

На правах рукописи

*Ломов*

**Ломов Никита Александрович**

**Морфологические дескрипторы объектов переменной  
ширины на цифровых изображениях**

Специальность 05.13.17 —  
«Теоретические основы информатики»

Автореферат  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2020

**Работа выполнена на кафедре математических методов прогнозирования факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.**

Научный руководитель: **Местецкий Леонид Моисеевич,**  
доктор технических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Щепин Евгений Витальевич,**  
доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН,  
ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,  
главный научный сотрудник отдела геометрии и топологии

**Середин Олег Сергеевич,**  
кандидат физико-математических наук,  
Институт прикладной математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет»,  
доцент кафедры информационной безопасности

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет»

Защита состоится «17» декабря 2020 года в 15:00 на заседании диссертационного совета Д002.073.05 при Федеральном исследовательском центре «Информатика и управление» Российской академии наук по адресу: 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФИЦ ИУ РАН и на сайте <http://frccsc.ru>.

Автореферат разослан « » ноября 2020 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
Д002.073.05,  
кандидат технических наук



Рейер Иван Александрович

## Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена исследованию и разработке математических моделей для универсального описания ширины объектов на бинарных изображениях. Предложенные модели способны отражать во всей полноте распределение ширины в тех случаях, когда ширина объекта варьируется в различных его частях, а форма объекта может изменяться путём гибких деформаций. Разработаны высокоэффективные вычислительные процедуры для расчёта дескрипторов, позволяющих сравнивать такие объекты по ширине и классифицировать их.

**Актуальность темы.** В настоящее время активно развиваются методы компьютерного зрения, которые находят своё применение в системах видеонаблюдения, медицине, геоинформатике и других областях. При этом многие из возникающих в этих областях задач — например, распознавание поз, жестов, дорожных знаков, анализ состояния эритроцитов или строения горных пород — можно свести к распознаванию формы плоских объектов.

При такой постановке входные данные могут быть достаточно разнообразными не только в силу различий между самими объектами, но и в силу того, что один и тот же объект может находиться в разных позах, быть зафиксирован с различных ракурсов, образовывать самоокклюзии и т. д. С точки зрения описания формы это означает, что мы имеем дело с так называемыми гибкими артикуляциями. При всём разнообразии гибких артикуляций интуитивно ясно, что есть свойства объекта, которые остаются неизменными при их применении: это свойства, связанные с шириной отдельных частей объекта. К примеру, при движении человеческих рук ширина самих рук остаётся неизменной. Это позволяет сделать вывод, что признаки, связанные с шириной объекта, сообщают нам важную информацию о его форме, поэтому разработка эффективных математических моделей ширины выглядит актуальной задачей.

Несмотря на разнообразие способов извлечения информации о ширине, само понятие ширины объекта редко формализуется в явном виде. Заметное исключение представляет общий принцип задания форморазмерных дескрипторов, разработанный Матероном и известный под названием *гранулометрического анализа*<sup>1</sup>. Для описания гранулометрии можно воспользоваться метафорой просеивания. Гранулометрией называется семейство фильтров, параметризованных неотрицательными значениями, для которых выполняются следующие свойства: антиэкстенсивность (просеивание уменьшает количество зёрен), свойство возрастания (просеивание подмножества вложено в просеивание всего множества) и стабильность (результат просеивания через два последовательных сита соответствует

---

<sup>1</sup>Matheron, G. Random Sets and Integral Geometry / G. Matheron. Wiley Series in Probability and mathematical statistics, 1975.

просеиванию через более крупное). Можно считать, что при очередном просеивании удаляются компоненты или их части, имеющие недостаточную ширину.

Типичным способом задания гранулометрий является использование предложенных в рамках математической морфологии Серра<sup>2</sup> операций открытия со структурирующим элементом, заключающихся в последовательном сужении и расширении объекта относительно этого элемента. Примечательно, что хотя теоретически гранулометрии могут быть определены для множеств на пространстве  $\mathbb{R}^2$ , в практических приложениях речь, как правило, идет о множествах на дискретной решетке. Это приводит не только к погрешностям измерения и подсчета, но и делает сами гранулометрические операции некорректными, так как нарушается свойство стабильности. Другим недостатком дискретных методов реализации морфологических операций является их недостаточная вычислительная эффективность.

В результате создание математически элегантных моделей ширины фигуры в сочетании с эффективной процедурой их получения и разработка мощных дескрипторов на их основе составляют во многом открытую проблему, и этот факт определяет актуальность данного исследования.

**Целью** данной работы является разработка математической модели формы объекта на бинарном изображении, удобной для интегрального описания ширины этого объекта, и создание на базе данной модели методов и алгоритмов вычисления ширины, обладающих высокой вычислительной эффективностью. В качестве «отправной точки» рассматривается медиальное представление формы многоугольной фигуры, полученное в результате скелетизации на основе диаграммы Вороного.

**Научные задачи** работы заключаются в следующем:

1. Формализация понятия ширины объекта сложной формы с точки зрения как локального (ширина фигуры в точке), так и глобального (функция распределения ширины объекта) описания. Разработка морфологических дескрипторов ширины объектов на бинарных изображениях, основанных на введенной формализации.
2. Исследование и разработка математических моделей, позволяющих вычислять предложенные дескрипторы, разработка соответствующих алгоритмов вычисления, обладающих высокой вычислительной эффективностью и точностью. Доказательство корректности разработанных алгоритмов.
3. Адаптация разработанных моделей и алгоритмов для вычисления дескрипторов ширины с особыми условиями: в случае полуточновых входных данных, наличия у объекта сегментации,

---

<sup>2</sup>Serra, J. Image Analysis and Mathematical Morphology / J. Serra. — Orlando, FL, USA : Academic Press, Inc., 1983.

- необходимости учёта пространственного расположения объекта и с целью построения мультимодальных дескрипторов формы.
4. Практическая реализация разработанных методов построения моделей и оценки ширины объектов, проведение вычислительных экспериментов для проверки корректности полученных результатов.
  5. Проверка применимости разработанных методов оценки ширины для описания гибких объектов, оценка устойчивости методов к гибким артикуляциям.
  6. Применение разработанных методов для специализированных прикладных задач компьютерного зрения, связанных с распознаванием плоских объектов на изображениях по ширине.

**Научная новизна.** В диссертации предложены новые математические модели, позволяющие анализировать форму объектов переменной ширины на бинарном изображении. Разработаны новые алгоритмы вычисления признакового описания формы, характеризующего ширину объекта, опирающиеся на данные модели. Рассмотрены вариации разработанных моделей и дескрипторов для случаев различных типов входных данных и особенностей постановки задачи. Предложены алгоритмы для расчёта дистанционного преобразования фигуры и вычисления ширины фигуры в точке на основе медиального представления формы и решения оптимизационной задачи. В силу этого примеры применения предложенных методов к решению практических задач также являются новыми.

Разработанные методы значительно превосходят по вычислительной эффективности существующие аналоги. В отличие от большинства существующих методов работа ведётся с непрерывной, а не растровой моделью формы. Предложенные методы способны работать с бинарными изображениями любой сложности, а источником погрешности в измерении ширины выступает только аппроксимация многоугольными фигурами формы объектов на растровых изображениях. При этом для самих многоугольных фигур ширина определяется с точностью, ограниченной лишь точностью компьютерных вычислений.

