основе алгоритма редукции переменных лежит следующее функциональное уравнение:

$$F^{(n)} = \left(x_j \cdot F_1^{(n-1)}\right) \oplus F_2^{(n-1)},$$

где нижние индексы 1 и 2 – номера соответствующих остаточных подфункций, заданных формулами, рассматриваемых на одном множестве $X' = X \setminus \{x_j\}$. В алгоритме они соответственно записываются как $F' = F_1^{(n-1)}$ и $F'' = F_2^{(n-1)}$.

В начале определяется максимальная компонента p_{jmax} вектора $\mathbf{p}$ и её индекс jmax, то есть $p_{jmax} = \max(p_1, \dots, p_j, \dots, p_n)$, $j = \overline{1, n}$, т. е. максимально повторяющаяся переменная x_{jmax} повторяется p_{jmax} раз. Таких переменных может быть несколько, выбираем из них с меньшим номером переменной и меньшим номером элементарной конъюнкции K_i, для сохранения порядка рангов. После вынесения данной переменной за скобку функция $f^{(n)}$, реализуемая в виде формулы $F^{(n)}$ в общем случае, разбивается на две более простые подформулы и две двухместные базисные функции, соединяющие подформулы и выделяемую переменную x_j, в одну формулу. Процесс продолжается, пока все остаточные подформулы не перейдут в группу реализованных. Так будет получена формула $F_{с.ф.}^{(n)}$ и оценка $L_{F\left(F_{с.ф.}^{(n)}, G_3\right)}$.

Дано:

$F^{(n)}$ – формула, правильность задания которой при вводе проверяется,

таблица, содержащая матричное представление формул,

t_1 – счётчик записи в таблицу, содержащую формулы,

t_2 – счётчик чтения из таблицы, содержащей формулы,

L_F – счётчик количества базисных подфункций;

Шаг 1. {Подготовка начальных данных}

для исходной формулы $F^{(n)}$ заполняется таб. 2, с векторами **r** и **p**,

выполняется инициализация переменных:

$L_F = 0$,

$t_1 = 0$,

$t_2 = 0$;

Шаг 2. {Формула является элементарной конъюнкцией}

если $m = 1$, то

начало

$L_F = L_F + r_1 - 1$,

переход к шагу 6 {чтение};

конец

Шаг 3. {Формула является сложением по модулю 2 переменных}

если $r_1 = 1$, то

начало

$L_F = L_F + m - 1$,

переход к шагу 6 {чтение};

конец

Шаг 4. {Определение переменной x_{jmax}}

$p_{jmax} = \max(p_1, \dots, p_j, \dots p_n)$,

Шаг 5. {Запись остаточных подфункций F' и F''}

в таблицу, соответствующую подформуле F' переносятся только те строки из таблицы F, в которых $x_{jmax} = 1$ и исключаются нулевые столбцы и x_{jmax}, вычисляются вектора $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{p}'$,

F' записывается в таблицу, содержащую все формулы под номером t_1,

$t_1 = t_1 + 1$,

если $m' < m$

начало

в таблицу, соответствующую подформуле F'' переносятся только те строки из таблицы F, в которых $x_{jmax} = 0$ и исключаются нулевые столбцы и x_{jmax},

вычисляются вектора $\mathbf{r}''$ и $\mathbf{p}''$,

F'' записывается в таблицу, содержащую все формулы под номером t_1,

$t_1 = t_1 + 1$;

конец

Шаг 6. {Чтение}

$t_2 = t_2 + 1$,

если $t_2 \leq t_1$, работа алгоритма оканчивается,

из таблицы, содержащей промежуточные подформулы, считывается полином с номером t_2,

$L_F(F^{(n)}, G_3) = L_F + 1$.

Конец алгоритма.

Результатом работы алгоритма является верхняя оценка сложности, заданной в виде полинома Жегалкина логической функции.

Во втором разделе третьей главы рассматриваются примеры работы алгоритма и частные случаи, обнаруженные при работе программы над функциями с малым числом переменных.

В заключении приведены основные результаты работы.

- ✓ Рассмотрены основные методы синтеза логических формул, и соответствующих схем из функциональных элементов.
- ✓ Предложен метод распараллеливающей структурно-функциональной декомпозиции булевых функций, позволяющие аналитически получать верхние оценки сложности показателей для представления функции – полинома $F^{(n)}$ в классе формул, а также – в классе схем S.