**Научная значимость** работы состоит в разработке методов вычисления дескрипторов ширины для сравнения и классификации объектов по форме. Предложен подход, позволяющий сравнивать объекты между собой по ширине, используя их медиальное представление. Такой подход не зависит от сложности и особенностей этого представления. Изложенная в работе методика предоставляет математический аппарат для конструирования новых дескрипторов формы изображения, использующих данные о ширине, и методов их сравнения.

**Практическая значимость** состоит в разработке детальной программной реализации всех предложенных методов, а также их приложений

к задаче распознавания шрифтов по изображениям текста и оценке морфогенеза плоских червей. Для решения практических задач разработан соответствующий программный комплекс.

**Методология и методы исследования.** В работе использованы методы вычислительной геометрии, математической морфологии, теории графов, методов оптимизации, обработки и анализа изображений, теории сложности алгоритмов. Работа носит экспериментально-теоретический характер. Разработка программного кода велась на языке C++ и в системе MATLAB с использованием библиотеки скелетизации, разработанной Л.М. Местецким. Эксперименты проводились на модельных данных, открытых базах изображений и изображениях из реального мира, полученных в результате фотосъёмки или сканирования.

**Предлагаемый подход** к построению дескрипторов формы, чувствительных к изменению ширины и инвариантных к изгибу объекта, основан на идеях использования медиального представления формы в виде множества срединных осей (скелета) и радиальной функции, заданной на этих осях<sup>3</sup>. Важная связь между морфологическими операциями и скелетом была отмечена ещё на ранних этапах развития математической морфологии<sup>4</sup>. Известно, что не только сам скелет можно получить в результате морфологических операций, но и, зная значения радиальной функции, можно восстановить по скелету результаты морфологических операций с исходной фигурой. Помимо этого, значение радиальной функции можно рассматривать как локальную характеристику ширины объекта в какой-либо из его частей. Так как в рамках непрерывной морфологии Л. М. Местецкого<sup>5</sup> были разработаны развитые и эффективные методы вычисления непрерывных скелетов, предлагается использовать для разработки дескрипторов ширины именно средства непрерывной морфологии.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Морфологические дескрипторы объектов на цифровых изображениях, основанные на непрерывном медиальном представлении формы: площадь и моменты дискового покрытия многоугольных фигур, описывающих форму объектов.
2. Метод вычисления площади дискового покрытия многоугольной фигуры и функции морфологической ширины как интегрального описания ширины фигуры.
3. Метод вычисления геометрических моментов дискового покрытия многоугольной фигуры и функции морфологических моментов

---

<sup>3</sup>Siddiqi, K. Medial Representations: Mathematics, Algorithms and Applications / K. Siddiqi, S. Pizer. — 1st Edition. — Springer Publishing Company, Incorporated, 2008.

<sup>4</sup>Lantuejoul, C. La squelettisation et son application aux mesures topologiques de mosaïques polycristallines. PhD thesis / Lantuejoul C. — 1979.

<sup>5</sup>Местецкий, Л. Непрерывная морфология бинарных изображений: фигуры, скелеты, циркуляры / Л. Местецкий. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.

как интегрального описания пространственного распределения ширины фигуры.

4. Методы вычисления производных дескрипторов ширины — площа-ди покрытия сегментированной фигуры и совокупной интенсивно-сти системы дисковых покрытий полутонового изображения.
5. Методы вычисления точечных дескрипторов ширины бинарного изображения — карты расстояний (distance transform) и карты тол-щин — на базе непрерывного медиального представления формы объектов изображения.
6. Методы идентификации шрифта по изображению текста и оценки скорости регенерации плоских червей-планарий на основе разра-ботанных дескрипторов ширины.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается их теорети-ческим обоснованием, а также подтверждается результатами вычислитель-ных экспериментов, проведённых при помощи программного обеспечения, реализующего предложенные методы.

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались на следу-ющих конференциях:

- 24-я международная конференция по компьютерной графике, об-работке изображений и машинному зрению «ГрафиКон-2014» (Ростов-на-Дону, 2014) [6];
- 26-я международная конференция по компьютерной графике, об-работке изображений и машинному зрению «ГрафиКон-2016» (Нижний Новгород, 2016) [7];
- 11-я международная конференция «Интеллектуализация обработ-ки информации» ИОИ-2016 (Барселона, 2016) [8; 9];
- 8-я научно-техническая конференция «Техническое зрение в систе-мах управления» ТЗСУ-2017 (Москва, 2017) [10];
- Международная конференция «Техники фотограмметрии и ком-пьютерного зрения для задач видеонаблюдения, биометрии и биомедицины» PSBB-2017 (Москва, 2017) [4];
- 12-я международная конференция по теории и приложениям ком-пьютерного зрения VISAPP 2017 (Порту, 2017) [5];
- 27-я международная конференция компьютерной графике, об-работке изображений и машинному зрению «ГрафиКон-2017» (Пермь, 2017) [11];
- 18-я Всероссийская конференция с международным участием «Ма-тематические методы распознавания образов» ММРО-2017 (Таган-рог, 2017) [12].

Автор принимал активное участие в работе научного семинара Л.М. Местецкого «Непрерывные морфологические модели и алгоритмы» (фа-культет вычислительной математики и кибернетики МГУ). Результаты научного-исследовательской работы были представлены на московском

семинаре «Морфологический анализ данных» под руководством Ю.П. Пытьева (физический факультет МГУ), международном семинаре «Распознавание RGB-D изображений в системе компьютерного зрения» и в рамках совместного российско-индийского научного проекта (доклады в университетах городов Хайдарабад, Майсур и Мангалор, декабрь 2017).

Материалы диссертации использовались в работах по грантам РФФИ №№ 14-01-00716, 15-07-01323 и 17-01-00917.

**Личный вклад.** Все результаты, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно. Постановка задачи была выполнена совместно с научным руководителем. В совместных публикациях в трудах конференции «ГрафиКон-2014» [6] и «Приволжском научном журнале» [1] автор внес вклад в теоретическое обоснование и практическую реализацию метода, в публикации в трудах конференции «ГрафиКон-2017» [11] автором разработаны методы, использующие описание ширины, и проведены эксперименты с ними.

**Публикации.** Основные результаты по теме исследования изложены в 12 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1–3], 2 опубликованы на английском языке в изданиях, индексирующихся системами Scopus и Web of Science [4; 5], 3 — в сборниках трудов конференций [6; 7; 11], 4 — в сборниках тезисов докладов [8–10; 12].

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав и заключения. Полный объём работы составляет 185 страниц, включая 80 рисунков и 6 таблиц. Список литературы содержит 115 наименований.

## Содержание работы

**Введение** содержит общую характеристику работы, обоснование актуальности темы исследования, цели и задачи диссертационного исследования, основные положения, выносимые на защиту.

**Первая глава** посвящена обзору математических средств — теоретических оснований, способов представления и преобразования формы, алгоритмических приёмов — предназначенных для построения и эффективного вычисления дескрипторов ширины, характеризующих весь спектр значений ширины в различных точках фигуры.

**Раздел 1.1** содержит основные положения математической морфологии и общий принцип построения «функций распределения» ширины, заданный на их основе.