- ✓ Данный метод применён для аналитического нахождения ряда оценок для полинома Жегалкина строения $F_{n-2}^{(n)}$ в классах формул и схем из функциональных элементов.
- ✓ Выделены частные случаи получения счётных множеств булевых функций минимальной сложности L_B и L_F функции – полинома $F^{(n)}$ (а, также для сложности показателя L_S для схем S).
- ✓ Найдена эффективная реализация вычислительного алгоритма синтеза булевых формул на основе приведения их к скобочному виду.
- ✓ Проведена рационализация вычислительного алгоритма синтеза схем из функциональных элементов на основе операции ветвления некоторых их выходов.
- ✓ На основании построенного алгоритма написана программа, которая была зарегистрирована в РосПатенте.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в журналах, входящих в список ВАК:

1. Ванг Л., Егорова Е. К., Мокряков А. В. Развитие теории гиперграфов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2018. – № 1. – С. 111–116. (**№568** из перечня рецензируемых научных изданий, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования)

   Wang L., Egorova E.K., Mokryakov A.V. Development of Hypergraph Theory // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2018. Т. 57, № 1. (**№110** из перечня рецензируемых научных изданий, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования)
2. Егорова Е. К., Чебурахин И. Ф. Автоматизация конструирования определённых счётных классов булевых функций и минимизация их сложности // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2014. – № 8. – С. 3-9. (**№1268** из перечня рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук)
3. Егорова Е. К., Чебурахин И. Ф. О минимизации сложности и автоматизации эффективного представления булевых функций в классах формул и схем // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2013. – № 3. – С. 121-129. (**№568** из перечня рецензируемых научных изданий, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования)

   Egorova E.K., Cheburakhin I.F. On the minimization of complexity and automation of efficient representation of boolean functions in classes of formulas and circuits // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2013. Т. 52, № 4. (**№110** из перечня рецензируемых научных изданий, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования)

Публикации в других журналах и тезисы конференций:

1. Егорова Е. К. О методах синтеза булевых формул и схем // XLII Гагаринские чтения: тез. международной молодёжной научной конференции. – Москва, 2016. – С. 211-212.
2. Гурченков А. А., Егорова Е. К. Автоматизация задачи определения сложности булевой функции // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2014. – № 5(29). – С. 10-21.
3. Гурченков А. А., Егорова Е. К. Особенности автоматизации синтеза булевых функций // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – № 12(24). – С. 53-61.
4. Егорова Е. К. Алгоритм минимизации сложности представления произвольной булевой функции // XXXIX Гагаринские чтения: тез. международной молодёжной научной конференции. – Москва, 2013. – С. 56-57.
5. Егорова Е. К. Программный комплекс минимизации сложности представления произвольной булевой функции в классе формул // XXXVIII Гагаринские чтения: тез. международной молодёжной научной конференции. – Москва, 2012. – т. 5. – С. 56-58.
6. Егорова Е. К., Мокряков А. В. Минимизация сложности представления произвольной булевой функции в классе формул программным методом // Молодёжные идеи и проекты: тез. I форума союзного государства вузов инженерно-технического профиля. – Минск, 2012. – С. 7-8.
7. Егорова Е. К., Чебурахин И. Ф. Автоматизация и оптимизация синтеза дискретных устройств обработки информации и управления // Управление, автоматизация и окружающая среда – 2012: тез. международной научно-технической конференции молодых учёных, аспирантов и студентов. – Севастополь, 2012. – С. 15-18.
8. Егорова Е. К. О сложности дискретных управляющих систем // Кибернетика: вчера, сегодня, завтра: тез. международной научно-практической конференции молодых учёных и педагогов, аспирантов и студентов. – Дмитров, 2011. – С. 11-12.

9. Егорова Е. К. Сложность представления симметрических булевых функций в классе полиномов Жегалкина // XXXVII Гагаринские чтения: тез. международной молодёжной научной конференции. – Москва, 2011. – т. 5. – С. 88-90.
10. Егорова Е. К., Мокряков А. В. Об исчислении экстремальных 2-комплексов // XXXVII Гагаринские чтения: тез. международной молодёжной научной конференции. – Москва, 2011. – т. 5. – С. 111-112.
11. Егорова Е. К. Показатели качества реализации симметрических полиномов Жегалкина степени $n-2$ // Информационные и телекоммуникационные технологии: тез. межвузовской молодёжной научно-практической конференции. – Москва, 2009. – С. 30-46.

Регистрация программ для ЭВМ:

1. Минимизация сложности представления произвольной булевой функции $f^{(n)}$ (n переменных) в классе формул. Версия 1.0: а. с. № 2012616794 от 30 июля 2012г. / Е. К. Егорова, И. Ф. Чебурахин. Официальный бюллетень «Программы для ЭВМ. Базы данных. Топологии интегральных микросхем»