Пусть дано произвольное множество  $E$ , на множестве подмножеств которого  $\mathcal{P}(E)$  определено отношение включения ( $\subseteq$ ), а также операции объединения ( $\cup$ ) и пересечения ( $\cap$ ).

**Определение 1.** Гранулометрией называется семейство операторов  $\Psi = \{\psi_\lambda\}$ , параметризованных неотрицательной величиной  $\lambda$  (размером), обладающее следующими свойствами:

- $\psi_\lambda(X) \subseteq X$  для всех  $\lambda$  (антиэкстенсивность);
- $(X \subset Y) \Rightarrow \psi_\lambda(X) \subseteq \psi_\lambda(Y)$  для всех  $\lambda$  (свойство возрастания);
- $\psi_\lambda \psi_\mu(X) = \psi_\mu \psi_\lambda(X) = \psi_{\max(\lambda, \mu)}(X)$ ,  $\lambda, \mu \geq 0$  (стабильность).

**Определение 2.** Рассмотрим преобразования множества  $X$  гранулометрией  $\Psi$ . Гранулометрической функцией называется отображение  $G_\Psi : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0\}$ , определяемое как

$$G_\Psi(x) = \max\{\lambda \mid x \in \psi_\lambda(X)\}. \quad (1)$$

**Определение 3.** Гранулометрической кривой называется зависимость некоторой меры  $m$  множества  $\psi_\lambda(X)$  от размерного параметра:

$$F_\Psi(\lambda) = m(\psi_\lambda(X)). \quad (2)$$

Значение гранулометрической функции можно интерпретировать как ширину фигуры в точке, в гранулометрическую кривую — как функцию распределения ширины в точках фигуры.

**Определение 4.** Открытием фигуры  $X$  структурирующим элементом  $B$  является множество вписанных в фигуру примитивов  $B$  с точностью до смещения:

$$\begin{aligned} X \circ B &= (X \ominus B) \oplus B = \{z + b : z \in (X \ominus B), b \in B\} = \\ &= \{z + b : z \in \{z : B_z \subset X\}, b \in B\} = \bigcup_{\{z : B_z \subset X\}} B_z, \end{aligned}$$

где  $B_z = \{z + b \mid b \in B\}$ .

Известно, что в случае фигур на плоскости гранулометрию можно задать семейством открытий с масштабированным по  $r$  структурирующим элементом  $B(r) = \{rb \mid r \in B\}$ , если  $B$  — выпуклое и замкнутое множество. Однако на практике морфологические операции, как правило, вычисляются для множеств на дискретной решётке  $\mathbb{Z}^2$ , а дискретные фигуры составляют из точек с целочисленными координатами, принадлежащих непрерывным фигурам. Несмотря на то что такая дискретизация кажется естественной, она может приводить к довольно неприятным эффектам, в частности, к нарушению требования стабильности. Кроме того, такие процедуры обладают достаточно низкой вычислительной эффективностью.

В разделе 1.2 выделены основные направления разработки вычислительно эффективных процедур для реализации требуемых морфологических преобразований, сделан обзор методов, использующих непрерывные

представления формы, в том числе непрерывные скелеты. Отмечается, что хотя методы на основе вычислительной геометрии обладают большей вычислительной эффективностью, чаще всего они используют многоугольную аппроксимацию не только самих фигур, но и структурирующих элементов, что ведёт к значительной погрешности результатов морфологических операций.

**В разделе 1.3** описан способ перехода от дискретной бинарной сцены к эквивалентной ей непрерывной, обладающей следующими свойствами:

- внутренние чёрные (не имеющие соседних белых) пиксели оказываются внутренними точками объекта, внутренние белые — внутренними точками фона;
- граничные чёрные и белые точки могут оказаться либо внутренними для объекта и фона соответственно, либо лежать на границе объекта и фона;
- для аппроксимации используются разделяющие многоугольные контуры минимального периметра.

**В разделе 1.4** даны основные сведения об устройстве скелета многоугольной фигуры.

**Определение 5.** *Фигурой называется замкнутая область на плоскости, ограниченная конечным числом непересекающихся замкнутых элордановых кривых.*

**Определение 6.** *Многоугольной фигурой называется фигура, у которой граница состоит из замкнутых ломаных линий.*

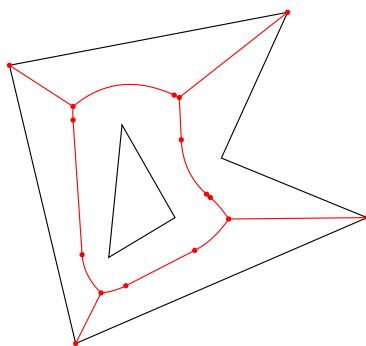


Рис. 1 — Многоугольная фигура и её скелет

**Определение 7.** *Скелетом фигуры называется множество точек-центров всех вписанных кругов фигуры.*

Скелет многоугольной фигуры (рис. 1) имеет вид геометрического графа, рёбрами которого являются отрезки прямых линий и квадратичных парабол, а вершинами — концевые точки рёбер. Каждое ребро представляет собой связное множество точек-центров вписанных кругов, касающихся одной и той же пары сайтов, называемых *образующими* сайтами ребра. Если это пара однотипных сайтов (два сайта-точки или два сайта-сегмента), то ребро имеет форму прямолинейного отрезка. Если же сайты разнотипные (сайт-точка и сайт-сегмент), то ребро представляет собой отрезок квадратичной параболы.

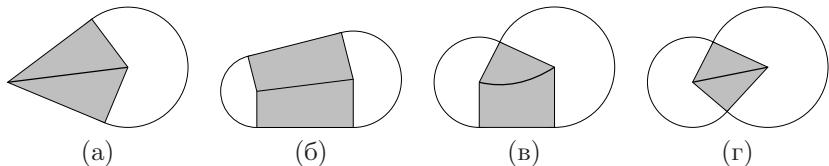


Рис. 2 — Бициклы: оси, собственные области, внешние сектора концевых кругов

**Определение 8.** *Бициклом называется множество всех вписанных кругов с центрами на одном ребре скелета. Линия ребра называется осью бицикла.*

**Определение 9.** *Спицей называется отрезок прямой, соединяющий точку скелета с ближайшей точкой границы фигуры.*

Бицикл представляет собой объединение собственной области и пары внешних секторов. Форма собственной области зависит от типа бицикла (рис. 2). Для линейного бицикла она складывается из двух треугольников (рис. 2а) либо двух трапеций (рис. 2б). В параболическом бицикле — это фигура «домик», которую можно рассматривать как объединение трапеции и треугольника (рис. 2в), в гиперболическом — объединение двух треугольников (рис. 2г).

**Определение 10.** *Собственной областью бицикла называется объединение всех спиц, инцидентных точкам оси бицикла.*

Собственные области бициклов образуют покрытие всей многоугольной фигуры, совпадающее с объединением всех спиц, причём пересекаться области могут только по своим граничным спицам.

Также рассмотрены методы построения дескриптора ширины как функции распределения значений локальной ширины в точках фигуры, основанные на непрерывном медиальном представлении:

- морфологическая ширина (значение в точке — радиус максимального покрывающего фигуру круга);

- медиальная ширина (значение в точке — длина проходящей через точку спицы);
- дистанционная ширина (значение в точке — расстояние до ближайшей точки границы).

Показано, что только морфологическая ширина соответствует аксиомам гранулометрии, что определяет наше желание разработать точные и высокоскоростные алгоритмы её вычисления.

Завершает главу **раздел 1.5** с выводами.

**Во второй главе** вводится понятие дискового покрытия многоугольной фигуры, анализируется его форма при заданном размере круга, описывается способ его последовательного преобразования при увеличении круга и метод расчёта дескриптора ширины — площади дискового покрытия.

**В разделе 2.1** даны основные определения и сформулирована главная задача главы.

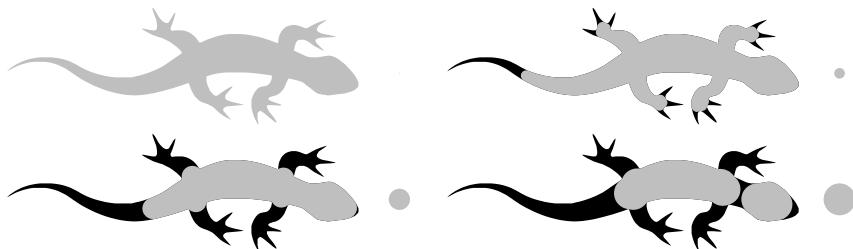


Рис. 3 — Дисковые покрытия фигуры «ящерица» (справа изображены образцы покрывающих дисков)

**Определение 11.** *Дисковое  $r$ -покрытие фигуры  $X$  (обозначается  $X(r)$ ) — объединение всех лежащих внутри фигуры кругов радиуса  $r$ .*

**Определение 12.** *Морфологическая ширина фигуры (обозначается  $\mathfrak{F}(r)$ ) — это площадь её дискового  $r$ -покрытия как функция от  $r$ .*

Таким образом, дисковое  $r$ -покрытие (рис. 3) фигуры  $X$  является её открытием с дисковым структурирующим элементом  $B(r) = \{z : ||z|| \leq r\}$ , а производная его площади — морфологической ширины — представляет собой гранулометрическую кривую. Морфологическая ширина является невозрастающей функцией параметра  $r$ .

**Задача 1.** *Дана многоугольная фигура  $X$  и набор значений радиуса  $\{r_i\}_{i=1}^n$ ,  $r_i \geq 0$  и  $r_i < r_j$  при  $i < j$ . Вычислить  $\mathfrak{F}(r_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .*

**В разделе 2.2** приведены основные соображения относительно структуры дискового покрытия.

Пусть  $M$  — многоугольная фигура,  $M_r$  — подмножество фигуры, образованное объединением всех спиц длины  $r$  и более. Очевидно, что множество  $M_r$  целиком лежит в  $r$ -покрытии, иначе говоря, область медиальной ширины вложена в область морфологической ширины. Для каждого из трёх типов бициклов выведены формулы, выражающие зависимость площади собственной области и угловой величины внешнего сектора меньшего концевого круга от внутренних параметров бициклов и радиуса покрытия.

**В разделе 2.3** показано, что дисковое  $r$ -покрытие можно представить как объединение полных бициклов, для которых  $R_1 \geq r$ , и усечённых бициклов, для которых  $R_2 \geq r > R_1$ . Здесь  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы концевых кругов бицикла,  $R_2 \geq R_1$ . Усечённый бицикл имеет те же образующие сайты и тот же тип (линейный, параболический или гиперболический), что и исходный бицикл. Процедура коррекции (сечения) бицикла заключается в поиске круга бицикла радиуса  $r$ . Минимальным кругом усечённого бицикла становится круг радиуса  $r$ , а максимальным остаётся круг с радиусом  $R_2$ .

Обозначим  $C_1, C_2$  — центры меньшего и большего концевых кругов. Для линейного бицикла имеем  $C = C_1 + \lambda \cdot (C_2 - C_1)$ , где  $\lambda = (r - R_1)/(R_2 - R_1)$ . В частном случае, когда  $R_2 = R_1$ , полагаем  $\lambda = 0$ .

Для параболического бицикла выберем полярную систему координат  $(r, \phi)$  с началом в сайте-точке  $V$  бицикла и осью, ортогональной сайту-сегменту. Уравнение параболы в этих координатах имеет вид  $\rho = p/(1 + \cos(\phi))$ , где  $p$  — фокальный параметр параболы. Центры концевых дисков имеют координаты  $C_1(R_1, \phi_1)$  и  $C_2(R_2, \phi_2)$ , где  $\phi_1 = \arccos(p/R_1 - 1)$ ,  $\phi_2 = \arccos(p/R_2 - 1)$ . Искомая точка  $C(R, \phi)$ ,  $\phi = \arccos(p/R - 1)$ . Не нарушая общности, будем считать  $\phi_1 < \phi_2$ . Вектор  $\overline{VC}$  получается из  $\overline{VC_1}$  поворотом на угол  $\theta = \phi - \phi_1$  и умножением на коэффициент  $r/R_1$ . Тогда искомый центр круга есть  $C = V + (r/R_1) \cdot \mathbf{G} \cdot \overline{VC}$ , где  $\mathbf{G}$  — матрица поворота на угол  $\theta$ :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

В гиперболическом бицикле точка  $C$  лежит между  $C_1$  и  $C_2$ . Пусть  $q$  — расстояние между сайтами-точками. Если  $V$  — сайт-точка, то проекции векторов  $\overline{VC}$ ,  $\overline{VC_1}$ ,  $\overline{VC_2}$  на ось бицикла имеют длину

$$L = |\overline{VC}| = \sqrt{r^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2},$$

$$L_1 = |\overline{VC_1}| = \sqrt{R_1^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2},$$

$$L_2 = |\overline{VC_2}| = \sqrt{R_2^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2}.$$

Тогда  $C = C_1 + \lambda \cdot (C_2 - C_1)$ , где  $\lambda = (L - L_1)/(L_2 - L_1)$ .

**Лемма 1.** *Часть дискового покрытия, не входящая в объединение собственных областей полных и усечённых бициклов, покрывается внешними секторами меньших концевых кругов усечённых бициклов.*

**В разделе 2.4** сделан анализ структуры пересечений секторов концевых кругов усечённых бициклов и предложены алгоритмы поиска бициклов, пересечения которых достаточно учитывать при расчёте площади покрытия.

**В подразделе 2.4.1** вводится понятие опорного пути между центраторами пересекающихся кругов и отношение смежности усечённых бициклов на его основе.

**Лемма 2.** *Между центрами двух пересекающихся вписанных кругов существует единственный простой (не проходящий дважды через одну и ту же точку) путь в скелете, такой, что все вписанные круги с центраторами в точках пути содержат исходное пересечение.*

**Определение 13.** *Путь между центрами пересекающихся кругов, в котором каждый промежуточный круг содержит пересечение конечных, называется опорным.*

**Определение 14.** *Два пересекающихся усечённых бицикла в  $r$ -покрытии называются смежными, если радиальная функция во всех точках опорного пути между центрами его меньших концевых кругов меньше  $r$ .*

Далее доказано, что для расчёта площади покрытия достаточно рассматривать пары «ближайших» усечённых бициклов, между которыми нет других усечённых бициклов.

**Определение 15.** *Внешней зоной пары смежных бициклов называется объединение внешних секторов за вычетом пересечения с внутренними секторами.*

**Лемма 3.** *Любая точка дискового  $r$ -покрытия:*

- либо принадлежит собственной области полного или усечённого бицикла;
- либо покрывается внешним сектором концевого круга усечённого бицикла, не имеющего смежных;
- либо входит во внешнюю зону пары смежных усечённых бициклов.

Следующие леммы показывают, что тройные пересечения смежных бициклов невозможны.

**Лемма 4.** Пусть  $A, B, C$  — одинаковые круги и линза в пересечении кругов пары  $A$  и  $C$  лежит внутри круга  $A$ . Тогда сумма дуг круга  $B$ , накрытых кругами  $A$  и  $C$ , больше  $\pi$ .

**Лемма 5.** Если в дисковом  $r$ -покрытии концевые круги трёх бициклов имеют непустое пересечение, то в объединении этих кругов существует пустой круг с радиусом  $r$ .

Как следствие, если два бицикла являются смежными к третьему, две образовавшиеся линзы не пересекаются между собой. Поэтому внешние сектора смежных бициклов можно разбить таким образом, что все внешние зоны не будут пересекаться. Это свойство позволяет сформулировать основную теорему главы.

**Теорема 1.** Площадь дискового покрытия многоугольной фигуры равна сумме площадей собственных областей всех бициклов и внешних секторов усечённых бициклов за вычетом площадей парных пересечений смежных усечённых бициклов.

В подразделе 2.4.2 вводится понятие ориентированного скелета многоугольной фигуры, в котором рёбра ориентированы по возрастанию радиальной функции.

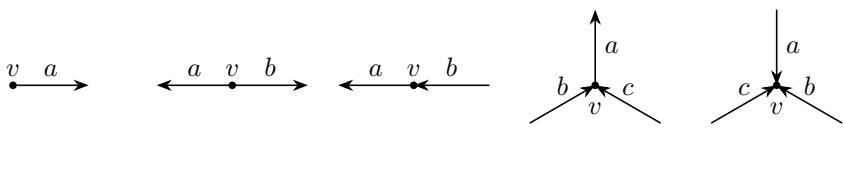


Рис. 4 — Типы вершин в ориентированном скелете

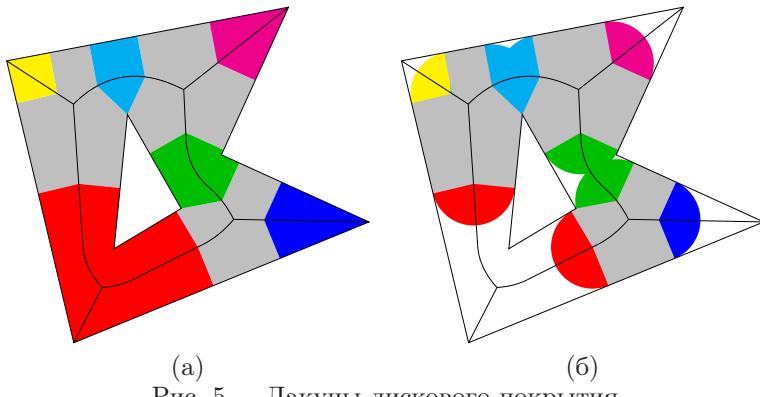
Предложен алгоритм инкрементного прослеживания, который перестраивает граф смежности бициклов в окрестности вершины в тот момент, когда она исчезает из оси покрытия. В скелете общего вида, все вершины которого имеют степень не более трёх, выделяются пять типов вершин по числу входящих и исходящих рёбер (рис. 4). Способ перестройки зависит от типа вершины:

- (а) ничего не делать;
- (б) создать новое пересечение между  $a$  и  $b$ ;
- (в) передать пересечения от  $b$  к  $a$ ;
- (г) передать пересечения от  $b$  и  $c$  к  $a$ ;
- (д) создать новые пересечения между рёбрами, смежными к  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

**Теорема 2.** Граф, полученный в результате инкрементного прослеживания, является графом смежных бициклов.

В подразделе 2.4.3 получены оценки числа пар смежных бициклов, в частности, доказано, что их доля не превышает  $\frac{1}{3}$  по отношению как к числу вершин, так и числу рёбер скелета. В явном виде приведены фигуры, на которых эти оценки достигаются асимптотически.

В подразделе 2.4.4 предложен альтернативный алгоритм поиска смежных бициклов на основе анализа лакун дискового покрытия.



**Определение 16.** *Лакуной дискового  $r$ -покрытия называется замыкание связной компоненты в объединении спиц длины менее  $r$ .*

**Определение 17.** *Осью лакуны называется множество точек скелета, расположенныхных в лакуне.*

Ось лакуны в  $r$ -покрытии можно получить как замыкание компоненты связности скелетного подграфа, содержащего точки скелета с радиальной функцией меньше  $r$ .

**Определение 18.** *Бицикл считается принадлежащим лакуне, если часть его ребра с радиальной функцией меньше  $r$  непуста и является частью оси лакуны.*

**Определение 19.** *Терминальным сектором лакуны называется внешний сектор меньшего концевого круга усечённого бицикла, принадлежащего лакуне, а терминальной вершиной — центр этого круга.*

Лакуны и их терминальные сектора изображены на рис. 5.

**Теорема 3.** *Если бициклы  $r$ -покрытия являются смежными, центры их меньших концевых кругов связаны ребром в триангуляции Делоне множества терминальных точек соответствующей лакуны.*

**В разделе 2.5** для обоих алгоритмов получены оценки вычислительной сложности, согласно которым алгоритм инкрементного прослеживания в худшем случае имеет сложность  $O(n^2)$ , а построение триангуляций Делоне для лакун —  $O(mn \log n)$ , где  $n$  — число рёбер скелета, а  $m$  — число отсчётов спектра. Таким образом, выбор эффективного алгоритма зависит от соотношения между этими величинами.

**В разделе 2.6** приведены эксперименты по вычислению и сравнению морфологической ширины гибких фигур, показывающие, что дескриптор является достаточно устойчивым в случае отсутствия у фигур самоокклюзий.

Завершает главу **раздел 2.7** с выводами.

**В третьей главе** рассматриваются производные дескрипторы ширины, опирающиеся на модель дискового покрытия. Описан метод вычисления дескриптора ширины для сегментированной фигуры, предложено обобщение дискового покрытия в виде системы покрытий для полутонового изображения, а также введено обобщение понятия морфологической ширины в виде концепции морфологических моментов. Кроме того, разработаны методы расчёта растровых карт признаков ширины и предложен общий принцип построения мультимодальных дескрипторов формы, учитывающих информацию о ширине.

**Раздел 3.1** посвящён вычислению *частной морфологической ширины* — дескриптора ширины фигуры  $X$ , учитывающего только точки, попадающие в многоугольную область интереса  $D$  ( $S(X)$  — площадь  $X$ ):

$$\mathfrak{F}_D(r) = S(X(r) \cap D). \quad (3)$$

Показано, что задача может быть решена модификацией известного алгоритма Уайлера-Атертона поиска пересечения многоугольников и поддержания в ходе работы алгоритма трёх списков бициклов: полностью попадающих в окно, попадающих частично и не попадающих совсем.

**Теорема 4.** *Алгоритм вычисления частной морфологической ширины останется корректным, если оставить в скелете только те рёбра, для которых собственная область или внешний сектор меньшего круга имеет непустое пересечение с окном.*

**Раздел 3.2** посвящён обобщению модели дискового покрытия на случай полутоновых изображений — системе дисковых покрытий.

**Теорема 5.** *Пусть  $I_1$  и  $I_2$  — бинарные изображения, а  $N_1$  и  $N_2$  — множества их чёрных пикселей, для которых выполнено  $N_1 \subseteq N_2$ . Если для этих изображений получены аппроксимации в виде наборов многоугольных фигур минимального периметра, то, рассматривая их как множества точек  $X_1$  и  $X_2$ , имеем  $X_1 \subseteq X_2$ .*

Рассмотрим множество сцен  $\{X_i\}, i = 0, \dots, 255$ , каждая из которых получена многоугольной аппроксимацией множества точек растрового изображения, в которых значение интенсивности не меньше  $i$ . Из теоремы 5 следует, что  $X_i(r) \supseteq X_j(r)$  при  $i \leq j$ . Показано, что результатом операции открытия полутонового изображения  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega$  элементом  $B \subset \mathbb{R}^2$

$$(f \circ B)(z) = ((f \ominus B) \oplus B)(z) = \max\{\min\{f(z'') \mid z'' \in B_{z'}\} \mid z' \in B_z\} \quad (4)$$

является система вложенных дисковых покрытий.

Таким образом, морфологическую ширину (совокупную интенсивность) растрового полутонового изображения можно рассчитать по формуле:

$$\mathfrak{F}(r) = \sum_{i=0}^{254} \frac{i}{255} (\mathfrak{F}_i(r) - \mathfrak{F}_{i+1}(r)) + \mathfrak{F}_{255}(r) = \frac{1}{255} \sum_{i=1}^{255} \mathfrak{F}_i(r), \quad (5)$$

где  $\mathfrak{F}_i$  — морфологическая ширина сцены  $X_i$ .

В разделе 3.3 рассматривается способ вычисления локальных признаков ширины, то есть значения функции ширины в отдельно заданной точке фигуры.

Рассмотрена задача вычисления *карты толщин* (distance transform) бинарного изображения  $B$ :

$$DT(p) = \min_q \{||p - q|| \mid B(q) = 0\}. \quad (6)$$

Разработан алгоритм прямого вычисления карты толщин на основе медиального представления формы, основанный на том принципе, что ребро скелета разделяет собственную область на две части, для точек каждой из которых ближайшая точка границы расположена на одном из образующих сайтов ребра.

Разработан алгоритм вычисления гранулометрической функции, основанный на поиске максимального покрывающего круга по монотонным частям скелета.

**Теорема 6.** *Пусть  $L$  — простая кривая, принадлежащая скелету фигуры  $X$ , радиальная функция при движении по кривой  $L$  изменяется монотонно, и точка  $p = (x_0, y_0)$  покрывается одним из вписанных кругов с центром на  $L$ . Тогда максимальный покрывающий  $p$  круг с центром на  $L$  — это либо круг с наибольшим радиусом на всей кривой, либо такой круг, что  $p$  лежит на его границе.*

Далее описан общий принцип построения мультимодальных дескрипторов формы, способных сочетать локальную информацию о ширине с другими локальными характеристиками формы (ориентацией фигуры в точке, геодезическим расстоянием между точками и т. д.).

**Раздел 3.4** посвящён разработке аппарата морфологических моментов. Так как морфологическая ширина нечувствительна к взаимному расположению связных компонент объектов, их повороту, изгибу отдельных частей и т. д., существует потребность в разработке более мощного дескриптора, учитывающего пространственное распределение точек объекта.

**Определение 20.** *Моментом фигуры  $X \subset \mathbb{R}^2$  называется величина*

$$m_{pq}(X) = \iint_{(x,y) \in X} x^p y^q dx dy. \quad (7)$$

**Определение 21.** *Морфологическим моментом порядков  $(p,q)$  фигуры  $X$  считается функция, описывающая зависимость момента дискового  $r$ -покрытия  $X(r)$  от размера примитива:*

$$\mathfrak{M}_{pq}(r) = m_{pq}(X(r)). \quad (8)$$

Моменты  $\mu_{pq}$ , инвариантные к параллельному переносу, получаются в результате фиксации центра масс фигуры:

$$\bar{x} = \frac{\mathfrak{M}_{10}(0)}{\mathfrak{M}_{00}(0)}, \quad \bar{y} = \frac{\mathfrak{M}_{01}(0)}{\mathfrak{M}_{00}(0)}, \quad (9)$$

и смещении фигуры таким образом, чтобы новый центр масс оказался в точке  $(0,0)$ :

$$\mu_{pq}(r) = \iint_{(x,y) \in X} (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q dx dy. \quad (10)$$

Инварианты  $\eta_{pq}$ , устойчивые как к параллельному переносу, так и к изменению масштаба, могут быть получены из центральных моментов нормировкой площади фигуры к 1. Это достигается сжатием фигуры во  $\frac{1}{\sqrt{\mu_{00}(0)}}$  раз по каждой оси, то есть переходом к новым координатам  $(x' = \frac{x}{\sqrt{\mu_{00}(0)}}, y' = \frac{y}{\sqrt{\mu_{00}(0)}})$  и новому значению аргумента  $r' = \frac{r}{\sqrt{\mu_{00}(0)}}$ :

$$\begin{aligned} \eta_{pq}(r') &= \iint_{(x',y') \in X'(r')} (x' - \bar{x}')^p (y' - \bar{y}')^q dx' dy' = \\ &= \iint_{(x,y) \in X(r') \sqrt{\mu_{00}(0)}} \left( \frac{x - \bar{x}}{\sqrt{\mu_{00}(0)}} \right)^p \left( \frac{y - \bar{y}}{\sqrt{\mu_{00}(0)}} \right)^q \frac{1}{\sqrt{\mu_{00}(0)}} dx \frac{1}{\sqrt{\mu_{00}(0)}} dy = \\ &= \frac{\mu_{pq}(r' \sqrt{\mu_{00}(0)})}{(\mu_{00}(0))^{1+\frac{p+q}{2}}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Инвариантность к повороту достигается в результате тех же преобразований, что и в случае инвариантов Ху<sup>6</sup>, с той лишь разницей, что моменты теперь являются функциями, а не скалярными величинами.

Непосредственный расчёт момента дискового покрытия можно произвести, рассматривая его примитивные области: собственные области (частные случаи многоугольников) и внешние сектора концевых кругов. Так, общая формула ненормированных моментов многоугольника имеет вид:

$$m_{pq} = \frac{1}{(p+q+2)(p+q+1)\binom{p+q}{p}} \times \\ \times \sum_{i=1}^n (x_{i-1}y_i - x_iy_{i-1}) \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q \binom{k+l}{l} \binom{p+q-k-l}{q-l} x_i^k x_{i-1}^{p-k} y_i^l y_{i-1}^{q-l}, \quad (12)$$

где  $\binom{n}{k}$  — биномиальный коэффициент, равный  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

Интеграл по круговому сектору  $B$  функции  $f(x,y) = x^p y^q$  легче рассматривать в полярных координатах. В этом случае интеграл можно переписать как:

$$m_{pq}(B) = \int_0^R \int_{\phi_0}^{\phi_1} (x_0 + r \cos \phi)^p (y_0 + r \sin \phi)^q r dr d\phi.$$

Раскрыв скобки, мы можем преобразовать интегрируемую функцию к виду:

$$f(r, \phi) = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \binom{p}{i} \binom{q}{j} x_0^{p-i} y_0^{q-j} r^{i+j+1} \cos^i \phi \sin^j \phi.$$

Воспользовавшись тригонометрическими формулами понижения степени в общем виде:

$$\cos^i \phi = \begin{cases} \frac{\binom{\frac{i}{2}}{2^i}}{2^i} + \frac{1}{2^{i-1}} \sum_{k=0}^{\frac{i}{2}-1} \binom{i}{k} \cos((i-2k)\phi) & \text{при чётном } i, \\ \frac{1}{2^{i-1}} \sum_{k=0}^{\frac{i-1}{2}} \binom{i}{k} \cos((i-2k)\phi) & \text{при нечётном } i; \end{cases}$$

$$\sin^j \phi = \begin{cases} \frac{\binom{\frac{j}{2}}{2^j}}{2^j} + \frac{1}{2^{j-1}} \sum_{t=0}^{\frac{j}{2}-1} (-1)^{\frac{j}{2}-t} \binom{j}{t} \cos((j-2t)\phi) & \text{при чётном } j, \\ \frac{1}{2^{j-1}} \sum_{t=0}^{\frac{j-1}{2}} (-1)^{\frac{j-1}{2}-t} \binom{j}{t} \sin((j-2t)\phi) & \text{при нечётном } j, \end{cases}$$

можно свести подынтегральную функцию к выражению, легко интегрируемому аналитически.

<sup>6</sup>Hu, M.-K. Visual pattern recognition by moment invariants / M.-K. Hu // IRE Transactions on Information Theory. — 1962. — Vol. 8, no. 2. — P. 179—187.

**Раздел 3.5** содержит выводы к главе.

**Глава 4** посвящена практическим приложениям разработанных методов: распознаванию шрифтов из обширной базы и оценке скорости регенерации плоских червей-планарий. Проведены эксперименты по оценке скорости работы реализованных методов и её сравнению с имеющимися аналогами.

В разделе 4.1 описана работа системы распознавания компьютерных шрифтов, получающей на вход размеченное изображение  $Q \in \{0, \dots, k\}^{W \times H}$ : для каждой точки изображения известно, относится ли она к фону или к одному из  $k$  символов. Пусть также для изображения  $Q$  известно, какие символы на нём изображены, что определяется множеством кодов  $\{c_i\}, i = 1, \dots, k$ .

Идентификация шрифта производится на основе сравнения каждой из букв на изображении с базой эталонных букв. Определим расстояние от надписи до конкретного шрифта с номером  $j$ . Оно получается как взвешенная сумма расстояний по всем символам и всем типам дескрипторов (в нашем случае дескрипторами являются моменты различных порядков):

$$\Delta_j = \frac{1}{kg} \sum_{i=1}^k \sum_{t=1}^g w_{c_i t} \Delta_{i j t}, \quad (13)$$

$$\Delta_{i j t} = d_t(\mathbf{q}_{i t}, \mathbf{r}_{c_i j t}), \quad i = 1, \dots, k; t = 1, \dots, g,$$

здесь  $\mathbf{q}_{i t}$  — дескриптор  $t$ -го типа  $i$ -й буквы на изображении  $Q$ ,  $\mathbf{r}_{c_i j t}$  — дескриптор  $t$ -го типа буквы с номером  $c_i$ , отрисованной в  $j$ -м шрифте, а веса  $w_{i t}, i = 1, \dots, k; t = 1, \dots, g$  определяют важность дескриптора  $t$ -го типа  $i$ -й буквы в алфавите мощности  $k$  для распознавания шрифта.

Результатом распознавания изображения  $Q$  является номер шрифта с минимальным расстоянием:

$$A(Q) = \arg \min_j \Delta_j.$$

Для создания базы эталонных дескрипторов были использованы 2543 шрифтовых начертания коллекции цифровых шрифтов компании Парабайл. Каждая буква каждого шрифта была растеризована в таком размере, что высота заглавной буквы  $H$  составила 1000 пикселей.

Для проведения эксперимента в приближенных к реальным условиях были взяты 1000 самых популярных английских слов (средняя длина слова составила 5,33 символа, в выборке были и очень короткие слова, например, I, be), из которых 40% были переведены в верхний регистр. Были растеризованы изображения этих слов в различных размерах, от 40 до 100. Чтобы сделать сравнение возможным, дескрипторы ширины были нормализованы таким образом, что средняя площадь символа приводилась

к фиксированному значению. Веса  $\{w_{it}\}$  были получены в результате оптимизационной процедуры на основе принципа максимизации отступа ( $y$  задаёт номер «правильного» шрифта):

$$M = \min_{j \neq y} \Delta_j - \Delta_y.$$

Точность классификации, приведённая в таблице 1, показывает, что морфологические моменты несут дополнительную информацию о форме изображения, не учитывающуюся морфологической шириной.

Размер	Площадь	Момент (1,0)	Момент (0,1)	Всё вместе
100	91,45%	94,24%	93,38%	<b>96,20%</b>
70	81,42%	88,02%	85,56%	<b>91,62%</b>
50	69,75%	80,60%	76,43%	<b>86,92%</b>
40	48,83%	67,32%	60,07%	<b>77,59%</b>

Таблица 1 — Точность распознавания для моментов начальных порядков и их комбинации

Результаты, приведённые в таблице 2, демонстрируют убедительное превосходство в скорости предложенного метода по сравнению с другими способами представления формы, особенно на изображениях большого размера.

Метод \ Размер	1000	400	200
Дискретный <sup>7</sup>	5291	679	217
Дискретно-непрерывный <sup>8</sup>	71,48	15,91	8,84
Непрерывный (площадь)	<b>5,75</b>	<b>2,32</b>	<b>1,12</b>
Моменты 1-го порядка	6,89	2,78	1,34
Моменты 2-го порядка	8,28	3,32	1,59
Скелетизация	5,54	2,28	1,10

Таблица 2 — Среднее время на обработку одного символа, мс. Затраты методов, за исключением дискретного, указаны с учётом скелетизации.

Таким образом, проведенный эксперимент подтвердил работоспособность предложенного метода и показал его эффективность на практической задаче сравнения большого количества изображений с весьма высоким качеством распознавания.

<sup>7</sup>Urbach, E. R. Efficient 2-D Grayscale Morphological Transformations With Arbitrary Flat Structuring Elements / E. R. Urbach, M. H. Wilkinson // Transactions on Image Processing. — Piscataway, NJ, USA, 2008. — Vol. 17, no. 1. — P. 1—8.

<sup>8</sup>Сидякин, С. Разработка алгоритмов построения морфологических спектров для анализа цифровых изображений и видеопоследовательностей. Диссертация на соискание учёной степени кандидата технических наук / Сидякин Сергей. — Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук, Москва, Россия, 2013.

В разделе 4.2 представлены эксперименты с оценкой степени регенерации плоских червей-планарий в зависимости от биологического состояния среды. В ходе экспериментов исследовалась скорость регенерации опытной группы, помещенной в раствор пептида в концентрации  $10^{-12}$ , и контрольной группы, помещенной в воду, с первого по шестой день после разреза, за исключением четвёртого.

Входными данными служили полутоновые изображения размера  $1388 \times 1040$ , всего в наборе была 171 фотография. Для каждого изображения планарии автоматически производилась бинаризация и выделение области интереса  $D$  вокруг головы планарии. Далее вычислялась функция частной морфологической ширины  $\mathfrak{F}_D(r)$  по алгоритмам из раздела 2.1. В ходе регенерации планарии её головная часть становится всё более заострённой, поэтому нарастающая часть является достаточно узкой. Таким образом, нас интересует площадь достаточно узкой, а не достаточно широкой части, которую можно определить как дополнение дискового покрытия до всей фигуры, поэтому искомая функция имеет вид:

$$S_0(r) = \mathfrak{F}_D(0) - \mathfrak{F}_D(r).$$

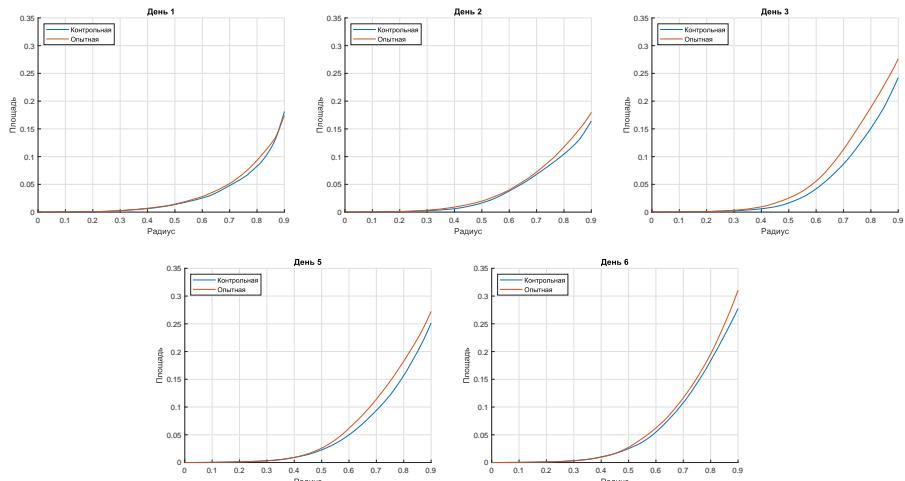


Рис. 6 — Групповые диаграммы ширины для обеих групп в один и тот же день

Чтобы сделать результат инвариантным к масштабу изображения, нормируем его таким образом, чтобы аргумент  $r_{cut}$  — значение радиальной функции в точке перерезки — соответствовал в новой функции единице:

$$S(r) = \frac{1}{r_{cut}^2} S_0(r \cdot r_{cut}).$$

Морфологические функции для каждой из групп в отдельности показаны на рис. 6. Опытная группа демонстрирует стабильно более высокие показатели, поэтому эксперимент служит аргументом в пользу гипотезы, утверждающей, что пептид стимулирует регенерацию планарий. При этом наиболее показательным является третий день и значения аргумента в диапазоне [0,7; 0,9]. Отметим также, что основные вычислительные затраты метода связаны с бинаризацией, в особенности, выделением связных компонент, а вычисление морфологической функции, включая скелетизацию, в среднем занимает меньше двух миллисекунд.

В итоге была разработана полностью автоматизированная система компьютерной морфометрии планарий, которая продемонстрировала возможность решения задач, связанных с оценкой ширины сегментированной фигуры. Предложенный морфологический критерий оказался эффективной численной оценкой качества окружающей среды, в которой происходит регенерация планарий.

В разделе 4.3 содержатся выводы относительно примеров решения практических задач.

**В заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы.

## Публикации автора по теме диссертации

### В рецензируемых журналах из списка ВАК РФ

1. *Местецкий, Л. М.* Распознавание формы гибких объектов изображений на основе спектров ширины / Л. М. Местецкий, Е. М. Зак, Н. А. Ломов // Приволжский научный журнал. — Нижний Новгород, 2014. — № 4. — с. 59—67.
2. *Ломов, Н. А.* Площадь дискового покрытия — дескриптор формы изображения / Н. А. Ломов, Л. М. Местецкий // Компьютерная оптика. — 2016. — т. 40, № 4. — с. 516—525.
3. *Ломов, Н. А.* Классификация двумерных фигур с использованием скелетно-геодезических гистограмм толщин-расстояний / Н. А. Ломов, С. В. Сидякин, Ю. В. Визильтер // Компьютерная оптика. — 2017. — т. 41, № 2. — с. 227—236.

### В изданиях, индексируемых системами Scopus и Web of Science

4. *Lomov, N.* Morphological Moments of Binary Images / N. Lomov, S. Sidyakin // The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences. — 2nd International ISPRS Workshop on PSBB Moscow, Russia, 2017. — P. 19—25. — (WG II/10, II/5).

5. *Lomov, N.* Pattern Width Description through Disk Cover — Application to Digital Font Recognition / N. Lomov, L. Mestetskiy // Proceedings of the 12th International Joint Conference on Computer Vision, Imaging and Computer Graphics Theory and Applications (VISIGRAPP 2017). — Setubal, Portugal, 2017. — P. 484–492.

## В прочих изданиях

6. *Зак, Е. М.* Сравнение формы изображений на основе спектра ширины объектов / Е. М. Зак, Н. А. Ломов, Л. М. Местецкий // Труды 24-й Международной конференции по компьютерной графике и зрению ГрафиКон'2014. — Академия архитектуры и искусств ЮФУ, Ростов-на-Дону, 2014. — с. 150–154.
7. *Ломов, Н. А.* Идентификация цифровых шрифтов на основе морфологической ширины / Н. А. Ломов, Л. М. Местецкий // GraphiCon2016 Труды Международной научной конференции. — ННГАСУ, 2016. — с. 89–95.
8. *Ломов, Н. А.* Распознавание цифровых шрифтов по изображениям на основе дискового покрытия / Н. А. Ломов, Л. М. Местецкий // Интеллектуализация обработки информации: Тезисы докладов 11-й Международной конференции. — ТОРУС ПРЕСС, Москва, 2016. — с. 108–109.
9. *Ломов, Н. А.* Классификация двумерных фигур с использованием скелетно-геодезических гистограмм толщин-расстояний / Н. А. Ломов, С. В. Сидякин, Ю. В. Визильтер // Интеллектуализация обработки информации: Тезисы докладов 11-й Международной конференции. — ТОРУС ПРЕСС, Москва, 2016. — с. 106–107.
10. *Ломов, Н. А.* Классификация двумерных фигур с использованием контурных, скелетных и толщинных описаний / Н. А. Ломов, С. В. Сидякин, Ю. В. Визильтер // Тезисы 8-й научно-технической конференции «Техническое зрение в системах управления». — ИКИ РАН Москва, 2017. — с. 71–72.
11. *Липкина, А. Л.* Распознавание шрифтов по изображениям на основе анализа структуры букв / А. Л. Липкина, Н. А. Ломов // ГРАФИКОН'2017 Труды 27-й Международной научной конференции. — Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, 2017. — с. 359–366.
12. *Ломов, Н. А.* Классификация бинарных фигур с использованием мешка контекстов ребер скелета / Н. А. Ломов, С. В. Сидякин // Математические методы распознавания образов: Тезисы докладов 18-й Всероссийской конференции с международным участием. — ТОРУС ПРЕСС, Москва, 2017. — с. 118–119.